



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1 Пусть чтобы значение произведения abc было наименьшим, числа a, b, c не должны сод. никаким другим простым множителям кроме 2, 3 и 5.
 Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$, $b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$, $c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$

Произведение $(abc)^2$ сод. $2^{7+13+14} = 2^{34}$, $(abc)^2 \geq 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$
 но сод. $abc: 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$, $bc: 2^{13} \cdot 3^{13} \cdot 5^{18}$, $ac: 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$
 $(abc)^2 = ab \cdot bc \cdot ac \geq 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$
 при-е abc сод. $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$
 ~~$(abc)^2 < 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$~~
 ~~$abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$~~

приведем пример, когда достигнута граница:

1) $\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 7 \\ \beta_1 + \gamma_1 = 13 \\ \alpha_1 + \gamma_1 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 4 \\ \beta_1 = 3 \\ \gamma_1 = 10 \end{cases}$ $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 17$, пример: abc может сод. в себе 2^{17}
 2) $\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 = 12 \\ \beta_2 + \gamma_2 = 15 \\ \alpha_2 + \gamma_2 = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 7 \\ \beta_2 = 5 \\ \gamma_2 = 10 \end{cases}$ $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 22$, пример: abc может сод. в себе 3^{22}
 3) $\begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 = 15 \\ \beta_3 + \gamma_3 = 18 \\ \alpha_3 + \gamma_3 = 43 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 14 \\ \beta_3 = 1 \\ \gamma_3 = 17 \end{cases}$ $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 32$

тогда $\alpha_3 + \beta_3 \geq 43$, пусть $\alpha_3 + \beta_3 = 22$, $\begin{cases} \alpha_3 = 22 \\ \beta_3 + \gamma_3 = 21 \\ \alpha_3 + \gamma_3 = 43 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_3 = 21 \\ \gamma_3 = 0 \end{cases}$
 оценка, что abc сод. 5^{38} не достигается и abc сод. 5^{43} (при $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{22}$, $b = 2^3 \cdot 3^5$, $c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{22}$)

$abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$
 Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

т.к. $\arcsin t + \arccos t = \frac{\pi}{2}$, то $\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5 \arcsin(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\pi - 5 \arcsin(\sin x) = x$$

помогает на число. уравнение $0 \leq \arccos(\sin x) \leq \pi$

$$0 \leq 5 \arccos(\sin x) \leq 5\pi$$

\Rightarrow лев. ч. $\in [0; 5\pi]$, значит и правая часть $\in [0; 5\pi]$:

$$0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}$$

1) $-\frac{3\pi}{2} \leq x < -\frac{\pi}{2}$: $\arcsin(\sin x) = -x - \pi$

$$5 \arcsin(\sin x) = \pi - x$$

$$5(-x - \pi) = \pi - x$$

$$-5x - 5\pi = \pi - x$$

$$4x = -6\pi$$

$$x = -\frac{3\pi}{2}, \text{ yg. ych. } -\frac{3\pi}{2} \leq x < -\frac{\pi}{2}$$

2) $-\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}$ $\arcsin(\sin x) = x$

$$5x = \pi - x$$

$$6x = \pi$$

$$x = \frac{\pi}{6}, \text{ yg. ych. } -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}$$

3) $\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{3\pi}{2}$ $\arcsin(\sin x) = -x + \pi$

$$5(-x + \pi) = \pi - x$$

$$-5x + 5\pi = \pi - x$$

$$4x = 4\pi$$

4) $\frac{3\pi}{2} \leq x < \frac{5\pi}{2}$ $\arcsin(\sin x) = x - 2\pi$

$$5(x - 2\pi) = \pi - x$$

$$5x - 10\pi = \pi - x$$

$$6x = 11\pi$$

5) $\frac{5\pi}{2} \leq x < \frac{7\pi}{2}$: $\arcsin(\sin x) = -x + 3\pi$

$$5(-x + 3\pi) = \pi - x$$

$$-5x + 15\pi = \pi - x$$

$$4x = 14\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{2}, \text{ yg. ych. } \frac{5\pi}{2} \leq x < \frac{7\pi}{2}$$

ответ: $-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

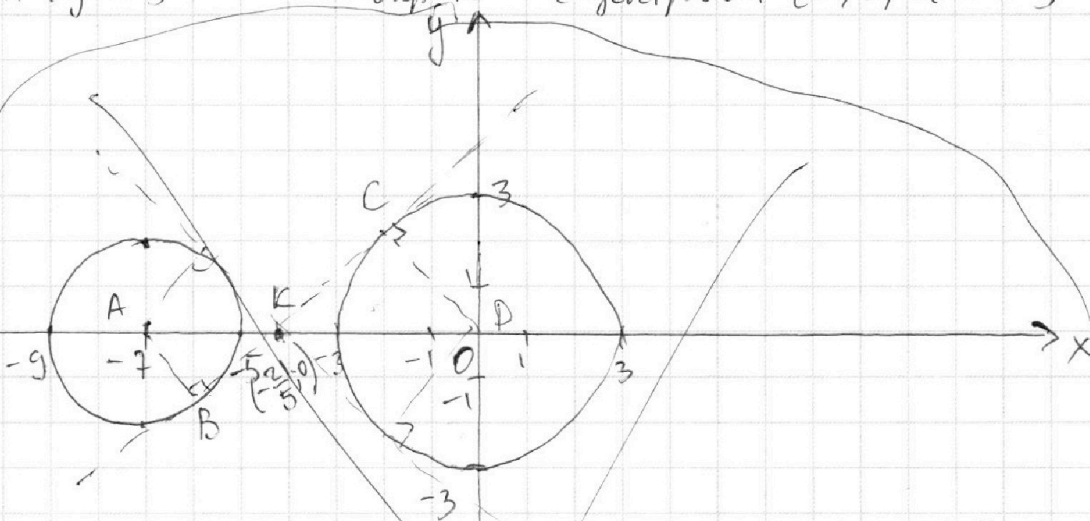
$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 & (1) \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 & (2) \end{cases}$$

