МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11

1. [4 балла] Решите неравенство

$$\left|x^3+4\right|+\left|x^2-1\right| \leqslant \left|x^3-x^2+5\right|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a;b;c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150}\cdot 3^{300}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y-2)-x(13y-27)+44y-94=0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC. Прямые ED и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что площадь треугольника BCF в 16 раз больше площади треугольника DGF.

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y=x^5+ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y=-3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a, b и c не все равны между собой, и при этом

$$a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения abc.

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC $(AB=BC)$ вписан в окружность ω, а на дуге AC, не содержащей точку B, взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F. На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX=CF$ и $CY=AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF=17$, $XY=31$.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Теперь вторая система:

$$\begin{cases} x^3+4 \le 0 \\ x^2-1 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le \sqrt[3]{-4} \\ x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty). \end{cases}$$

$\Rightarrow x \in (-\infty; \sqrt[3]{-4}]$

Осталось объединить решения систем.

$x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4}] \cup [-1; 1]$

Ответ: $(-\infty; -\sqrt[3]{4}] \cup [-1; 1]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$|x^3+4|+|x^2-1| \leq |x^3-x^2+5|$

Воспользуемся известным неравенством: $|a|+|b| \geq |a+b|$. Из него следует неравенство $|a|+|b| \geq |a-b|$

Положим $a = x^3+4$, $b = x^2-1$.

$|a-b| = |x^3+4-x^2+1| = |x^3-x^2+5|$

То есть: $|x^3+4|+|x^2-1| \geq |x^3-x^2+5|$

а по условию $|x^3+4|+|x^2-1| \leq |x^3-x^2+5|$

Значит, выполняется р-во.

$|x^3+4|+|x^2-1| = |x^3-x^2+5|$

в каких случаях $|a|+|b| = |a-b|$. Давайте посмотрим на знаки a и b. если $a>0$ и $b>0$, то $|a|+|b| > |a-b|$. Если $a<0$ и $b<0$, то $|a|+|b| > |a-b|$ и т.д. Понятно, что если a и b разного знака, то все получается. Значит, либо $a \geq 0$, $b \leq 0$, либо $b \geq 0$, $a \leq 0$. Рассмотрим эти системы и решим их

$$\begin{cases} x^3+4 \geq 0 \\ x^2-1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt[3]{-4} \\ x \in [-1;1] \end{cases} \rightarrow x \in [-1;1]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c образуют геом. прогрессию. q – знаменатель прогрессии

$b = aq$, $c = aq^2$

$abc = 2^{150} 3^{300}$ и еще $abc = a^3 q^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$

Значит, $aq = 2^{50} \cdot 3^{100}$ Понятно, что прогрессия однозначно задается числом q, т.к. $a = \frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{q}$.

Всего вариантов для q:

1) если $q \geq 1$, то $51 \cdot 101$, т.к. q – может быть любым делителем числа $2^{50} \cdot 3^{100}$, а таких всего $51 \cdot 101$.

2) если $0 < q \leq 1$, то тоже $51 \cdot 101$ вариантов для q ~~существует~~, т.к. в случае, где $q \geq 1$, мы получим $51 \cdot 101$ тройку $(a; b; c)$, если $q \leq 1$, мы получим $51 \cdot 101$ тройку, которые будут иметь вид $(c; b; a)$ (просто они идут в другую не возрастания)

Одну тройку мы посчитали дважды. Это случай, когда $q = 1$. Он был посчитан в обоих случаях. Поэтому из ответа надо вычесть 1. То есть всего таких троек

$\boxed{2 \cdot 51 \cdot 101 - 1} = \boxed{10301}$

Ответ: ~~$2 \cdot 51 \cdot 101 - 1$~~ 10301.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$

Как как $D = (13y-27)^2 - 4(y-2)(44y-94) =$

$= 169y^2 - 26\cdot 27y + 729 - 4(44y^2 - 94y - 88y + 188) =$

$= -7y^2 - 702y + 729 + 376y + 352y - 752 =$

$= -7y^2 + 26y - 23$

Дискриминант должен быть не меньше 0 и при этом ещё и полным квадратом. Интуитивно понятно, что при довольно больших y, дискриминант отрицателен. Отрицательных y нет смысла рассматривать т.к. в этом случае дискриминант меньше 0.

При $y=1$ $D = -7 + 26 - 23 = -4$ не подходит

При $y=2$: $D = -28 + 52 - 23 = 1$

$x = \frac{13y - 27 + 1}{2(y-2)} = \frac{26 - 27 + 1}{0}$ на 0 делить нельзя.

$x = \frac{13\cdot 2 - 27 - 1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

поэтому этот случай нам не подходит.

При $y=3$: $D = -7\cdot 9 + 78 - 23 = -8$ не подходит.

При $y=4$: $D = -7\cdot 16 + 104 - 23 = -31$ не подходит.

Понятно, что рассматривать остальные y бессмысленно, т.к. D уменьшается, при $y \geq 5$ он тоже будет меньше 0.

Однако разберём случай $y=2$ ещё раз

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

подставим $y=2$ в ур-ие:

$x + 88 - 94 = 0$

$x = 6$ $\boxed{y=2;\ x=6}$

Случай с другими у были разобраны и при них $D < 0$, значит, нет корней.

Поэтому $x=6;\ y=2$ – единственное решение.

Ответ: $x=6;\ y=2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\angle GAB = \angle BCG = \alpha$, т.к. они опираются на одну дугу.

$\Rightarrow \angle GDA = \angle ADE = 90^\circ$, а $\angle ADE = \angle ABC$ — как соотв. углы при $BC \parallel DE$ и секущей AB.

