



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что  $t_5 \geq x_5 + y_5 + z_5 \geq 2x_5 + z_5 \geq 28$

Т.е.  $\begin{cases} t_2 \geq 18 \\ t_3 \geq 30 \\ t_5 \geq 28 \end{cases} \Rightarrow \text{обл. } 2 \begin{matrix} 18 \\ 30 \\ 28 \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{matrix} \Rightarrow \text{обл. } 2 \begin{matrix} 18 \\ 30 \\ 28 \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{matrix}$

А равно таким образом можно быть при:

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{11}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{17}$$

Тогда  $ab = 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{11} : 2^3 \cdot 5^{11}$

$$bc = 2^{12} \cdot 3^{21} \cdot 5^{17} : 2^4 \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} : 2^{13} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$\text{и } abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

От вет:  $2 \begin{matrix} 18 \\ 30 \\ 28 \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{matrix}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Даны два им числа  $a, b$ , с их простые множители  
 ] простое число  $p$  входит в  $a, b$ , с в степени  $x_p, y_p$   
 соответственно. ] простое  $p$  входит в  $a \cdot b$  в степени  $t_p = x_p + y_p$   
 Тогда  $ab = 2^6 3^{13} 5^{11} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 + y_2 \geq 6 \\ x_3 + y_3 \geq 13 \\ x_5 + y_5 \geq 11 \end{cases}$$

$$b \leq 2^{14} 3^{21} 5^{13} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_2 + z_2 \geq 14 \\ y_3 + z_3 \geq 21 \\ y_5 + z_5 \geq 13 \end{cases}$$

$$a \leq 2^{16} 3^{25} 5^{28} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_2 + x_2 \geq 16 \\ z_3 + x_3 \geq 25 \\ z_5 + x_5 \geq 28 \end{cases}$$

Число:

$$\begin{cases} x_2 + y_2 \geq 6 \\ y_2 + z_2 \geq 14 \\ z_2 + x_2 \geq 16 \\ x_3 + y_3 \geq 13 \\ y_3 + z_3 \geq 21 \\ z_3 + x_3 \geq 25 \\ x_5 + y_5 \geq 11 \\ y_5 + z_5 \geq 13 \\ z_5 + x_5 \geq 28 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2(x_2 + y_2 + z_2) \geq 36 \\ 2(x_3 + y_3 + z_3) \geq 59 \\ 2(x_5 + y_5 + z_5) \geq 52 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2t_2 \geq 36 \\ 2t_3 \geq 59 \\ 2t_5 \geq 52 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_2 \geq 18 \\ t_3 \geq 29,5 \\ t_5 \geq 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_2 \geq 18 \\ t_3 \geq 30 \\ t_5 \geq 26 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) Пусть  $\sin x = t$ , тогда  $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = t$

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 \arccos(t) = 9\pi - 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 9\pi - 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \begin{cases} 10 \left| \frac{\pi}{2} - x - 2\pi k \right| = 9\pi - 2x \\ \left| \frac{\pi}{2} - x - 2\pi k \right| \leq \pi \end{cases}$$

Отсюда видно, если  $x$  - решение, то

$$10\pi \geq 9\pi - 2x \geq 0 \quad (\pi - 4\pi \geq \frac{\pi}{2} - x - 2\pi k \geq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10\pi \geq 9\pi - 2x \\ 9\pi \geq 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{9\pi}{2} \geq x \\ x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow x \in \left[ \frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2} \right]$$

А еще по mod  $2\pi$ :

$$\begin{cases} 10 \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \equiv 9\pi - 2x \\ 10 \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \equiv 9\pi - 2x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5\pi - 10x \equiv 9\pi - 2x \\ 10x - 5\pi \equiv 9\pi - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10x \equiv -2x \\ 10x \equiv -2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x \equiv 0 \\ 12x \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} : 8x = 2\pi k \\ \exists k \in \mathbb{Z} : 12x = 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi k}{4} & (1) \\ \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi k}{6} & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим случай (1):

$$\text{Тогда } x = \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z} \text{ и } x \in \left[ \frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2} \right] \Leftrightarrow \frac{\pi k}{4} \in \left[ \frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k \in [2; 18]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