Введем систему координат xOy и построим графики, 4° системы координат. Угол наклона -1 и свобод. коэф. $\frac{7b}{3a}$

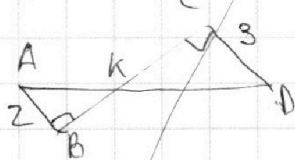
(1) при $a=0$ $x=7b$
 при $a \neq 0$: $3ay = -x+7b$ (*)
 $y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$ — прямая

(2): $\begin{cases} x^2+14x+y^2+45=0 \\ x^2+y^2=3^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+7)^2-49+y^2+45=0 \\ x^2+y^2=3^2 \end{cases}$

$\begin{cases} (x+7)^2+y^2=2^2 \\ x^2+y^2=3^2 \end{cases}$ — окр-ти с центром $(-7;0)$ и $R=2$
 — окр-ти с центром $(0;0)$ и $R=3$



т.к. нам нужно значение a , при которых система имеет 4 р-и, то нужно посмотреть на значения угл. коэф. прямой (*). Угл. коэф-ты, при которых две окр-ти имеют общ. касат. и угл. коэф-ты, по модулю превосходящие их, нам не подходят (т.к. при л-б. знач. b не будет ровно 4 р-и). Касат. перп. радиусам. расам. 2 подострых тр-и. Δ :



из подобия $\frac{AK}{KB} = \frac{2}{3}$ $AK=2d$ $KB=3d$
 $AK+KB=5d=7$
 $d = \frac{7}{5} \Rightarrow k(-\frac{21}{5}; 0)$

пусть $y = kx+t$ — касат., проход. чрез $(-\frac{21}{5}; 0)$, тогда:
 $0 = -\frac{21}{5}k+t \Rightarrow t = \frac{21}{5}k$, $y = (kx + \frac{21k}{5})$
 $x^2 + (kx + \frac{21k}{5})^2 = 3$

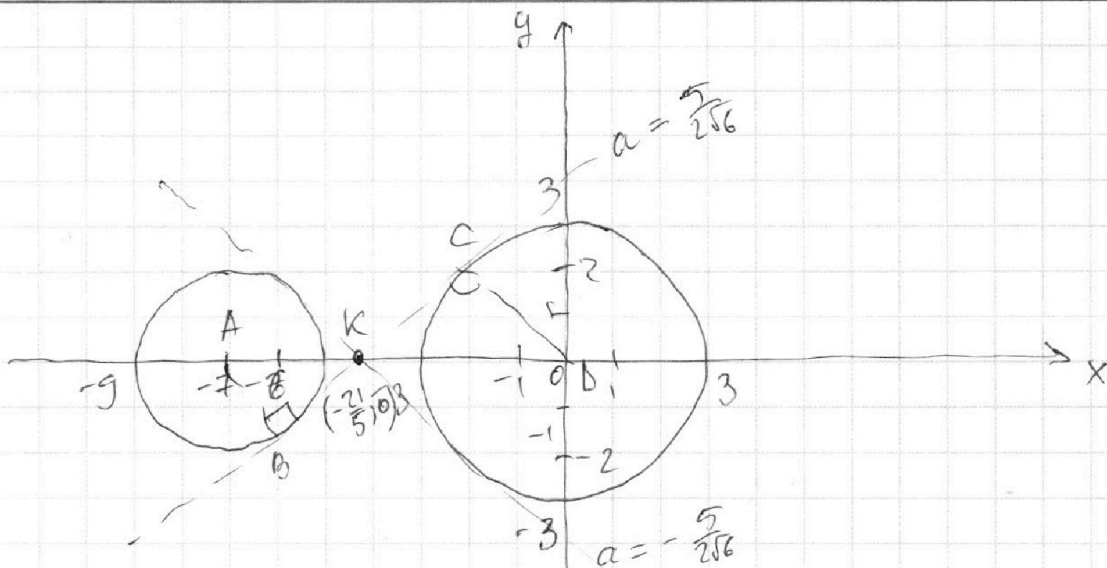
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

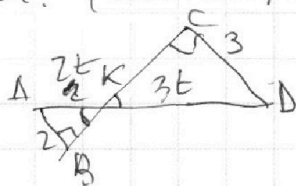
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



посмотрим на знам. упр. котр. пр-и (α), упр. котр. найдем такое β , что сист. будет иметь ровно 4 р-и. (свод. котр. редуцируется за счет β)



найдем пр-ю, упр. котр. авт. одн. кас. к окр-лици $\Delta HKB \sim \Delta KBC$

$$AK : KB = 2 : 3, AK = 2t, KB = 3t$$

$$5t = 7 \quad t = \frac{7}{5} \quad KB = \frac{21}{5} \quad K(-\frac{21}{5}; 0)$$

кас-е прох. через $(-\frac{21}{5}; 0)$

$$y = kx + t$$

$$0 = -\frac{21}{5}k + t \Rightarrow t = \frac{21}{5}k$$

$$y = kx + \frac{21}{5}k$$

$$x^2 + (kx + \frac{21k}{5})^2 = 9$$

$$x^2 + k^2x^2 + \frac{42k^2}{5}x + \frac{21^2k^2}{5^2} - 9 = 0$$

$$(k^2+1)x^2 + \frac{42k^2}{5}x + \frac{21^2k^2}{5^2} - 9 = 0$$

$$D = \frac{42^2k^4}{5^2} - 4(k^2+1)(\frac{21^2k^2}{5^2} - 9) = \frac{42^2k^4}{5^2} - 4(\frac{21^2k^4}{5^2} - 9k^2 - \frac{21^2k^2}{5^2} + 9) =$$

$$= \frac{42^2k^4}{5^2} - \frac{42^2k^4}{5^2} + 36k^2 + 36 - \frac{42^2k^2}{5^2} = 0$$

