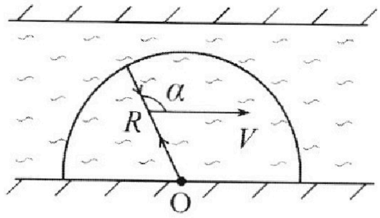
Олимпиада «Физтех» по физике, февраль 2023

Вариант 09-04

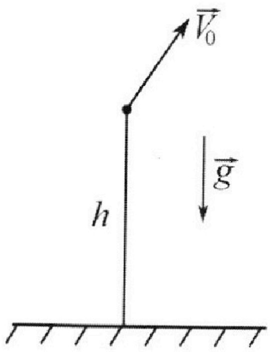
1. На реке отведена зона для безопасного плавания. Граница зоны – половина окружности радиуса $R = 60$ м, центр в точке О (см. рис.). Скорость течения реки V=0,8 м/с. В ходе заплывов по реке пловец каждый раз стартует в точке О, плывет по прямой до границы зоны, а затем по той же прямой возвращается в точку старта. В системе отсчета, связанной с водой, скорость $\vec{U}$ пловца одинакова по модулю при движении в любом направлении.



В первом заплыве пловец проплывает 60 м против течения $\left(\vec{U} \uparrow\downarrow \vec{V}\right)$ и возвращается $\left(-\vec{U} \uparrow\uparrow \vec{V}\right)$ в точку старта. Время движения на первой половине дистанции в 9 раз больше, чем на второй.

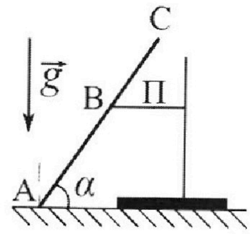
1) Найдите скорость U пловца в системе отсчета, связанной с водой.
2) Найдите продолжительность T заплыва, в котором вектор скорости реки образует угол $\alpha = 120^0$ с прямой, по которой движется пловец (см. рис.).
3) За какое наибольшее время T_{MAX} пловец после старта в точке О может доплыть до границы зоны и вернуться в точку старта?

2. Мяч брошен с башни высотой $h = 14$ м под углом к горизонту (см. рис.). Начальная скорость мяча $V_0 = 13$ м/с, продолжительность полета мяча $T = 2{,}8$ с.



1) Найдите наибольшую высоту H, на которой мяч находился в полете. Все высоты отсчитываются от горизонтальной поверхности.
2) На каком расстоянии d от точки старта мяч упадет на горизонтальную поверхность? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

3. Однородный стержень опирается на горизонтальный шероховатый пол и гладкую горизонтальную пластинку П (см. рис). В серии опытов при фиксированном отношении AB/AC (B – точка касания стержня и пластинки во всех опытах), перемещая пластинку по вертикали, а подставку по горизонтали, изменяют угол α, который стержень образует с горизонтальной плоскостью. Во всех опытах стержень остается в покое.

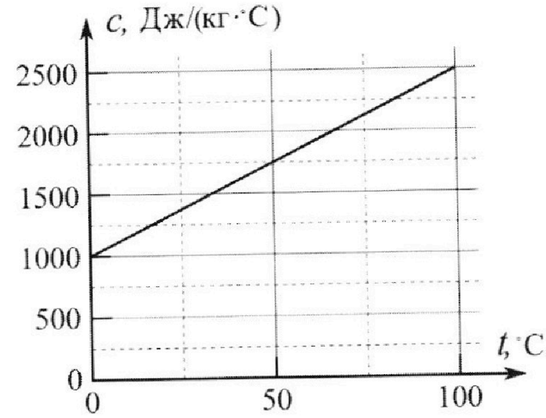


1) При каком угле α сила трения наибольшая по модулю?
2) Если коэффициент трения скольжения стержня по горизонтальной поверхности $\mu = 0{,}5$, то при каких значениях отношения AB/AC стержень будет оставаться в покое при найденном α?