$\angle ABC$ — прямоугольный. ΔGDF тоже прямоугольный,

$\Delta GDF \sim \Delta CBF$ по двум углам: $\angle EGC = \angle BCG$ и

и $\angle GFD = \angle BFC$. $\Rightarrow \frac{GF}{CF} = \frac{DF}{BF} = \frac{GD}{BC} = k$

и $\frac{S_{GDF}}{S_{BCF}} = k^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow k = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{DF}{BF} = \frac{1}{4}$

Значит, $\frac{BF}{AF} = \frac{2}{3}$

$\frac{BF}{AF} = \frac{BC}{AC}$ — свойство биссектрисы $\frac{BC}{AC} = \frac{2}{3} = \cos \angle BCA$

$\Rightarrow \angle BCA = \arccos \frac{2}{3}$, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAC = 90^\circ - \arccos \frac{2}{3}$

Ответ: 90°; $\arccos \frac{2}{3}$; $90^\circ - \arccos \frac{2}{3}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Дано: $\triangle ABC$

CF - биссектриса

$AD = BD$

$AE = CE$

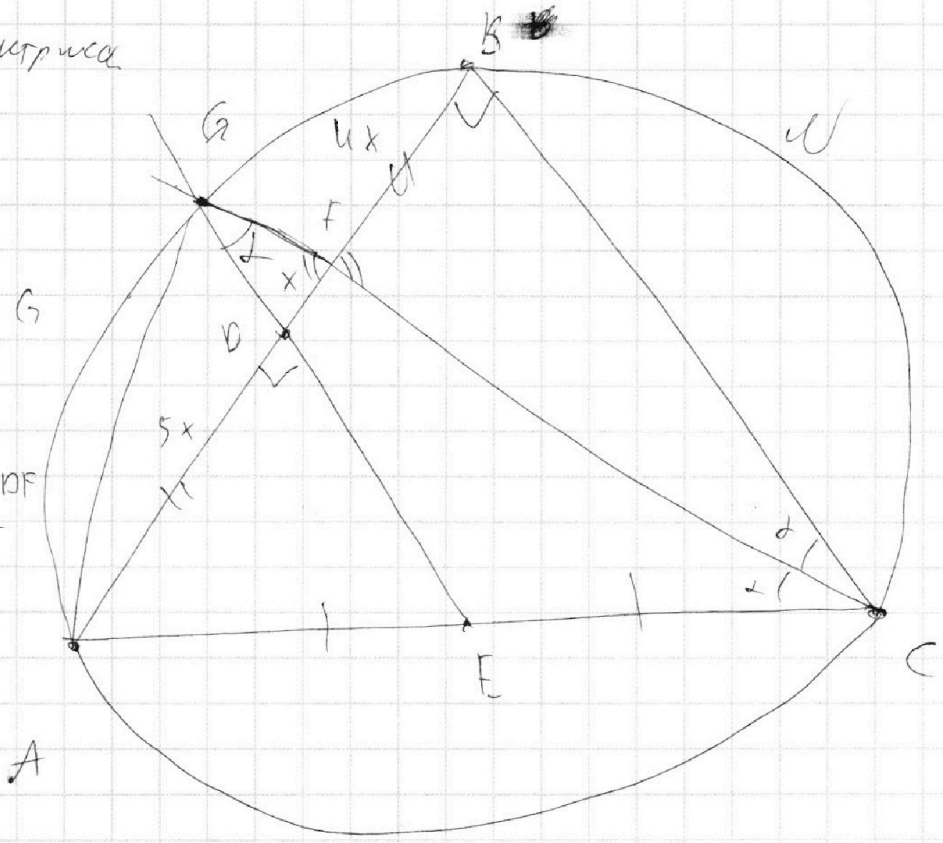
$CF \cap ED = G$

$G \in \omega$

$S_{BCF} = 16 S_{GDF}$

Найти:

углы $\triangle ABC$.



Решение:

$\angle BCG = \angle GCA = \alpha$ т.к. CF - биссектриса

DE - средняя линия $\Rightarrow DE \parallel BC$, а значит, $\angle CGE = \angle BCG$ - как накрест лежащие при $BC \parallel DE$, секущей CG

$\triangle CGE$ - р/б, т.к. $\angle EGC = \angle GCE = \alpha \Rightarrow GE = CE = AE$. Значит, GE - медиана $\triangle AGC$ и она равна половине стороны, к которой проведена. Значит, $\triangle AGC$ - прямоугольный, $\angle AGC = 90°$. $\angle AGE = 90° - \alpha$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$240 a x_0 = -730 x_0$

$\Rightarrow 240a = -730 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{73}{24}}$

Если взять $x_0 = -\frac{1}{3} x_1$, то получится абсолютно такая же система. Значит, $a = -\frac{73}{24}$

Теперь найдем сторону квадрата.

Для этого найдём x_0: $a x_0 + x_0^5 = -3 x_0$

$-\frac{73}{24} + x_0^4 = -3$

$x_0^4 = \frac{1}{24}$ $\quad x_0 = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{24}}$ будем считать, что $x_0 = \sqrt[4]{\frac{1}{24}}$, т.к. будем воспринимать его, как расстояние. Длина диагонали квадрата это:

$2\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 2 \cdot \sqrt{\sqrt{\frac{1}{24}} + \frac{9}{\sqrt{24}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10}{\sqrt{24}}} = \sqrt{\frac{20}{\sqrt{6}}}$

Сторона квадрата равна: $\sqrt{\frac{20}{\sqrt{6}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{20}{\sqrt{6}}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$

$= \sqrt{\frac{20}{\sqrt{6}}} = \sqrt{\frac{10\sqrt{6}}{6}} = \sqrt{\frac{5\sqrt{6}}{3}}$

Ответ: $-\frac{73}{24}$; $\sqrt{\frac{5\sqrt{6}}{3}}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$f(x) = x^5 + ax$ $\quad f(-x) = -x^5 - ax = -(x^5 + ax) =$

$= -f(x)$. Значит, $ax + x^5$ – нечётная функция,

то есть все её точки (коорд. x_0 и $-x_0$) симметричны

друг другу относительно начала координат.