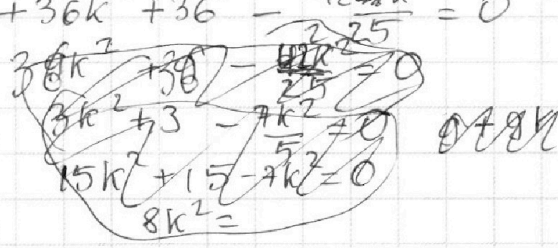
$$36k^2 + 36 - \frac{42k^2}{5} = 0$$

$$9 + 9k^2 - \frac{21k^2}{5} = 0$$

$$1 + k^2 - \frac{4k^2}{5} = 0$$

$$25 + 25k^2 - 40k^2 = 0$$

$$25 = 15k^2 \quad k = \pm \frac{5}{\sqrt{15}} = \pm \frac{5}{2\sqrt{6}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

при $|a| > \frac{5}{2\sqrt{6}}$ ^{проделанные $\sqrt{4}$} система будет иметь ровно 4 реш.
(при мод. 6)

при $a = 0$ $x = 7b$ (вертик. прямая) $\Rightarrow < 4$ реш.

при $-\frac{5}{2\sqrt{6}} < a < 0$ и $0 < a < \frac{5}{2\sqrt{6}}$ найдется такое b , что система будет иметь ровно 4 реш.
(по 2 точки перес. с касуной из окр-ген)

ответ: $(-\frac{5}{2\sqrt{6}}; 0) \cup (0; \frac{5}{2\sqrt{6}})$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 $\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x} 343 - 4 \quad x > 0, x \neq \frac{1}{6}$

$$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{7 \log_{6x} 7} - 4$$

пусть $\log_7(6x) = a, \quad 6x = 7^a$
 $x = \frac{7^a}{6}$

тогда $a^4 - \frac{2}{a} = \frac{3}{2a} - 4 \quad | \cdot 2a$

$$2a^5 - 4 = 3 - 8a$$

$$2a^5 + 8a - 7 = 0$$

$\log_7^4 y + 6 \log_7 y = \log_7^5(7^7) - 4 \quad y > 0, y \neq 1$

$$\log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2 \log_7 y} - 4$$

$\log_7 y = b, \quad y = 7^b, \quad \text{тогда } xy = \frac{a+b}{6}$

$$b^4 + \frac{6}{b} = \frac{5}{2b} - 4 \quad | \cdot 2b$$

$$2b^5 + 12 = 5 - 8b$$

$$2b^5 + 8b + 7 = 0$$

т.е. нужно найти все возможные значения $a+b$ из

системы:

$$\begin{cases} 2a^5 + 8a - 7 = 0 \\ 2b^5 + 8b + 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(a^5 + b^5) + 8(a+b) = 0 \\ 2(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = 0 \end{cases}$$

т.к. $(a^5 + b^5) : (a+b)$, то рассмотрим случаи, когда $a+b=0$, тогда $xy = \frac{1}{6}$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 4(a+b) = 0$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 = -4 \end{cases}$$

Рассм. $f(b) = 2b^5 + 8b + 7$

$f'(b) = 10b^4 + 8 > 0$ при $\text{люб. } b \Rightarrow$

$f(b)$ монотонно \uparrow возр., $\text{уп-е } f(b) = 0$ имеет ровно 1

решение

Рассм. $f(a) = 2a^5 + 8a - 7 \quad f'(a) = 10a^4 + 8 > 0$ при

люб. $a \Rightarrow f(a)$ монотонно возрастает \Rightarrow

уп-е $f(a) = 0$ имеет един. решение тогда

для $a+b$ есть един. возможное значение

и $a+b=0, \quad xy = \frac{7^0}{6} = \frac{1}{6}$

Ответ: $\frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

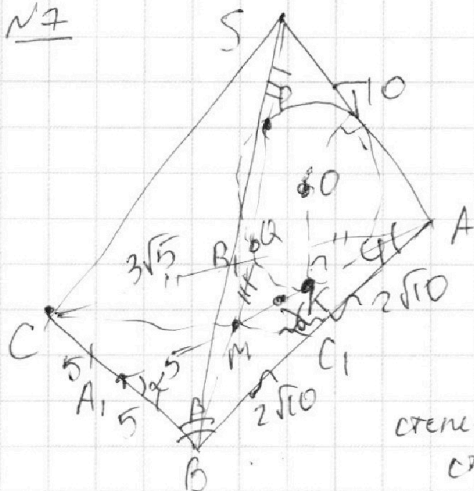
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N7



$$SP = MQ; SA = BC = 10$$

$$S_{ABC} = 60$$

1) Рассм. м-ть (SAM):

сделаем сечение этой м-ти
двумя окр-ми, AM и SA - расшит.