Олимпиада «Физтех» по физике, февраль 2023

Вариант 09-04

4. Брусок массой $M = 1$ кг изготовлен из материала, удельная теплоемкость c которого зависит от температуры t по закону, представленному на графике к задаче.



1) Какое количество Q теплоты следует отвести от бруска, чтобы температура бруска уменьшилась от $t_0 = 100\ ^0$C до $t_1 = 80\ ^0$C?

Этот брусок помещают в калориметр, содержащий глицерин при температуре t_2=19 ^{0}C. Температура бруска $t_1 = 80\ ^0$C, масса глицерина $m = 0{,}4$ кг.

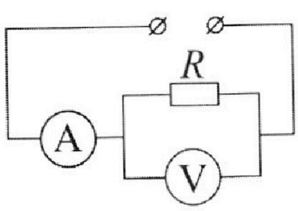
В калориметре устанавливается тепловое равновесие.

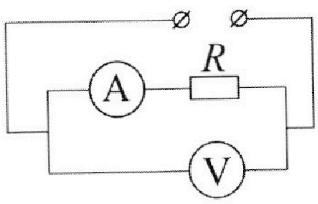
2) Найдите температуру t_3 в калориметре в равновесном состоянии.

В рассматриваемом диапазоне температур удельная теплоемкость глицерина $c_Г = 2{,}5 \cdot 10^3$ Дж/(кг·^{0}C). Потери теплоты и теплоемкость калориметра считайте пренебрежимо малыми.

5. На рисунках к задаче приведены два варианта подключения амперметра и вольтметра для измерения силы тока через резистор сопротивлением R и напряжения на этом резисторе. При неизменном напряжении U источника показания вольтметра отличаются в 1,5 раза, а амперметра –вдвое.

1) Найдите сопротивление r_A амперметра.
2) В какой именно из двух цепей источник развивает бóльшую мощность? Ответ подкрепите соответствующими вычислениями.
3) Найдите эту мощность P_{MAX}.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☑ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

В первом заплыве скорость пловца против течения (в неподвижной системе отсчета) равна $U-V$, а по течению: $U+V$. Имеем:

$$\frac{\cancel{9}\,60}{U-V}=9\,\frac{60}{U+V},$$ откуда $U=1{,}25\,\cancel{U}V=1$ м/с

Для ответа на пункты 1, 3 рассчитаем время движения пловца для произвольного α. Пусть U_x и U_y – проекции скорости пловца относительно воды на оси OX и OY, параллельную и перпендикулярную течению соответственно. Пусть t_α – время движения до ~~д~~ границы круга. Заметим, что ~~д~~ время движения обратно равно времени движения до границы под углом $180°-\alpha$ (одинаковое отношение перемещений по OX и OY, но разное направление течения). Следовательно общее время заплыва равно $t_\alpha+t_{180-\alpha}$.

Запишем проекции перемещения пловца на OX и OY: $U_x t_\alpha+Vt_\alpha=R\cos\alpha$; $U_y t_\alpha=R\sin\alpha$, или $U_x=\frac{R\cos\alpha}{t_\alpha}-V$ $U_y=\frac{R\sin\alpha}{t_\alpha}$. По теореме Пифагора: $U_x^2+U_y^2=U^2$, или $U^2=\frac{R^2}{t_\alpha^2}+V^2-\frac{2VR\cos\alpha}{t_\alpha}$. Домножив на t_α^2 получим квадратное уравнение, решив которое получим: $t_\alpha=\frac{2VR\cos\alpha+\sqrt{U^2-\sin^2_\alpha V^2}\cdot 2R}{2(U^2-V^2)}$.

$$t_\alpha+t_{180-\alpha}=\frac{2R\sqrt{U^2-\sin^2_\alpha V^2}}{U^2-V^2}. \quad (*)$$