При этом исходные уравнения имеют вид.

$$\exists e \in \mathbb{Z}: \begin{cases} |10 - \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi k}{4} - 2\pi e| = 0 - \frac{\pi k}{2} \\ |10 - \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi k}{4} - 2\pi e| \leq \pi \end{cases} (\Rightarrow)$$

$$\Rightarrow \exists e \in \mathbb{Z}: \begin{cases} |10 - 5k - 40e| = 18 - k \text{ ~~не выполняется~~ } \\ |2 - k - 8e| \leq 4 \end{cases}$$

~~Поскольку~~  $10 : 5, -5k : 5, -40e : 5, \text{ а } 18 - k$

~~значит~~ остался модуль 2: а значит,  $18 - k : 5$ ,

а ещё  $k \in [2; 18)$ , т.е.  $k \in \{3, 8, 13, 18\}$

Если  $k=3$ , то второе пер-во однократно  
 $e=0$ . Тогда  $|10 - 5k - 40e| = |10 - 15| = 5 \neq 15$  Не годит.

Если  $k=8$ , то второе пер-во даёт  $e=-1$ ,

и тогда  $|2 - k - 8e| = 2$ , а  $|10 - 5k - 40e| = 10 = 18 - 8 = 10 - k$

годит, т.е.  $x = \frac{8\pi}{4} = 2\pi$

Если  $k=13$ , то второе пер-во даёт  $e=-1$ ,

и тогда  $|2 - k - 8e| = |2 - 13 + 8| = |2 - 5| = 3$ ,

а  $|10 - 5k - 40e| = 15 \neq 18 - 13$  Не годит.

Если  $k=18$ , то  $18 - k = 0$ , значит,  $|2 - k - 8e| = 0$ , т.е.  $18 + 8e = 0$ ,

т.е.  $e = -2$  и он годит:  $x = \frac{9\pi}{2}$ .

(лучше 12)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{тогда } x = \frac{\sqrt{k}}{6}, \quad k \in \mathbb{N}_k \quad x \in \left[ \frac{5}{2}, \frac{9\sqrt{2}}{2} \right] \Leftrightarrow \frac{\sqrt{k}}{6} \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{9\sqrt{2}}{2} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k \in [3; 27]$$

При этом члх ур-е имеет вид:

$$\exists \theta \in \mathbb{N} \begin{cases} \left| 15 \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{k}}{6} - 2\theta\pi \right| = 2\pi - \frac{\pi k}{3} \quad (=) \\ \left| \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{k}}{6} - 2\theta\pi \right| \leq \pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{N} \begin{cases} |15 - 5k - 60\theta| = 27\pi - k \\ |3 - k - 12\theta| \leq 6 \end{cases}$$

$15; 5, -5k; 5, 60\theta; 5$ . значит,  $27 - k; 5, 0$

еще  $k \in [3; 27], \theta = 0, k \in \{7; 12; 17; 22; 27\}$

Рассмотрим первую строку по mod 60:

$$|15 - 5k - 60\theta| \equiv 27 - k \pmod{60} \Leftrightarrow \begin{cases} 15 - 5k \equiv 27 - k \pmod{60} \\ 5k - 15 \equiv 27 - k \pmod{60} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4k \equiv -12 \pmod{60} \\ 6k \equiv 42 \pmod{60} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4k + 12 \equiv 0 \pmod{60} \\ 6k - 42 \equiv 0 \pmod{60} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + 3 \equiv 15 \pmod{15} \\ k - 7 \equiv 10 \pmod{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + 3 \equiv 15 \pmod{15} \\ k + 3 \equiv 10 \pmod{10} \end{cases}, \text{ значит, } k = 22 \text{ не подходит.}$$