AT = AK (кас-е, пров. из 1 точки)

стеница (-) M отн. окр-ти: $MK^2 = MA \cdot MP$
 стеница (-) S) отн. окр-ти: $ST^2 = SP \cdot SQ$
 + к. $SP = MQ, PQ$

$$ST = MK, SA = AM = 10$$

$$AM = \frac{2}{3} AA_1 \Rightarrow AA_1 = 15$$

(по св. в. точки перес. медиан) Δ

2) $S_{CA_1A} = S_{AA_1B} = \frac{60}{2} = 30$
 $\angle AA_1B = \alpha$ т.к. AA_1 - высота ΔABC

$$30 = \frac{1}{2} \cdot AA_1 \cdot AB \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 5 \cdot \sin \alpha$$

$$2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

по т. кос. ΔAA_1B : $AB^2 = 15^2 + 5^2 - 2 \cdot 15 \cdot 5 \cdot \cos \alpha =$
 $= 225 + 25 - 150 \cdot \frac{3}{5} = 250 - 90 = 160$

$$AB = 4\sqrt{10} \quad BC_1 = 2\sqrt{10} = AC_1$$

по $S_{CC_1B} = \frac{1}{2} S_{ABC} = 30, \angle C_1BC_1 = \beta$

по $S_{CC_1B} = 30 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2\sqrt{10} \cdot \sin \beta$

$$\sin \beta = \frac{3}{\sqrt{10}}, \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

по т. кос ΔC_1BC_1 : $CC_1^2 = 10^2 + 40 - 2 \cdot 2\sqrt{10} \cdot 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} =$
 $= 140 - 40 = 100$

по т. кос ΔABC : $AC^2 = 10^2 + 160 - 2 \cdot 10 \cdot 4\sqrt{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} =$

$$= 100 + 160 - 80 = 180$$

$$AC = 3\sqrt{20} = 3 \cdot 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

$$AB_1 = B_1C_1 = 3\sqrt{5}$$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin \varphi = 60 = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{10} \cdot \sin \varphi$
 $5 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \sin \varphi$

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

по т. кос ΔAB_1B : $BB_1^2 = 9 \cdot 5 + 160 - 2 \cdot 3\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

прод-е N7

$$BB_1^2 = 45 + 160 - 24 \cdot 5 = 45 + 160 - 120 = 40 + 45 = 85$$

$$BB_1 = \sqrt{85} \text{ м}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \sqrt{85} \cdot 15 \cdot 10 = 150\sqrt{85}$$

$$\text{ответ: } 150\sqrt{85}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + \left(kx + \frac{21k}{5}\right)^2 = 9$$

$$x^2 + k^2 x^2 + \frac{42k^2}{5} x + \frac{21^2 k^2}{25} = 9$$

$$(k^2 + 1)x^2 + \frac{42k^2}{5}x + \frac{21^2 k^2}{25} - 9 = 0$$

$$D = \frac{42^2 k^4}{25} - 4(k^2 + 1) \left(\frac{21^2 k^2}{25} - 9 \right) =$$

$$= \frac{42^2 k^4}{25} - 4 \left(\frac{21^2 k^4}{25} - 9 - 9k^2 + \frac{21^2 k^2}{25} \right) =$$

$$= 36 + 36k^2 - \frac{42^2 k^2}{25} = 0$$

$$9 + 9k^2 - \frac{21^2 k^2}{25} = 0$$

$$1 + k^2 - \frac{7^2 k^2}{25} = 0$$

$$25 + 25k^2 - 49k^2 = 0$$

$$25 = 24k^2$$
$$k = \pm \frac{5}{\sqrt{24}}$$

~~42k~~
~~3^2 \cdot 7^2~~



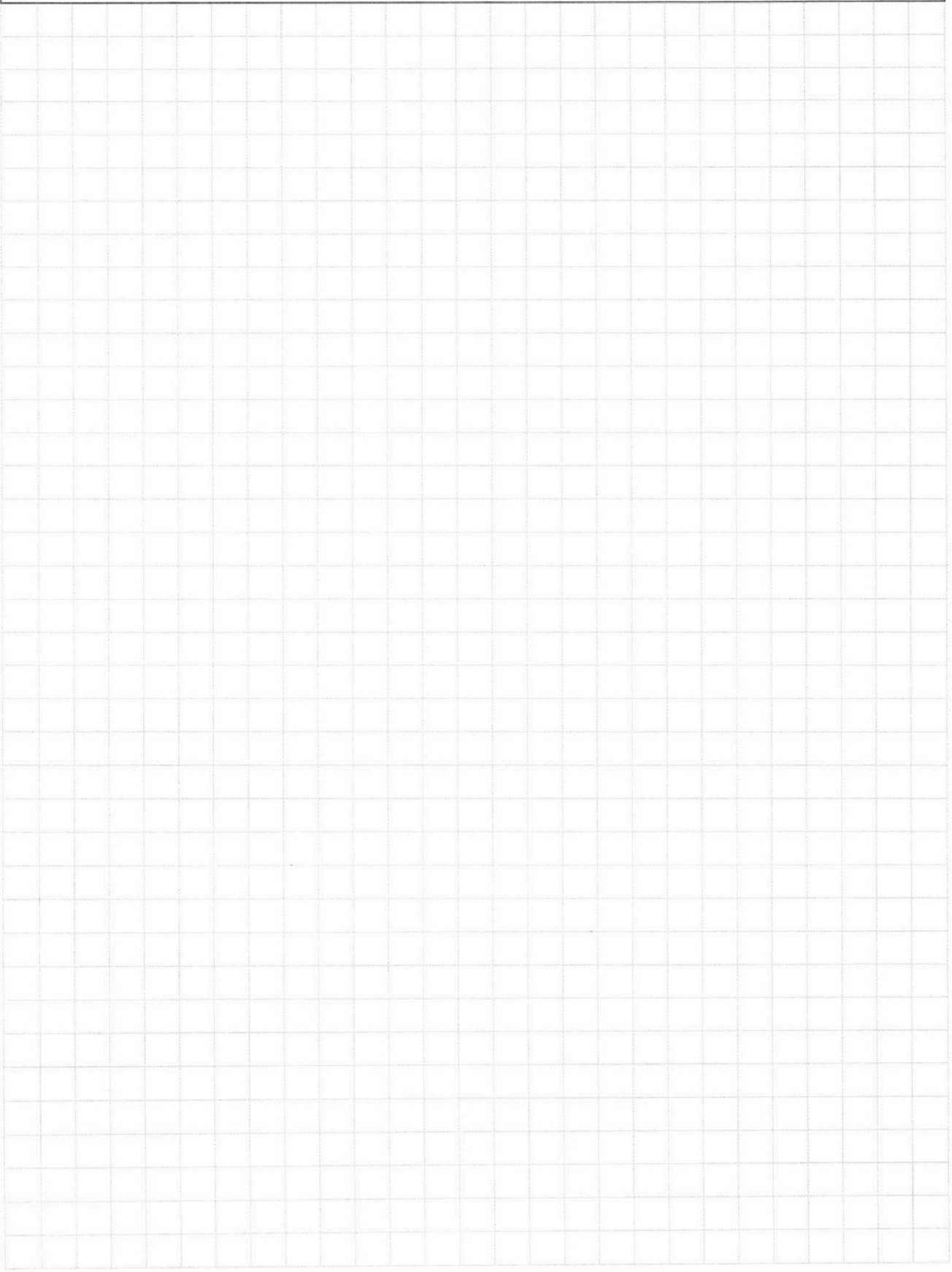
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_7(6x) = a$$