Для пункта 2 найдем значение данного выражения при $\alpha=120$ $\frac{2R\sqrt{U^2-V^2\sin^2\alpha}}{U^2-V^2}=\frac{2\cdot 60\sqrt{1-0{,}64\cdot 0{,}75}}{1-0{,}64}=$ $=\frac{200\sqrt{13}}{3}\approx 240$ с. $=T$

~~Минимального значения (*) достигает при α $\alpha=90°$, имеем~~ $\cancel{\frac{2R\sqrt{U^2-\sin^2\alpha V^2}}{U^2-V^2}=\frac{2\cdot 60\sqrt{1-0{,}64}}{1-0{,}64}=200\text{ с.}}$

Наибольшего значения (*) достигает при $\alpha=0°(180°)$

Имеем $\frac{2R\sqrt{U^2-\sin^2\alpha V^2}}{U^2-V^2}=\frac{2\cdot 60\sqrt{1}}{1-0{,}64}\approx 333$ с. $=T_{max}$

Ответ: 1) $U=1$ м/с 2) $T=\frac{200\sqrt{13}}{3}\approx 240$ с. 3) $T_{max}\approx 333$ с.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
	2					

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пусть α - угол броска относительно горизонта. Запишем уравнение перемещения в проекции на вертикальную ось OY: $h = \frac{gT^2}{2} - v_0 \sin\alpha\, T$

$\sin\alpha = \frac{gT}{2v_0} - \frac{h}{v_0 T} = \frac{9}{13}$, соответственно $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{88}}{13}$

Максимальная высота подъема брошенного тела вычисляется по формуле $\Delta H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{81}{20} = 4{,}05$ м. Высота же над уровнем горизонта равна $H = h + \Delta H = 18{,}05$ м

Перемещение тела вдоль оси OX, параллельной горизонту, равно $d = v_0 \cos\alpha\, T = 13$ м/с $\cdot \frac{\sqrt{88}}{13} \cdot 2{,}8$с $\approx 26{,}32$ м

Ответ: 1) $H = 18{,}05$ м 2) $d = 26{,}32$ м

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☑ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

В изображенной конфигурации на стержень действуют следующие силы: сила тяжести mg, сила взаимодействия ~~А~~ пластины N_1, сила ~~взаимодей~~ реакции поверхности N_2 и сила трения $F_{тр}$. Запишем равенство моментов сил относительно точки A. Пусть L – длина стержня $k = \frac{AB}{AC}$, учитывая, что сила тяжести прилагается к центру масс однородного стержня, а $\vec{N_1}$ сила взаимодействия пластинки перпендикулярна стержню, запишем: $mg \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos\alpha = N_1 \cdot L \cdot k$
$N_1 = \frac{mg\cos\alpha}{2k}$. Также запишем ~~усло~~ уравнение статики в проекции на ось OX, параллельную горизонту: $F_{тр} - N_1 \sin\alpha = 0$ $\quad F_{тр} = \frac{mg\cos\alpha\sin\alpha}{2k} = \frac{mg\sin 2\alpha}{4k}$

Для пункта 1) заметим, что $\sin 2\alpha$ ~~не~~ принимает максимальное значение при $\alpha = 45^\circ$ (и $F_{тр} = \frac{mg}{4k}$) следовательно при таком угле сила трения максимальна по модулю.

Для пункта 2) заметим, что $F_{тр} \leq \mu$ ~~mg~~ N_2. Запишем уравнение статики в проекции на OY: $N_2 - mg + N_1 \cos\alpha = 0$ или $N_2 = mg$ ~~+А~~ $mg - \frac{mg\cos^2\alpha}{2k}$
при $\alpha = 45$ (см. п. 1) $N_2 = mg\frac{4k-1}{4k}$ $\quad F_{тр} = \frac{mg}{4k}$
$\frac{mg}{4k} \leq \mu mg \frac{4k-1}{4k}$ $\quad k \geq \frac{\mu+1}{4\mu} = 0{,}75$. Кроме этого учтем, что при $k \leq 0{,}5$ стержень перевесит ~~и упрог~~ так как центр тяжести окажется за точкой опоры. Поэтому $0{,}5 \leq \frac{AB}{AC} \leq 0{,}75$

Ответ: 1) $\alpha = 45$ $\quad$ 2) $0{,}5 \leq k \frac{AB}{AC} \leq 0{,}75$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☑	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Составим уравнение зависимости c от t:
$c(t) = 1000 + 15t$.