Центр квадрата находится в начале координат и поэтому

его вершины симметричны друг другу относительно

начала координат, т.к. диагонали в квадрате делятся точкой

пересечения пополам. Поэтому если две соседние

вершины квадрата лежат на графике $f(x) = x^5 + ax$, то

другие две вершины тоже на нём лежат, только сам

квадрат этими вершинами не таков, что сторона квадрата параллельна

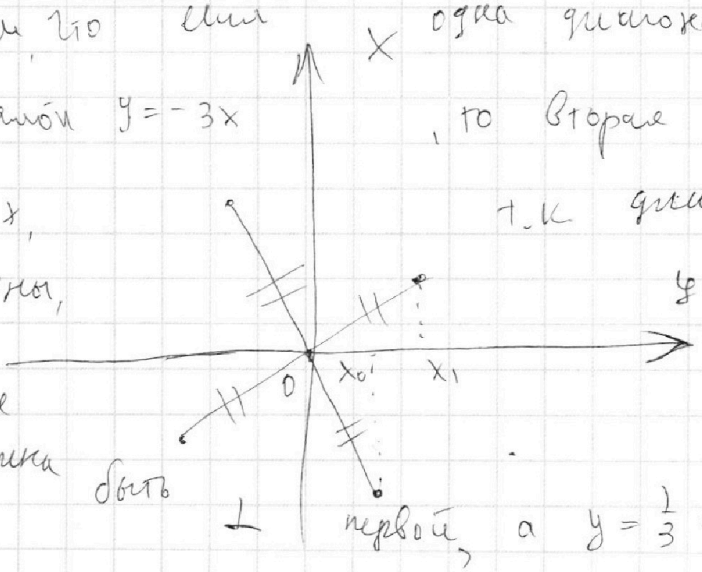
осям координат.

Поймём, что если одна диагональ квадрата

лежит на прямой $y = -3x$, то вторая лежит на

прямой $y = \frac{1}{3}x$, т.к. диагонали квадрата

перпендикулярны.



То есть вторая

прямая должна быть

первой, а $y = \frac{1}{3}x \perp y = -3x$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Возьмём две вершины квадрата (не лежащие на одной диагонали). Пусть у них координаты по OX x_0 и x_1, y_0, y_1 – их координаты по OY:

Во-первых, $y_0 = ax_0 + x_0^5$, $y_1 = ax_1 + x_1^5$

Во-вторых, $y_0 = -3x_0$, $y_1 = \frac{1}{3}x_1$

Подставим одно в другое и решим получившуюся систему:

$$\begin{cases} ax_0 + x_0^5 = -3x_0 \\ ax_1 + x_1^5 = \frac{1}{3}x_1 \end{cases}$$

Ещё замечание: Понятно, что расстояние от ~~нее~~ точек до начала координат равны, т.к. диагонали квадрата равны и делятся точкой пересечения пополам. Поэтому $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$

$x_1^2 + y_1^2 = x_0^2 + y_0^2$ $\quad y_1 = \frac{1}{3}x_1 \to y_1^2 = \frac{1}{9}x_1^2$

$y_0 = -3x_0 \Rightarrow y_0^2 = 9x_0^2$ $\quad$ Значит, $\frac{10}{9}x_1^2 = 10x_0^2$

$\frac{1}{9}x_1^2 = x_0^2$ $\quad \underline{\frac{1}{3}x_1 = x_0}$ (мы не будем $x_0 = -\frac{1}{3}x_1$, в силу желания д-ва, там были бы аналогичные рассуждения) Вернёмся к системе:

$$\begin{cases} ax_0 + x_0^5 = -3x_0 \\ 3ax_0 + 243x_0^5 = x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 243ax_0 + 243x_0^5 = -729x_0 \\ 3ax_0 + 243x_0^5 = x_0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a}$ Перепишем в более удобном виде:

$$\begin{cases} a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c} \\ b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a} \\ a+\frac{5}{b}=c+\frac{5}{a} \end{cases}$$

$\Rightarrow a-b=\frac{5}{c}-\frac{5}{b}=\frac{5(b-c)}{bc}$ (1)

$b-c=\frac{5}{a}-\frac{5}{c}=\frac{5(c-a)}{ac}$ (2)

$c-a=\frac{5}{b}-\frac{5}{a}=\frac{5(a-b)}{ab}$ (3)

Подставим (2) в (1): $a-b=5\cdot\frac{5(c-a)}{ac-bc}=\frac{25(c-a)}{abc^2}$

Подставим (3) в (1): $a-b=\frac{5\cdot 25\cdot(a-b)}{(abc)^2}=\frac{125(a-b)}{(abc)^2}$

В условии сказано, что среди чисел a, b, c есть хотя бы одна пара неравных. В силу симметрии системы, мы можем без ограничения общности сказать, что $a\neq b$.

Тогда $a-b\neq 0$ и мы можем сократить на $a-b$.

$\frac{125}{(abc)^2}=1$ $(abc)^2=125$ $abc=\pm\sqrt{125}=\pm 5\sqrt{5}$

$-5\sqrt{5}<5\sqrt{5}$ $\Rightarrow$ $-5\sqrt{5}$ это наименьшее значение abc.