$$\log_7 y = b$$

$$6x = 7^a$$

$$y = 7^b$$

$$6xy = 7^{a+b}$$

$$xy = \frac{7^{a+b}}{6}$$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{2}{a} = \frac{3}{2a} - 4 \\ 6^4 + \frac{6}{6} = \frac{5}{2} - 4 \end{cases} \quad | \cdot 2a$$

$$2a^5 - 4 = 3 - 8a$$

$$2a^5 + 8a - 7 = 0$$

$$2b^5 + 12 = 5 - 8b$$

$$2b^5 + 8b + 7 = 0$$

$$2a^5 + 8a - 7 = 0$$

$$2(a+b)^5 + 8(a+b) = 0$$

$$a+b = 0 \quad xy = \frac{1}{6}$$

$$\begin{array}{r} a^5 + b^5 \mid a+b \\ \underline{a^4} \end{array}$$

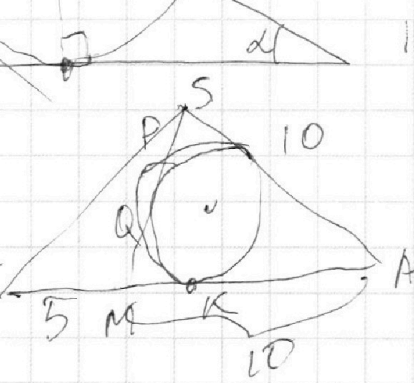
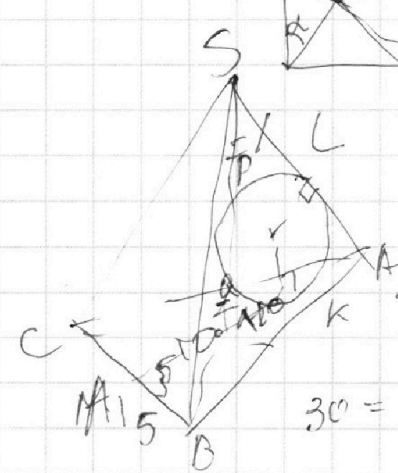
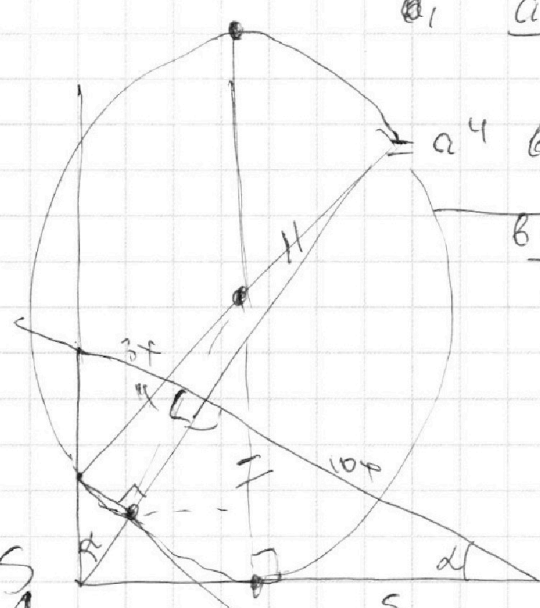
$$b_1 = a^4$$

$$q = \frac{b}{a^5}$$

$$b_1 = \frac{a^4 \left(\left(\frac{b}{a} \right)^5 - 1 \right)}{\frac{b}{a} - 1}$$

$$a^4 \frac{b^5 - a^5}{a^5} = \frac{b-a}{a}$$

$$10b^4 + 8 > 0$$



$$30 =$$

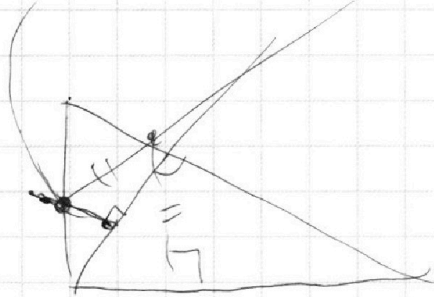


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



черновики

$$(x+7)^2 + (6-x)^2 = 4$$

$$x^2 + 14x + 49 + x^2 + 6^2 - 2 \cdot 6x - 4 = 0$$

$$2x^2 + x(14 - 2 \cdot 6) + 45 = 0$$

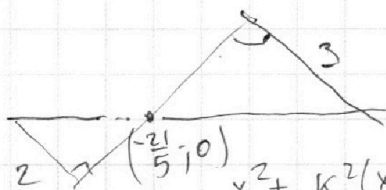
$$D = (2 \cdot 6 - 14)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (45 + 6^2) = 4 \cdot 6^2 - 56 \cdot 6 + 196 - 360 - 8 \cdot 6^2 =$$