Отсюда  $k \in \{7; 12; 17; 27\}$

$$k = 27, \text{ и.е. } x = \frac{27\pi}{6} = \frac{9\pi}{2} \text{ подходит, как мы видели ранее.}$$

$$k = 12, \text{ и.е. } x = \frac{12\pi}{6} = 2\pi \text{ подходит, как мы видели ранее.}$$

Итого

$$k \in \{7; 17\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если  $k=7$ , то  $27-k=20$ , значит,  $|3-7-ke|=4$ , т.е.  $e=0$   
и также  $k$  и  $e$  не могут. т.е.  $x = \frac{7\sqrt{5}}{6}$

Если  $k=17$ , то  $27-k=10$ , значит,  $|3-17-12e|=2$ , т.е.  
 $|14+12e|=2$ , т.е.  $e=-1$  и также  $k$  и  $e$  не  
подходят, т.е.  $x = \frac{17\sqrt{5}}{6}$

Ответ:  $\left\{ \frac{9\sqrt{5}}{2}; 2\sqrt{5}; \frac{7\sqrt{5}}{6}; \frac{17\sqrt{5}}{6} \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Из первых, эти к хорды, т.е. если  $k > 0$ , то  
моя хорда чет прямая  $(B_1 C_1)$ , повернется  
относ  $A$  в ~~полож.~~ <sup>отриц.</sup> напр (т.е.  $k < \frac{7\sqrt{2}}{8}$ ) относительно точки  $A$ ,  
т.е. пересеки. обр. оир-ти. Если  $k < 0$ , то  
моя хорда чет прямая  $(B_2 C_2)$ , повернется  
в ~~полож.~~ <sup>отриц.</sup> напр, т.е.  $(k < -\frac{7\sqrt{2}}{8})$ , относительно точки  $A$ ,  
и поскольку  $B_1 C_1$  симметрична  $B_2 C_2$ , то теперь  
прямая еще ближе к  $Z_1$  и к  $Z_2$ , т.е. пересеки,  
но не все. Значит оир-ти.

Если же  $|k| \geq \frac{7\sqrt{2}}{8}$ , то такая прямая  
очевидно не подходит, т.е. если ее точка  
первая слева  $X$  правее  $A$  (более хорды), то  
она прям не перпендикулярна <sup>(левее)</sup> хорду  
окружность (а именно <sup>(левее)</sup> в точку) (т.е.  
это верно для точки  $A$ , <sup>(правее хорды)</sup> тем более ради.

до  $Z_1$  будет  $> 5$ ).

$$\text{Значит, } k \in \left( -\frac{7\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{5}{6}; \frac{7\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{5}{6} \right)$$

$$\text{Ответ: } \left( -\frac{35\sqrt{2}}{48}; \frac{35\sqrt{2}}{48} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$B_x$  - проекция точки  $B$  на ось  $x$  (пусть её координата  $x$ )

Тогда  $|B_2 B_x|^2 = |B_1 B_x|^2 + |B_x A_x|^2$  т.е.

$$25 - |B_1 B_x|^2 = x \cdot \left(\frac{45}{7} - x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25 - x^2 = \frac{45}{7}x - x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25 = \frac{45}{7}x \Leftrightarrow x = \frac{35}{7} \Leftrightarrow x = \frac{35}{7}$$

А значит, вторая координата точки  $B_2$ :  $\sqrt{25 - \left(\frac{35}{7}\right)^2} =$

$$= \frac{\sqrt{(9 \cdot 5)^2 - 35^2}}{9} = \frac{\sqrt{45^2 - 35^2}}{9} = \frac{20\sqrt{2}}{9}$$

Значит, угловой коэф. отрезку кас:  $\frac{20\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{7}{35 - \frac{35}{7}}$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{7}{7 - \frac{35}{7}} = \frac{28\sqrt{2}}{9 \cdot \frac{2}{7}} = \frac{28\sqrt{2}}{2 \cdot 16} = \frac{14\sqrt{2}}{16} = \frac{7\sqrt{2}}{8}$$