Для пункта 1) найдем Q по правилу $Q = M\int_{t_0}^{t_1} c\,dt$
$= M\,(1000t + 7{,}5t^2)\Big|_{t_0}^{t_1} = 1\text{кг}(80.000 + 48.000 - 100.000 - 75.000) = -47\text{ кДж}$
(знак − означает, что тепло отводилось.

Для пункта 2 запишем условие энергетического баланса $Q_1 = Q_2$ $Q_1 = (t_3 - t_2)\cdot m\cdot c_2$
$Q_2 = M\,(1000t + 7{,}5t^2)\Big|_{t_3}^{t_1} = M\,(1000(t_1 - t_3) + 7{,}5(t_1^2 - t_3^2))$
$7{,}5t_3^2 M + t_3(1000M + m\cdot c_2) - 1000Mt_1 - 7{,}5Mt_1^2 - mc_2t_2 = 0$
Подставив входные данные, и решив данное квадратное уравнение относительно t_3
(и ~~это~~ учитывая $19° < t_3 < 80°$), получим $t_3 = 60°$

Ответ: 1) $Q = 47$ кДж 2) $t_3 = 60°C$

Пусть r_a - сопротивление амперметра
$r_в$ - сопротивление вольтметра.

Заметим, что на 2 схеме показания вольтметра равны U, из этого следует, что в 1 схеме его показания равны $\frac{2}{3}U$, а значит напряжение на концах амперметра равно (на первой схеме) $\frac{U}{3}$. Так как в условии не указано, в каком именно случае показания амперметра больше, рассмотрим оба варианта

1) $2I_1 = I_2$ $\quad I_1 = \frac{U}{3r_a}$ (показания в 1 случае) $\quad I_2 = \frac{U}{r_a + R}$ (во 2-ом)
$3r_a = 2r_a + 2R$ $\quad r_a = 2R$. Найдем $r_в$ так как в 1 схеме $2U_a = U_в$, то $2r_a = \frac{r_в R}{r_в + R} = 4R \Rightarrow r_в = -\frac{4}{3}R$, что невозможно. Поэтому данное предположение неверно.

2) $I_1 = 2I_2$ $\quad 6r_a = r_a + R \Rightarrow r_a = R/5$. Найдем $r_в$: (действуем аналогично п. 1) $2r_a = \frac{r_в R}{r_в + R} = \frac{2}{5}R$
$r_в = \frac{2}{3}R$ (что не противоречит действительности)

Значит ответ пункта 1 - $R/5$

Для ответа на пункты 2 и 3 найдем мощности, выделяемые в обоих случаях:
$R_1 = \cancel{2} r_a + \frac{r_в R}{r_в + R} = \frac{3}{5}R$ $\quad P_1 = \frac{U^2}{R_1} = \frac{5U^2}{3R}$ $\quad R_2 = \frac{(R + r_a) r_в}{R + R_a + r_в} = \frac{3}{7}R$
$P_2 = \frac{U^2}{R_2} = \frac{7U^2}{3R} > P_1$, то есть $P_{max} = P_2 = \frac{7U^2}{3R}$

Ответ: 1) $r_a = \frac{1}{5}R$ $\quad$ 2) во второй цепи $\quad$ 3) $\frac{7U^2}{3R}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

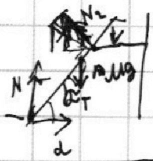
МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$N_2 - m \quad mg\frac{1}{2}l\cdot\cos\alpha = kl N_2 \quad N_2 = \frac{mg\cos\alpha}{2k} \quad \frac{mg\sin 2\alpha}{4k}$ ($\alpha = 45$)