$$= -4 \cdot 6^2 - 56 \cdot 6 + 196 = 0 \quad (:-4)$$

$$y = kx + t$$

$$4 \cdot 6^2 + 6^2 + 14 \cdot 6 - 49 = 0$$

$$\frac{86}{14} = \frac{76}{14}$$



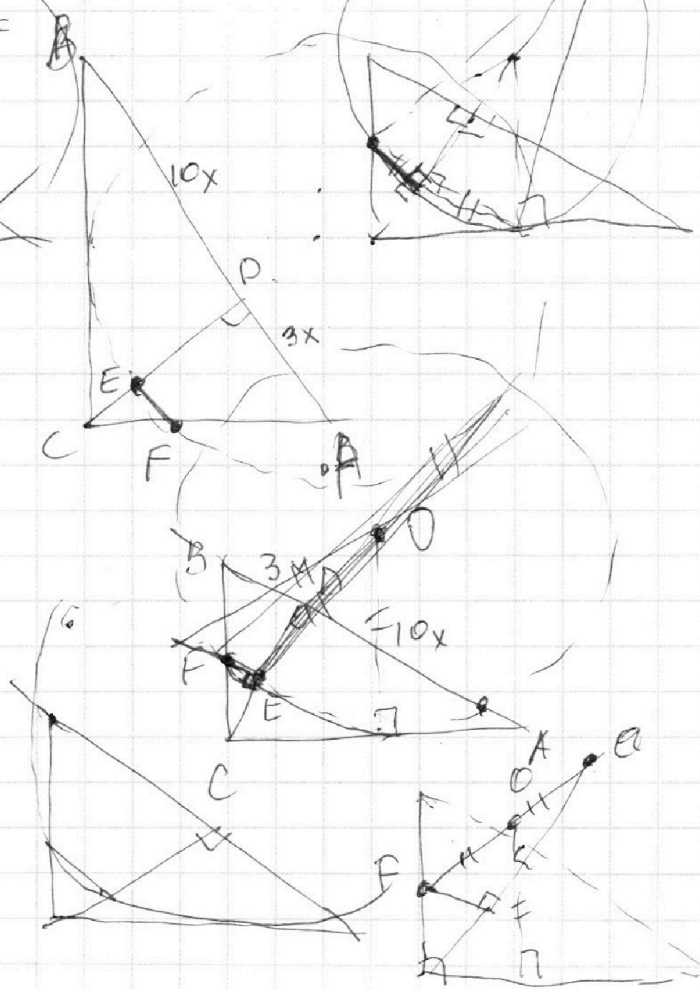
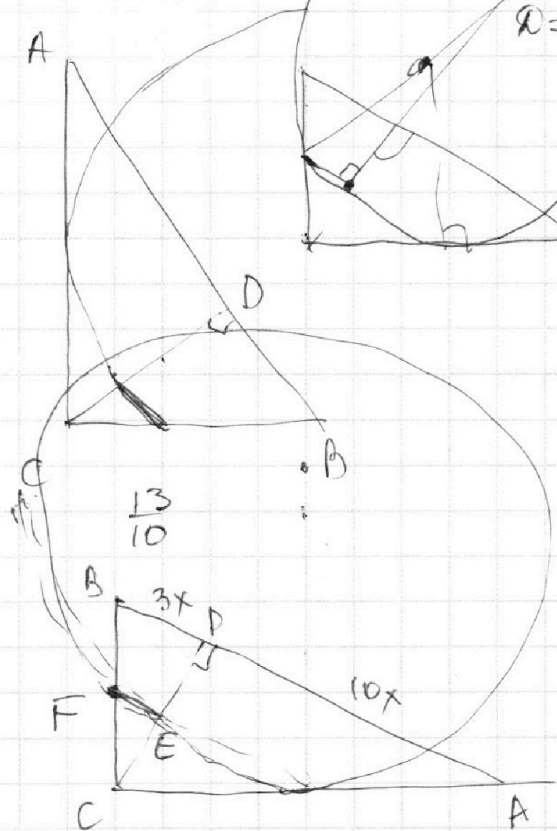
$$y = kx + t = kx + \frac{21}{5}k = k(x + \frac{21}{5})$$