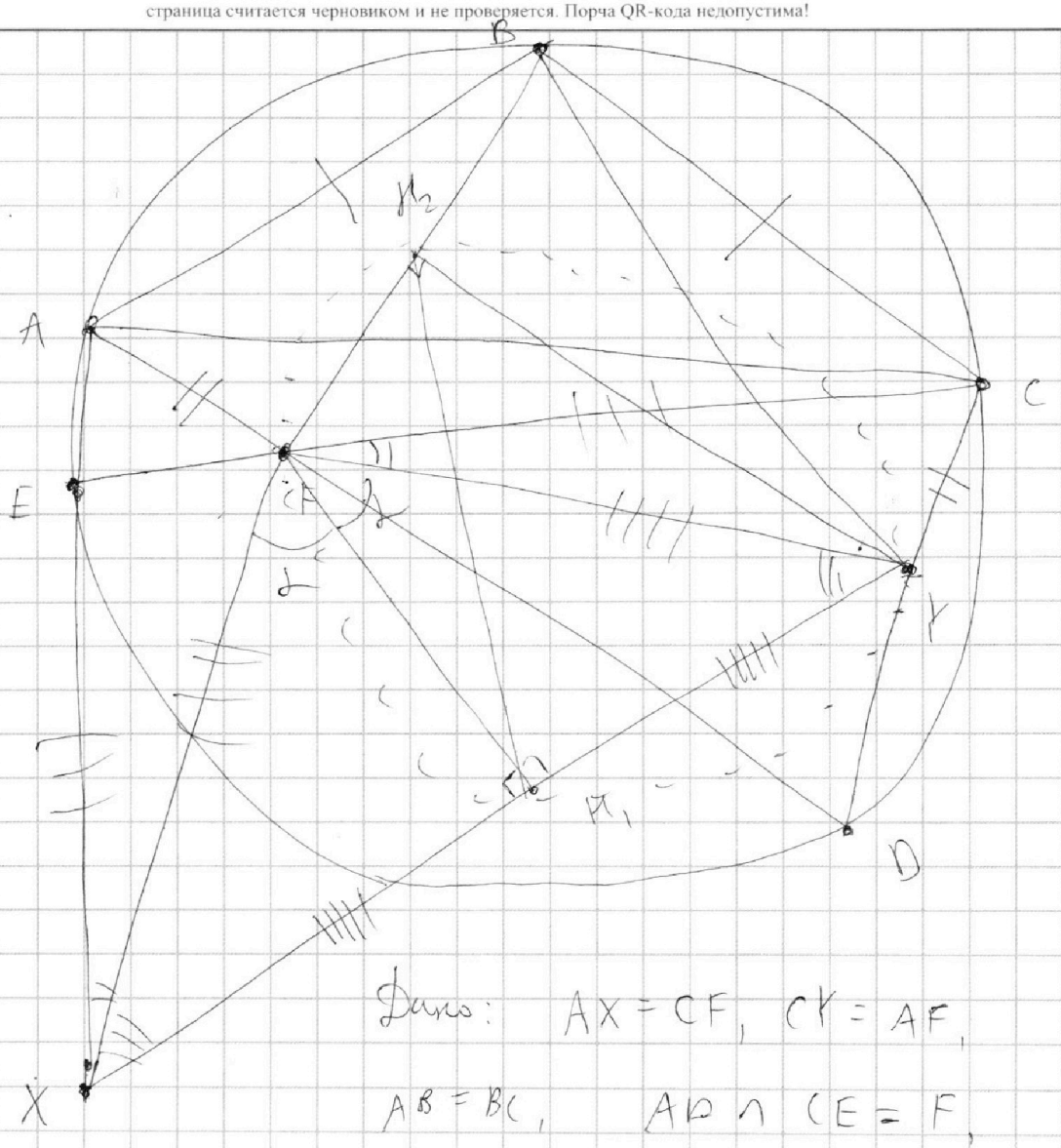
Ответ: $-5\sqrt{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Дано: $AX = CF$, $CY = AF$,

$AB = BC$, $AD \cap CE = F$,

$BF = 17$, $XY = 31$.

Найти: $S_{BFXY} = ?$

Решение:

ΔAXF и ΔCFY равны по двум сторонам и углу между ними. ($AX = CF$, $CY = AF$, $\angle XAD = \angle FCD$ - как опирающиеся на одну дугу). Значит, $XF = FY$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Опустим высоту FH_1 на XY и YH_2 на BF.

$S_{BFXY} = S_{YBF} + S_{XFY} = \frac{1}{2} XY \cdot FH_1 + \frac{1}{2} BF \cdot YH_2 =$

$= \frac{1}{2}(XY \cdot FH_1 + BF \cdot YH_2)$

$\angle YFH_1 = \alpha$. FH_1YH_2 – вписанный, т.к. $\angle$

$\angle FH_1Y + \angle FH_2Y = 180^\circ$

$FY = \frac{H_1Y}{\sin\alpha}$ – теорема синусов.

$FY = \frac{15,5}{\sin\alpha}$ $H_1Y = \frac{1}{2} XY$, т.к. $\triangle XFY$ – равнобедренный и FH_1 в нем и высота, и медиана, и биссектриса $FH_1 = \sqrt{XF^2 - XH_1^2}$ – из теоремы Пифагора. $FH_1 = \sqrt{FY^2 - XH_1^2} = \sqrt{\frac{15,5^2}{\sin^2\alpha} - 15,5^2} =$

$= \sqrt{15,5^2} = 15,5\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1} = 15,5\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} =$

$= 15,5 \operatorname{ctg}\alpha$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

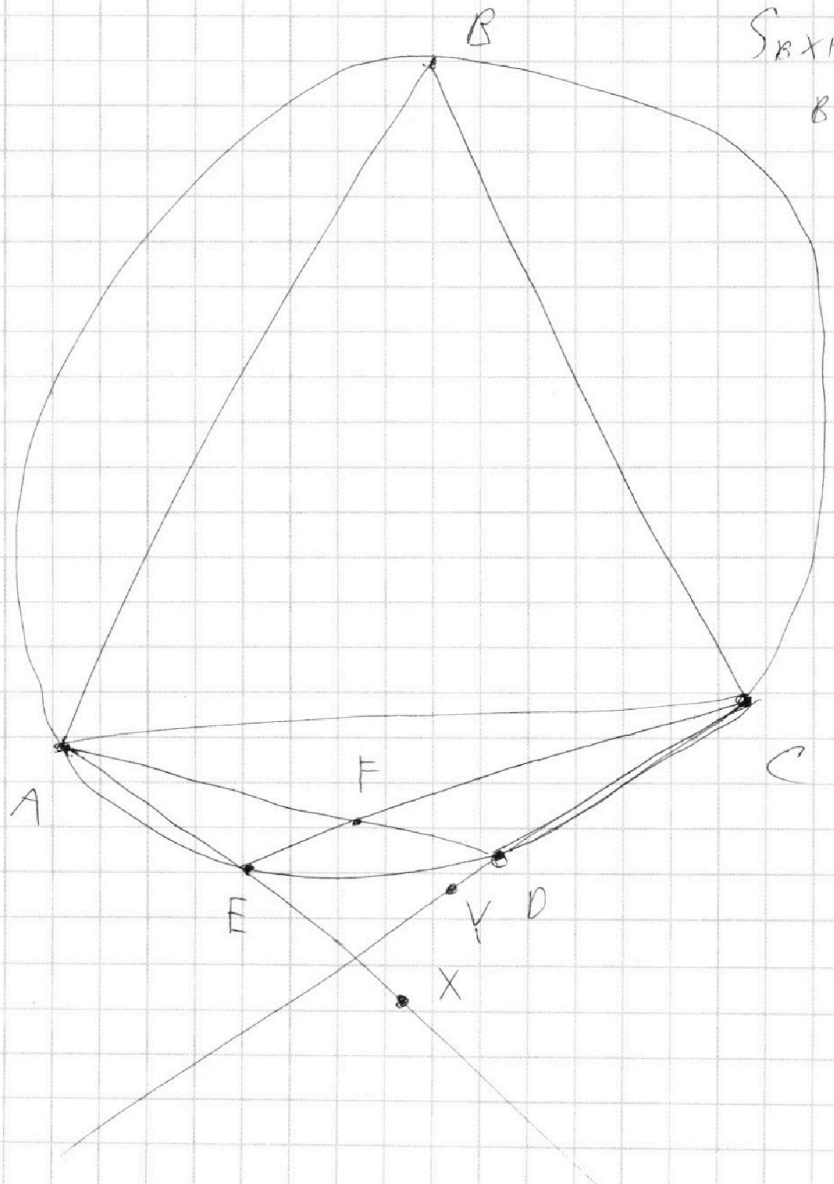
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$AB = BC$