т.е. твердая  $k \in \left(-\frac{7\sqrt{2}}{8}, \frac{7\sqrt{2}}{8}\right)$

~~Handwritten calculations and diagrams, including a triangle with sides 3, 4, 5 and various algebraic steps, are crossed out with a large diagonal line.~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

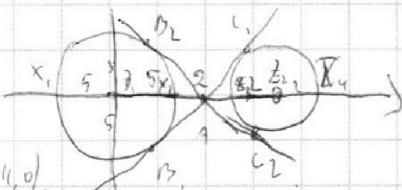
1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Поменяв  $x$  и  $y$  в системе координат мы получим эллипс. Эллипсу мы находим все  $k$ , такие, что прямая с угл. коэф  $k$ , будет пересекать эллипс. Окружности с центром в  $(0,0)$  радиус  $5$  и с центром в  $(9,0)$  радиус  $2$ , т.е. все такие  $k$ , что прямая с угл. коэф  $k$  будет их пересекать. Тогда  $k_1 = \frac{2}{5}$ , а  $k_2 = -\frac{5}{6}k_1$ .

~~]  $X_1(0; -5), X_2(0; 5), X_3($~~



]  $X_1(-5; 0), X_2(5; 0), X_3(7; 0), X_4(4; 0)$ .

]  $Z_1(0; 0), Z_2(9; 0)$  - центры окр-тей.

]  $A$  - точка пересечения внут. обш. кас. (т.е.  $(B_1, L_1)$  - в. кас. к  $(Z_1, L_1)$  и  $(B_2, L_2)$  - в. кас. к  $(Z_2, L_2)$ ).

$B_2, L_2$  - сплоск  $y = 0, L_2$  - ось  $x$  (фиг. 1)

Мы знаем, что поворот центра  $A$  переводит окр 1

в окр 2, значит, ее радиус  $\pm \frac{2}{5}$ , т.е.  $-\frac{2}{5}$  в макс.

А значит,  $\frac{|Z_1 A|}{|A Z_2|} = \frac{5}{2}$ , т.е.  $A(\frac{9-5}{2.5}, 0)$ , т.е.  $A(\frac{2}{5}, 0)$ .

Тогда  $|Z_1 A| = 5, |Z_2 A| = \frac{2.5}{3}$ , а значит,  $|B_2 A| = \sqrt{\frac{4.5^2}{4.5} - 2.5^2} =$

$$= \frac{\sqrt{4.5^2 - 3.5^2}}{3} = \frac{\sqrt{(4.5-3.5)(4.5+3.5)}}{3} = \frac{\sqrt{10 \cdot 80}}{3} = \frac{20\sqrt{2}}{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4. Рассмотрим три взаимно пересекающихся  
любых круга  $\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ (y-9)^2 + x^2 - 4 = 0 \end{cases}$ , т.е.

в декартовой системе координат точка  
 $(x, y)$  лежит на окружности с центром

в  $(0, 0)$  радиусом 5 или с центром в  $(0, 9)$

и радиусом 2. Эти окружности не пересекаются

первое уравнение задает прямую т.е.

нам интересно, при каких  $a$  прямая

пересекает или касается две данные окружности.