$$0 = -\frac{21}{5}k + t \quad t = \frac{21}{5}k$$

$$x^2 + k^2(x + \frac{21}{5})^2 = 9$$

$$x^2 + k^2(x^2 + \frac{42}{5}x + \frac{21^2}{5^2}) = 9$$

$$(k^2 + 1)x^2 + k^2 \cdot \frac{42}{5}x + \frac{k^2 \cdot 21^2}{5} - 9 = 0$$



$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} =$$

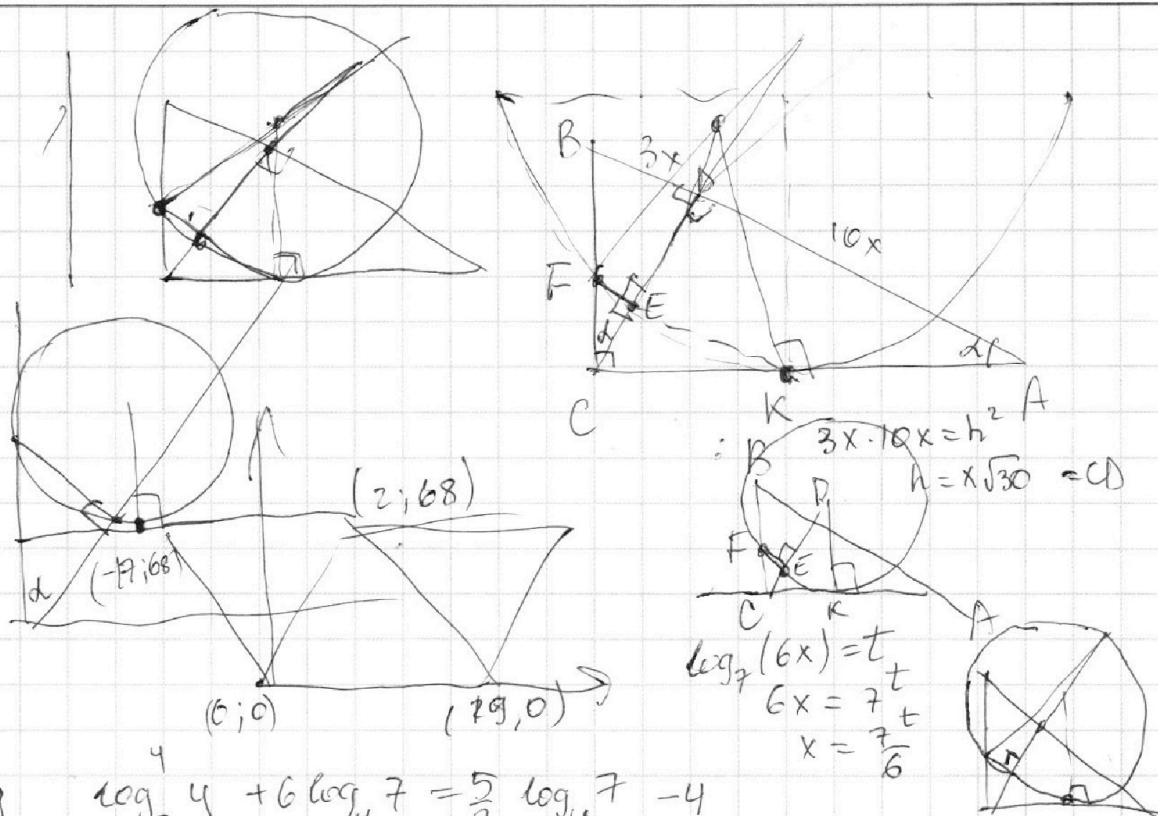
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_7^4 y + 6 \log_7^4 7 = \frac{5}{2} \log_7^4 7 - 4$$

$$\log_7^4 y + \frac{6}{\log_7^4 7} = \frac{5}{2} - 4$$

$$2 \log_7^5 y + 12 = 5 - 8 \log_7^5 y$$

$$10 \log_7^5 y$$

$$\frac{1}{\log_7^4 7} + 6 \log_7^4 7 = \frac{5}{2} \log_7^4 7 - 4$$

$$\frac{1}{t^4} + 6t = \frac{5t}{2} - 4 \quad | \cdot 2t^4$$

$$2 + 8t^5 = 5t^5 - 8t^4$$

$$2 + 8t^5 = -3t^4$$

$$2 = -32.8 = -3.2$$

$$y_2 - y_1 = -4x_2 + 4x_1 - 40$$

$$0 \leq |x| \leq 19 \quad |y| \leq 68$$

$$\frac{24}{120}$$

$$4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$$

$$\Delta y = 40 - 4\Delta x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

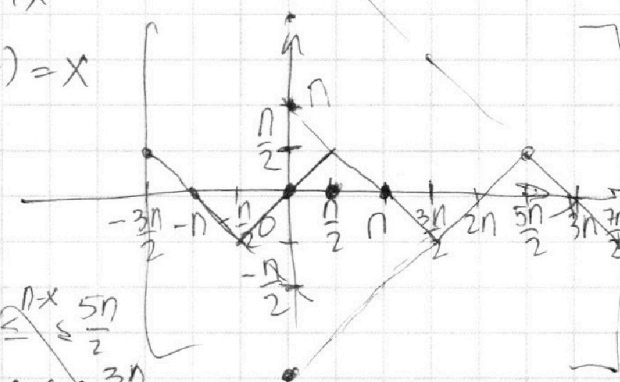
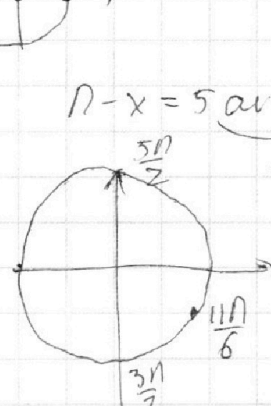