$S_{BXFY} = ?$

$BF = 17, XY = 31$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a+\frac{5}{b} = b+\frac{5}{c} = c+\frac{5}{a}$ Найти: min abc = ?

$a=b=c$ нельзя

$$\begin{cases} a+\frac{5}{b} = b+\frac{5}{c} \\ b+\frac{5}{c} = c+\frac{5}{a} \\ a+\frac{5}{b} = c+\frac{5}{a} \end{cases}$$

$a-b = \frac{5}{c} - \frac{5}{b} = \frac{5b-5c}{bc} =$

$= \frac{5(b-c)}{bc}$

$b-c = \frac{5}{a} - \frac{5}{c} = \frac{5c-5a}{ac} =$

$= \frac{5(c-a)}{ac}$

$a-b = \frac{5\cdot\frac{5(c-a)}{ac}}{bc} = \frac{25(c-a)}{abc^2}$

$c-a = \frac{5}{b} - \frac{5}{a} = \frac{5(a-b)}{ba}$ $\quad a-b = \frac{25\cdot\frac{5(a-b)}{ba}}{ab\,c^2} =$

$= \frac{125(a-b)}{a^2b^2c^2} = \frac{125(a-b)}{(abc)^2}$ $\quad \frac{125}{(abc)^2} = 1.$

$(abc)^2 = 125 \Rightarrow abc = \sqrt{125} =$

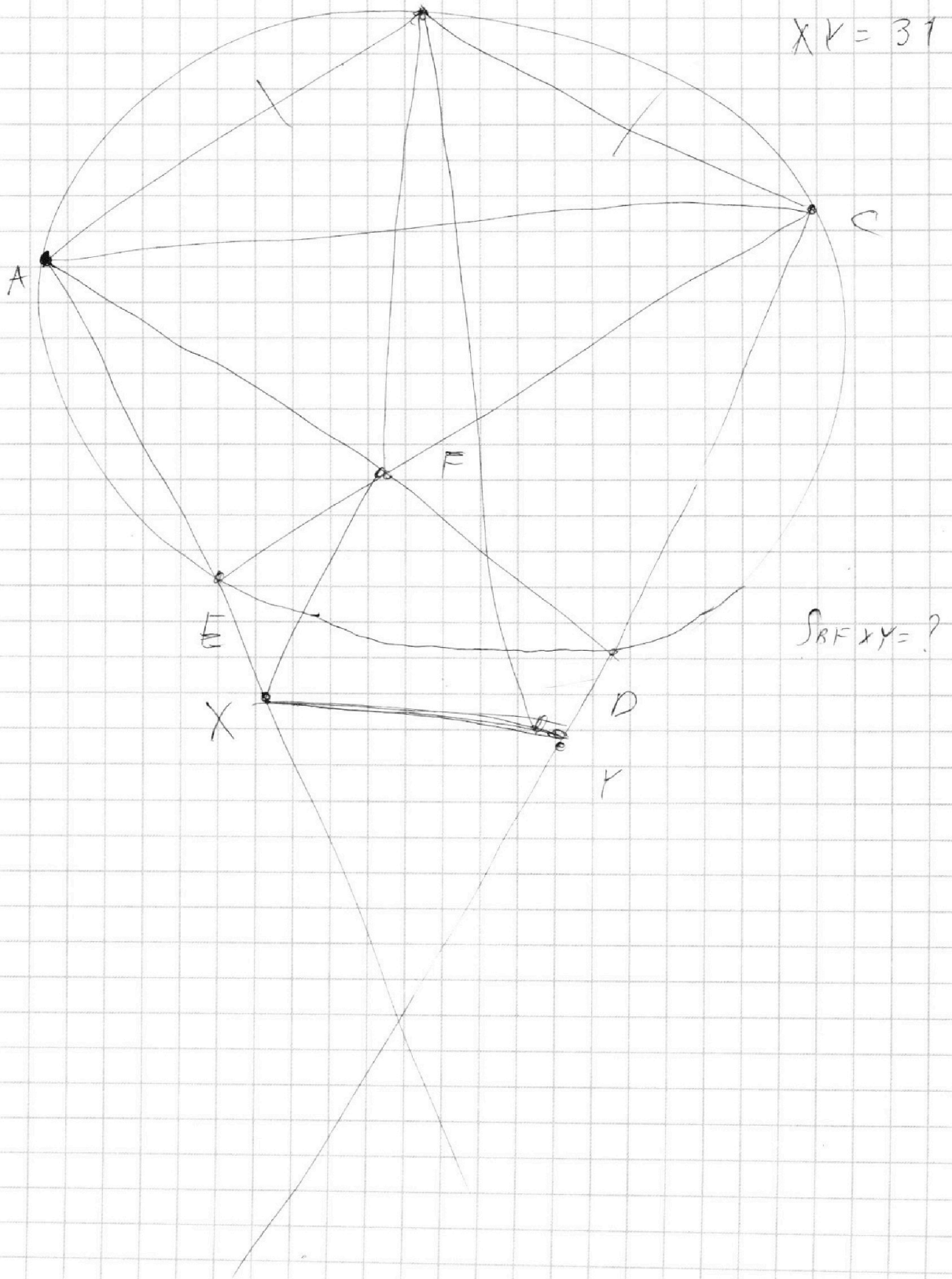
$= 5\sqrt{5}.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$BF = 17$