$c = 1000 + 15t$

$Q = M\int_{100}^{80} c\,dt = 1000t + 7{,}5t^2 \Big|_{100}^{80}$

$80.000 + 48.000 - 100.000 + 75.000 = -47.000$

$\frac{mg\cos\sin}{2k} = F_T$

$\frac{mg}{4k} \le mg\mu$

$k \ge \frac{1}{4\mu}$ $\boxed{\frac{1}{2}}$

$(t_3 - 19)\cdot 0{,}4\cdot 2500 =$

$1000(80 - t_3)$ $\quad 1000(t_1 - t_2) + 7{,}5(t_1^2 - t_2^2)$

$+ 7{,}5(6400 - t_3^2)$

$4000.000 + 4.410.000 = 8.410.000$ $\quad \sqrt{841} = 29$

$7{,}5t_1^2 + 2000t - 147.000 = 0$

$\frac{-2000 + 100\sqrt{841}}{15} = \frac{2900}{15} = \frac{900}{15} = 60$

$\frac{U}{\frac{Rr}{R+r} + r_a} = 2\frac{U}{R + r_a} \qquad \frac{2}{R} + \frac{2}{r} + 2r_a = R + r_a$

$\frac{Rr}{R+r} = 2r_a \qquad r_a = R - \frac{2}{R} - \frac{2}{r} = \frac{Rr}{2(R+r)} \qquad R^2r^2 = 2R^3r + 2R^2r^2 - 4R^2 - 4r^2$

$\frac{2}{3}U$

$\frac{28}{26} - \frac{14}{13\cdot 2{,}8} \qquad \frac{R^2r - 2R - 2R}{Rr} \qquad \frac{14}{13}\left(m\frac{9}{14}\right) \quad r^2(R^2-4) + r(2R^3 - 8R) - 8Rr - 4R^2 = 0$

$2I$

$r_a = \frac{Rr}{(R+r)2} \qquad I(8r_a + R) = U \qquad r_a = R - \frac{2Rr}{R+r} = \frac{R^2 - Rr}{R+r}$

$2I\left(r_a + \frac{Rr}{r+R}\right) = U$

$\frac{2}{5}R + \frac{1}{5}R \qquad \boxed{\frac{1}{5}R} \qquad R^2 - Rr = \frac{Rr}{2} \qquad 2R^2 = 3Rr$

$\frac{3}{5}R \qquad \sqrt{13} = 3{,}6 \qquad \frac{720}{3} = 240\,c \qquad r = \frac{2}{3}R$

$\frac{5U^2}{3R} \qquad \frac{6}{5} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{7}R \qquad 6\times 400 \quad 396$

$3R \qquad \frac{7U^2}{3R} \qquad 72\times 400 \qquad \frac{U}{3r_a} = 2\frac{U}{r_a + R}$

$\sqrt{22} = 4{,}66 \qquad 6r_a = r_a + R$

$8\times 600 \quad 516 \qquad 4{,}7 \cdot 5{,}6 \qquad k F\sin = \qquad r_a = R/5$

$5{,}6 \qquad 3r_a = 2Ra + R$

$92\times 8400 \qquad 28^2 \quad 235 \quad 26{,}3^2 \qquad r_a = 2R$

$7{,}5x^2 + x\cdot 2000 - 147000 \quad 80.000 - 48.000 - 19.000 \qquad \frac{\frac{Rr_B}{R+r_B}}{} = \frac{2}{5}R;\ 4R$

$4.410.000 + 2.000.000 = 100\sqrt{841} = \frac{2900 - 2000}{15} = 60 \qquad 2R = 3r_B$

$\frac{\frac{6}{5}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{6}{5} + \frac{2}{3}} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7} \qquad r_B = \frac{2}{3}R$