① переводим

$$\begin{aligned}
 a &= 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} & b &= 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} & c &= 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3} \\
 ab &= 2^{\alpha_1+\beta_1} \cdot 3^{\alpha_2+\beta_2} \cdot 5^{\alpha_3+\beta_3} & & & & \\
 bc &= 2^{\beta_1+\gamma_1} \cdot 3^{\beta_2+\gamma_2} \cdot 5^{\beta_3+\gamma_3} & & & & \\
 ac &= 2^{\alpha_1+\gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2+\gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3+\gamma_3} & & & &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 7 \\ \beta_1 + \gamma_1 = 13 \\ \alpha_1 + \gamma_1 = 14 \end{cases} & \begin{cases} 2\alpha_1 = 8 \\ \alpha_1 - \beta_1 = 4 \end{cases} & \begin{cases} \alpha_1 = 4, \beta_1 = 3 \\ \gamma_1 = 10 \end{cases} & \begin{matrix} 17 \\ +15 \\ \hline 32 \\ +11 \\ \hline 43 \end{matrix} \\
 & \begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 = 11 \\ \beta_2 + \gamma_2 = 15 \\ \alpha_2 + \gamma_2 = 17 \end{cases} & \begin{cases} 2\alpha_2 = 13 \\ \alpha_2 - \beta_2 = 2 \end{cases} & \begin{matrix} 32 \\ +43 \\ \hline 75 \end{matrix} & \begin{matrix} 96 \\ -6 \\ \hline 90 \\ | 38 \\ 16 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5 \arccos(\sin x) &= \frac{3\pi}{2} + x & n, 2 \in [0; 5\pi] \\
 \arccos(\sin x) &= \frac{3\pi}{2} + x \\
 5 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) \right) &= \frac{3\pi}{2} + x & 0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi \\
 \frac{5\pi}{2} - 5 \arcsin(\sin x) &= \frac{3\pi}{2} + x & -\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2} \\
 \pi - 5 \arcsin(\sin x) &= x
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} 48 & 10 \\ & -44 \\ & \hline & 26 \\ & +14 \\ & \hline & 40 \end{matrix} & -\frac{5\pi}{2} + 3\pi = \frac{\pi}{2} \oplus \\
 & & 2x = 7\pi \\
 & & \alpha_3 \leq 14 \quad \beta_3 \leq 18 \\
 & & \alpha_3 + \beta_3 \leq 32 \\
 & & 2(\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3) = 14 + 18 + 43 + 1 = 76 \\
 & & \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 38
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

черновик

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_7 6x = \log_7 343 - 4 \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\frac{\log_7^4(6x) - 2 \log_7 6x}{\log_7(6x)} = \frac{3}{2} \log_7 6x - 4$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ 28 \overline{) 49} \\ \hline 63 \end{array}$$

$$\log_7(6x) = t \quad t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4 \quad | \cdot 2t$$

$$2x^2 + x(14 - 2b) + b^2 + 45 = 0$$

$$D = (14 - 2b)^2 - 4 \cdot 2(b^2 + 45) = 196 - 56b + 4b^2 - 8b^2 - 360 = 0$$

$$2t^5 - 4 = 3 - 8t$$

$$2t^5 + 8t - 7 = 0$$

$$x^2 + (14x + (b-x)^2) + 45 = 0$$

$$x^2 + 14x + b^2 + x^2 - 2bx + 45 = 0$$

$$2x^2 + 14x - 2bx + b^2 + 45 = 0$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{2 \log_7(6x)} - 4$$

$$t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4$$

$$2t^5 - 4 = 3 - 8t$$

$$2t^5 + 8t - 7 = 0$$

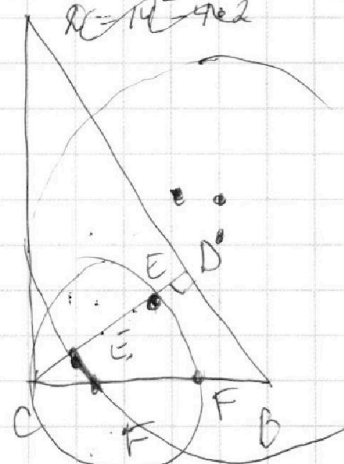
$$\begin{array}{r} 14 \overline{) 14} \\ 14 \overline{) 56} \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\log_7^4 y + \frac{6 \log_7 y}{\log_7 y} = \frac{5}{2 \log_7 y} - 4$$

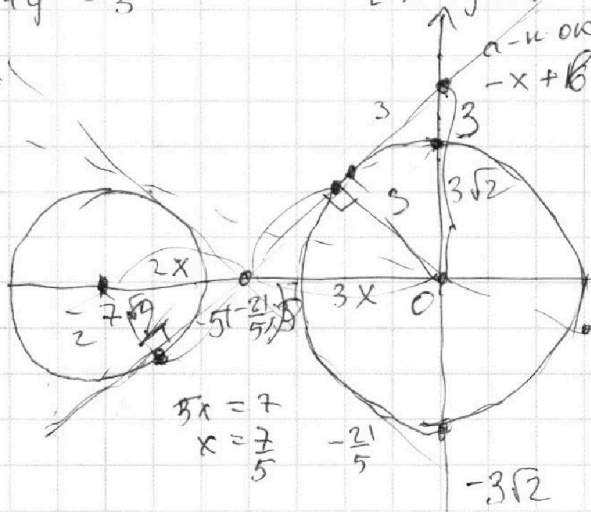
$$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 4 \quad | \cdot 2t$$

$$2t^5 + 12 = 5 - 8t$$

$$2t^5 + 8t + 7 = 0$$



$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x+7)^2 + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} a=0: x=7b - \text{не ок} \\ a \neq 0: y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a} - \text{mod.} \end{cases}$$



$$a=1 \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{7b}{3}$$

$$a=2 \quad -\frac{1}{6}x + \frac{7b}{6}$$

$$x^2 + (b-x)^2 = 9$$

$$x^2 + b^2 + x^2 - 2bx = 9$$

$$2x^2 - 2bx + b^2 - 9 = 0$$

$$D = 4b^2 - 4 \cdot 2(b^2 - 9) = -4b^2 + 36 = 0$$

$$b^2 = 9$$

$$b = \pm 3\sqrt{2}$$

$$5x = 7$$

$$x = \frac{7}{5}$$

ок

$$4b^2 = 36$$