$XY = 31$

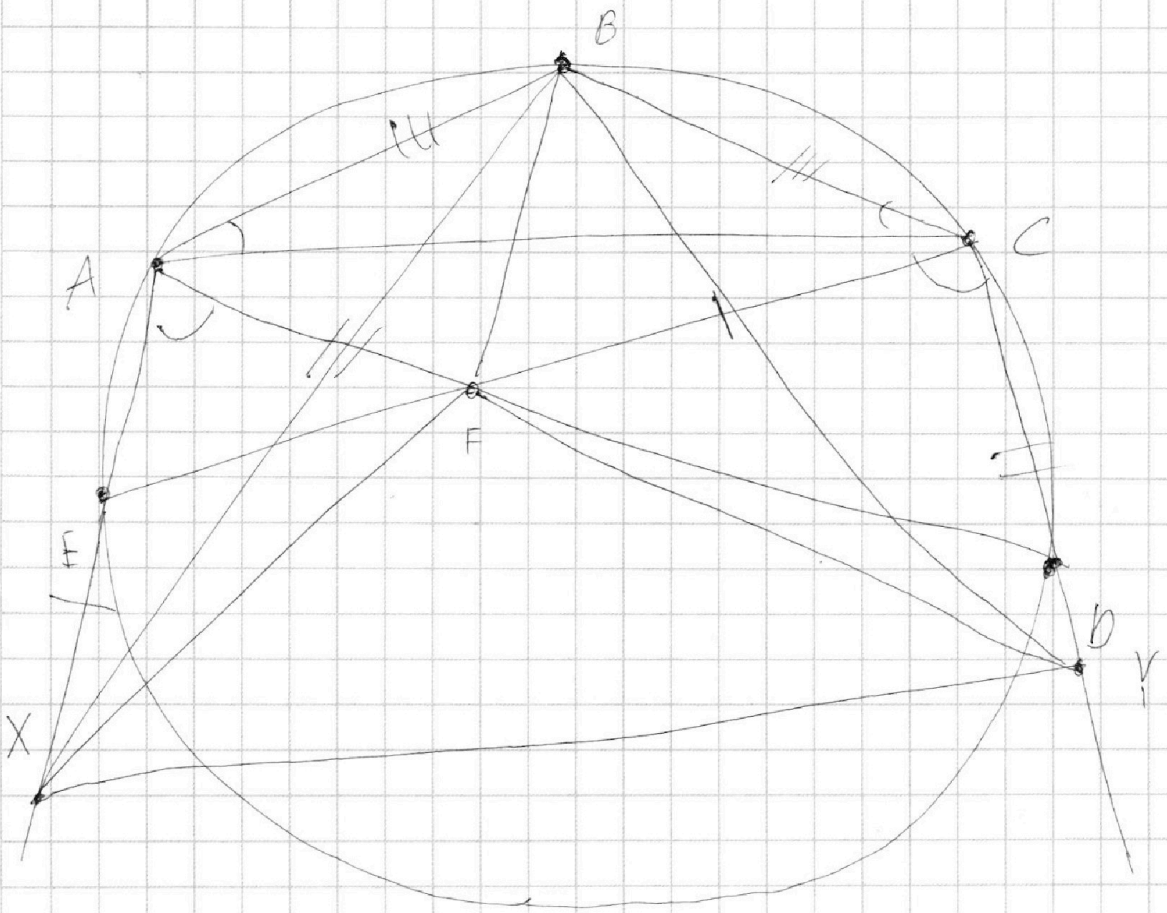
$S_{BFXY} = ?$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$BF = 17$, $XY = 31$.

$AX = CF$

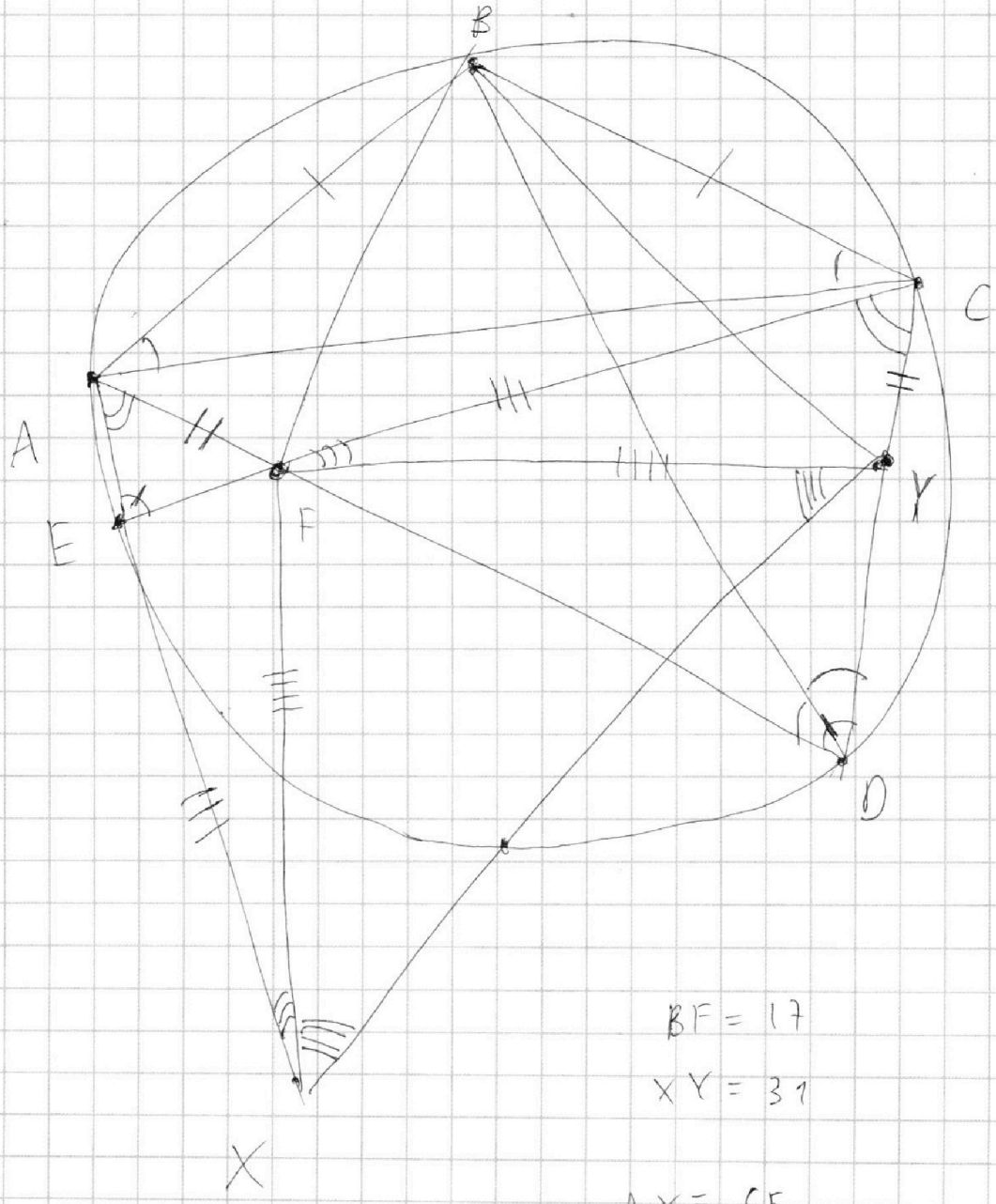
$CY = AF$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$BF = 17$