$a = 0$  нам подходит, т.е. <sup>прямая</sup> уравнение имеет вид  $x = 0$ ,

для того же  $x$  точки  $(0, -5); (0, 5); (0, 4); (0, 11)$

подходят. А если  $a \neq 0$ , то уравнение прямой

$y = \frac{b}{a} = \frac{5}{6}x$ , т.е. нам нужно найти все

$a$  такие, что две данные окружности пересекаются

или касаются  $\left[ \text{угл. коэф. } -\frac{5}{6} \right]$ , т.е. найдем все

угловые коэффициенты  $k_1$  ( $k_1 = 0$ )

где видно не подходит, т.е. если коэф. угла больше  
или меньше  $-\frac{5}{6}$ , а все  $a$  будут получены как  $-\frac{5}{6}a$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5. Уравнение кубического

$$\begin{cases} \left(\frac{P_n(x)}{P_n(1)}\right)^4 - 6 \frac{P_n(1)}{P_n(x)} = \frac{P_n(1/2)}{P_n(x^3)} - 5 & \text{[ } P_n = 9, P_n(1/2) = 6, P_n(1) = 6 \\ \left(\frac{P_n(0,5y)}{P_n(1)}\right)^4 + \frac{P_n(1)}{P_n(0,5y)} = \frac{P_n(1)}{P_n(0,5y)^3} \end{cases} \quad (=)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{c}\right)^4 - \frac{6c}{a} = \frac{-2c}{3a} - 5 \\ \left(\frac{b}{c}\right)^4 + \frac{c}{b} = \frac{-13c}{3b} - 5 \end{cases} \quad (=)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{c}\right)^4 = \frac{16c}{3a} - 5 & \text{[ } \frac{a}{c} = z, \frac{b}{c} = k \\ \left(\frac{b}{c}\right)^4 = \frac{-16c}{3a} - 5 \end{cases} \quad (=)$$

Второе уравнение  
вспомогательное  
(=)  
"замена"  $z^4 = \frac{16}{3}z^{-1} - 5$   
и  $k^4 = \frac{-16}{3}k^{-1} - 5$   
попробуем

$$\begin{cases} z^5 + 9z = \frac{16}{3} \\ k^5 + 5k = -\frac{16}{3} \end{cases} \quad (1)$$

сложим

$$(1) \Rightarrow z^5 + k^5 + 9z + 5k = 0 \quad (=) \quad (k+z)(k^4 + k^3z + k^2z^2 + kz^3 + z^4) + 4z + 5k = 0$$

$$\begin{cases} k+z=0 \\ k^3(k-z) + k^2z^2 - z^3(k-z) + 5 = 0 \end{cases} \quad (=)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \begin{cases} k+z=0 \\ (k-z)(k-z)(k^2-kz+z^2)+k^2z^2+5=0 \end{cases} \xrightarrow{kz=0} \begin{cases} k+z=0 \\ (k-z)^2(k^2-kz+z^2) < 0 \end{cases}$$

*k+z, т.е. тогда z = -k, тогда (k-z)^2(k^2-kz+z^2) < 0, т.е. k^2 - k(-k) + (-k)^2 = 3k^2 < 0, что мало.*

$$\Rightarrow \begin{cases} k+z=0 \\ k^2-kz+z^2 < 0 \end{cases} \xrightarrow{z^2 > 0, z \neq 0} \begin{cases} k+z=0 \\ \left(\frac{k}{z}\right)^2 - \frac{k}{z} + 1 < 0 \end{cases} \xrightarrow{t = \frac{k}{z}} \begin{cases} k+z=0 \\ t^2 - t + 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k+z=0 \\ \exists t \in \mathbb{R}: t^2 - t + 1 < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{дискр. отрицат.}} \begin{cases} k+z=0 \\ 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k+z=0 \\ -3 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow k+z=0$$

Чтобы мы помнили, что для всех решений (1) верно  $k+z=0$  и хотя бы одно реш. есть (или ур-е имеет ст. всегда имеет все корня) значит,  $k+z$  должен быть 0 и только 0, т.е.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 0, \text{ т.е. } a+b=0, \text{ т.е. } \ln(x) + \ln(y) = 0,$$

$$\text{т.е. } xy=1 \text{ и } \ln(0,5xy) = 0, \text{ т.е. } 0,5xy = 1, \text{ т.е.}$$

$$xy=2$$

Ответ: 2.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда один из  $\sqrt{12k}$  даёт значение

- $[12k+1; 12k+96]$
- $[12k+1; 12k+97]$
- $[12k+2; 12k+98]$
- $[12k+3; 12k+99]$
- $[12k+4; 12k+100]$
- $[12k+5; 12k+107]$

и ещё все в блоке  $[-7; 95]$ .