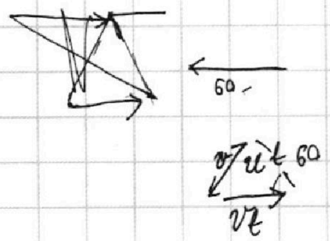
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{60}{u-v} = 9\frac{60}{u+v}$ $8u = 10v$ $u = \frac{5}{4}v = 1$ м/с



$R^2 + (vt)^2 - 2Rvt\cos\alpha = (ut)^2$

$3600 + 0{,}64t^2 + 48t = t^2$

$0{,}36t^2 - 48t - 3600 = 0$

$\sqrt{48^2+72^2} = 24\sqrt{13}$ $\frac{48+24\sqrt{13}}{0{,}72} = \frac{200+100\sqrt{13}}{3}$

$0{,}64t^2 - 48t = t^2$

$0{,}36t^2 + 48$

$\frac{100\sqrt{13}-200}{3} + \frac{200\sqrt{13}}{3}$

$u_x\uparrow$

$u_x = \frac{R\cos\alpha}{t} - v$

$(u\cos\beta - v)t = R\cos\alpha$

$u_y = \frac{R\sin\alpha}{t}$ $\frac{R^2}{t^2} + v^2 - \frac{2Rv\cos\alpha}{t} = u^2$

$u\sin\beta\, t = R\sin\alpha$

$t = \frac{R\sin\alpha}{u\sin\beta}$

$(u^2-v^2)t^2 + 2Rv\cos\alpha\, t - R^2 = 0$ $\alpha = 90$

$\boxed{u\cos\beta - v = u\sin\beta\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$

$2R\sqrt{v^2\cos^2\alpha - v^2 + u^2} = \sqrt{u^2 - v^2\sin^2\alpha}$

$u^2\sin^2\beta\, t^2 + u^2\cos^2\beta\, t^2 + v^2t^2 - 2uv\cos\beta\, t = R^2$

$\frac{60}{0{,}2} + \frac{60}{1{,}8} = 333..$ $u^2 - v^2$

$\frac{0{,}6\cdot 120}{0{,}36}$

$\frac{72}{0{,}36} = 200$

$(u_x - v) = \frac{R\cos\alpha}{t}$ $u_x = v - \frac{R\cos\alpha}{t}$

$\alpha = 120$ $\sin^2\alpha = \frac{3}{4}$

$u_y = \frac{R\sin\alpha}{t}$ $v^2 + \frac{R^2}{t^2} - 2\frac{Rv\cos\alpha}{t} = u^2$

$120\sqrt{1-0{,}48}$, $0{,}52$, $0{,}36$

$(v^2-u^2) = \frac{2Rvt\cos\alpha - R^2}{t^2}$ $(v^2-u^2)t^2 - 2Rv\cos\alpha\, t - R^2 = 0$

$\frac{24\sqrt{13}}{0{,}36} = \frac{200\sqrt{13}}{3}$

$\sqrt{4R^2v^2\cos^2\alpha + 4R^2v^2 - 4R^2u^2} = \frac{2R\sqrt{v^2(1+\cos^2\alpha) - u^2}}{u^2-v^2}$

$\frac{2{,}8}{13}$ $\sqrt{87} = 8{,}3$

$\frac{T^2g}{2} - v_0\sin\alpha\, T = h$

$14\cdot 2{,}8 - 36{,}4\sin\alpha = 14$

$25{,}2 = 36{,}4\sin\alpha$

$1{,}8\cdot 14 = 2{,}8\cdot 13\sin\alpha$

$\frac{18\cdot 14}{28\cdot 13} = \frac{9}{13} = \sin\alpha$

$\cos\alpha =$

$H = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{9^2}{25^2\cdot 20} = \frac{81}{12500}$

$\frac{9^2}{20} = 4{,}05$ м

$169 - 81 = 87$

$\frac{\sqrt{87}}{13}\cdot 13\cdot 2{,}8 \approx 23{,}52$