$XY = 31$

$AX = CF$

$CY = AF$

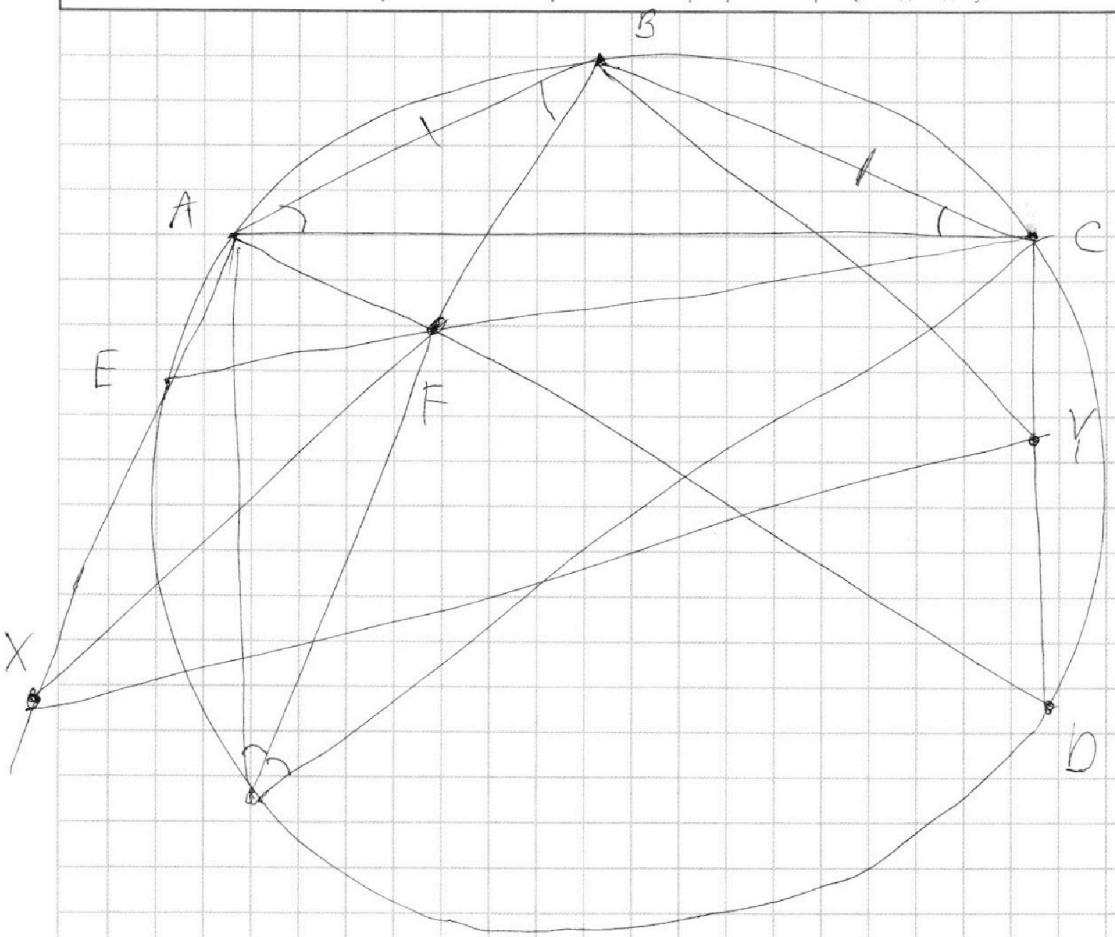
$S_{BFXY} = ?$

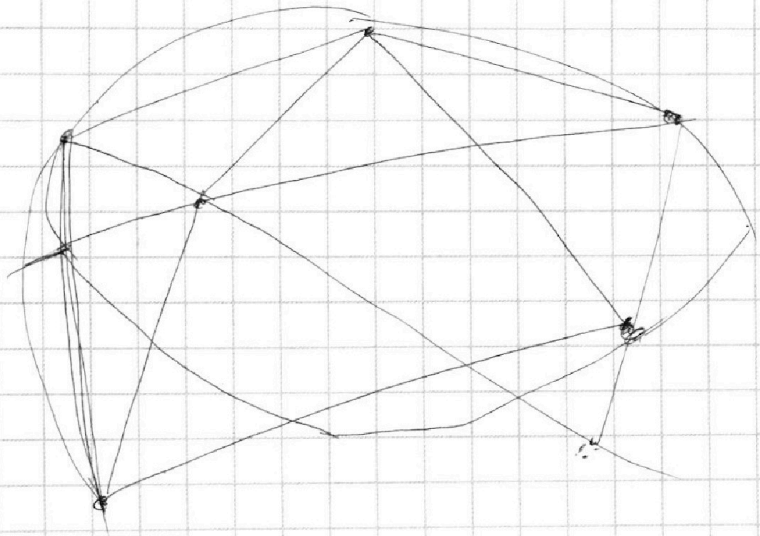
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$|x^3+4| + |x^2-1| = |x^3-x^2+5|$$