Блоки от  $k=0$  до 14.

Потом получаем величины для модуля

$z$  первые  $z+1$  отрезки блока даёт значения с

$2k$ , а ост - значения с  $2k+1$ , и значения с

первые  $z$  на  $2k+5$ , а ост - значения с  $2k+6$ ,

иначе нет, который на единицу больше,

Можно начать отрезки, которые

устроены так, что между ними нет

помех. Это  $-7, 0, 1, \dots, 5, 12, 13, \dots, 17, 24, 19, \dots$

$, 84, 85, 86, 87, 88, 89, \dots$ , а все же дальше

уже будут иметь для  $96 - \text{это } 95$  кот. был

для, а  $100$  и у остальных чисел  $12x+a$  будут

$12x+a-1$  коммод для  $12(x-8)+a-1$ , если  $a \neq 0$ ,

и если  $a=0$ , то  $12x-1$  и для для  $12x$  строки для

$x-9$  и значения  $(97-x)$  и  $(97-x)$  (больше).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Аналогично, мы можем рассмотреть и случаи  
существенные случаи, не имеющие следствия  
в 1-том случае, это

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$[12k; 12k - 102]$~~

~~$[12k - 102; 12k]$~~

~~$[12k + 1; 12k - 95]$~~

$[12k - 95; 12k + 1]$

~~$[12k + 2; 12k - 94]$~~

$[12k - 94; 12k + 2]$

~~$[12k + 3; 12k - 93]$~~

$[12k - 93; 12k + 3]$

~~$[12k + 5; 12k]$~~

$[12k - 92; 12k + 4]$

$[12k - 91; 12k + 5]$

$[12k - 90; 12k + 12]$

Приним  $k$  принимает значение от 0 до 14. нецел отрезки  ~~$(12k - 102; 12k)$~~  может и принимать 0. для  $k=0$

Т.е. наши значения получаются какими-то

отрезками, возможно, одно значение несколько раз.

Получим все приемлемые значения

на их сумму по модулю 6. ~~Значения~~

При фиксированном  $k$  вычислим  $\Phi$  характеристизм

значение  $v$  в величине  $\frac{v-1}{6}$

Добавим по всем значениям

получим  $\Phi$  ответ будет

количество пар значений  $k$  равно с  $10k$   
 ~~$12k + 11; 12k + 8; 95 + 10$~~

48.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~Выполним преобразование по формуле:~~

~~$(x, y) \rightarrow (x + \frac{y}{b}, y)$      $b \cdot x - y$      $y - b \cdot x$~~

~~Все точки угла лежат в области  
или нет вид  $b \cdot x$~~

Для каждой точки, (координат или  $(x, y)$ )  
знаем <sup>величину</sup>  $y - b \cdot x$ .

Для  $y = b \cdot k$  в пар-гр. имеют

точки с коорд  $x$  от  $-k$  до  $17-k$

(т.е. это верно для  $y=0$ , и  $(-15; 90) || (-1; 6)$ )

Для  $y = b \cdot k + a$  в пар-гр. имеют точки <sup>порядку</sup>

с коорд  $x$  от  $-k$  до  $16-k$  (т.е.

в строке с коорд  $y$  не меньше имеют эти точки,

а в строке пар-гр. пере:  $(-1; 6)$ ,

значит, величина <sup>порядку</sup> от  $b \cdot k + a + b \cdot k$  до  $b \cdot k + a + b \cdot k - 16$ ,

т.е. по всем строкам (взять коорд  $y$ )  
от  $b \cdot k + a$  до  $b \cdot k + 5$  величина <sup>покажем более строки</sup>  
будет