$$\begin{cases} x^3+4 \geq 0 \\ x^2-1 \leq 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x^3 \geq -4 \\ x^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \sqrt[3]{-4} \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad x \in [-1;1]$$

$$\begin{cases} x^3+4 \leq 0 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^3 \leq -4 \\ x^2 \geq 1. \end{cases} \quad f = -x^2+1$$

$$|a|+|b| \geq |a+b|$$

$$\begin{cases} x \leq \sqrt[3]{-4} \\ x \in (-\infty;-1] \cup [1;\infty) \end{cases}$$

$$x \leq \sqrt[3]{-4}$$

$$0 + (\sqrt[3]{-4})^2 - 1 = |1 - (\sqrt[3]{-4})^2|$$

$$(\sqrt[3]{-4})^2 = (\sqrt[3]{4})^2.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x^3(y-2) - x(13y-22) + 44y - 44 = 0$

$x^3(y-2) - 13(y-2) - x + 44y - 44 = 0$

$|x^3+4| + |x^2-1| \le |x^3 - x^2 + 5|$

$x^3 + 4 \ge x^3 - x^2 + 5$

$x^3 + 4 - x^2 + 1 \le x^3 - x^2 + 5$

$x^3 + 4 = 0 \quad x = \sqrt[3]{-4}$

$x^2 - 1 = 0 \quad x = \pm 1$

$x^3 - x^2 + 5 = 0$

$|-5| + |4| \ge |-5+4|$

$|a| + |b| \ge |a+b|$

$|a| + |b| \ge$

$|x^3+4| + |x^2-1| \ge |x^3 + x^2 + 3|$

$|a| + |-b| \ge |a-b|$

$-b = x^2 - 1$

$|a| + |-b| \le |a+b|$

$|x^3+4| + |x^2-1| \le |x^3 + 4 - x^2 + 1|$

$|a| + |b| \vee |a-b|$

1) $a+b \vee a-b$

2) $a-b \vee |a-b|$

3) $-a-b \vee$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c геом. прог. q – знаменатель

$b = aq$, $c = aq^2$

$НОК = 2^{150} 3^{300}$.

$abc = a^3 q^3 = 2^{150} 3^{300}$.

$aq = 2^{50} 3^{100}$.

если $q \geq 1$, то всего вариантов для q $51 \cdot 101$.

если $q < 1$, то $0 < q \leq 1$, то их $51 \cdot 101$.

$2 \cdot 51 \cdot 101 - 1$.

$102 \cdot 101 - 1$

$$\begin{array}{r} \times 102 \\ 101 \\ \hline 102 \\ + \quad 102 \\ \hline 10302 \end{array}$$

$-\frac{23}{24} x_0 = -3x_0 - x_0^5$

$-\frac{1}{24} x_0 = -x_0^5$

$\frac{1}{24} = x_0^4$

$x_0 = \sqrt[4]{\frac{1}{24}} =$

$= \frac{1}{\sqrt[4]{24}} =$

$y_0 = -\frac{3}{\sqrt[4]{24}}$

$\sqrt{x_0^2 + y_0^2} =$

$= \sqrt{\frac{1}{\sqrt{24}} + \frac{9}{\sqrt{24}}} =$

$= \sqrt{\frac{10}{\sqrt{24}}} \cdot \sqrt{2} =$

$=$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$-x^2+14x-50=0$ $\quad D=196-200=$

$\Rightarrow 4$

$x^2(y-2)-x(13y-27)+44y-94=0$

$x^2y-2x-13xy+27x+44y-94=0$

$x^2y+25x-13xy-94=0.$ $\quad y=0.$

$-2x^2$

$x(xy+25-13y)-94=0.$

$x(xy+25-13y)=94=47\cdot 2=94\cdot 1$

1) $x=47$ $\quad 47y+25-13y=2$

$34y+25=2$

~~2~~ нет решений.

2) $x=-47$ $\quad -47y+25-13y=-2$

$-60y+25=2$

Нет решений.

3) $x=2$ $\quad 2y-13y+25=47$

$-11y=22$

$y=-2$

$(2;-2)$

4) $x=-2$ $\quad -15y+25=-47$

$-15y=-72$

$15y=72$ $\quad y=\frac{72}{15}$

нет решений.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$f(x) = x^5 + ax$

$f(-x) = -x^5 - ax = -f(x)$

– функция нечётная

$x_0 = -\frac{1}{3}x_1$ $\qquad x_1 = -3x_0$

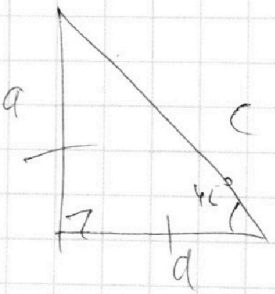
$$\begin{cases} ax_0 + x_0^5 = -3x_0 \\ ax_1 + x_1^5 = \frac{1}{81}x_1 - x_0 \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{40}{\sqrt{24}}} = \sqrt{\frac{20}{\sqrt{6}}} = \sqrt{\frac{20\sqrt{6}}{6}} =$$

$=$

$$\begin{cases} ax_0 + x_0^5 = -3x_0 \\ -3ax_0 - 243x_0^5 = -x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax_0 + x_0^5 = -3x_0 \\ 3ax_0 + 243x_0^5 = x_0 \end{cases}$$



$a = c \sin 45^\circ =$

$=$

$a^2 + a^2 = c^2 = 2a^2$

$a = \frac{c}{\sqrt{2}}$ $\qquad c = \sqrt{2}a$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Все лежат $y = x^5 + ax$

Первая фигура лежит на $y = 3x$

Значит, вторая $y = \frac{1}{3}x$

$x_0 = \frac{1}{3}x_1$ $\quad x_1 = 3x_0$

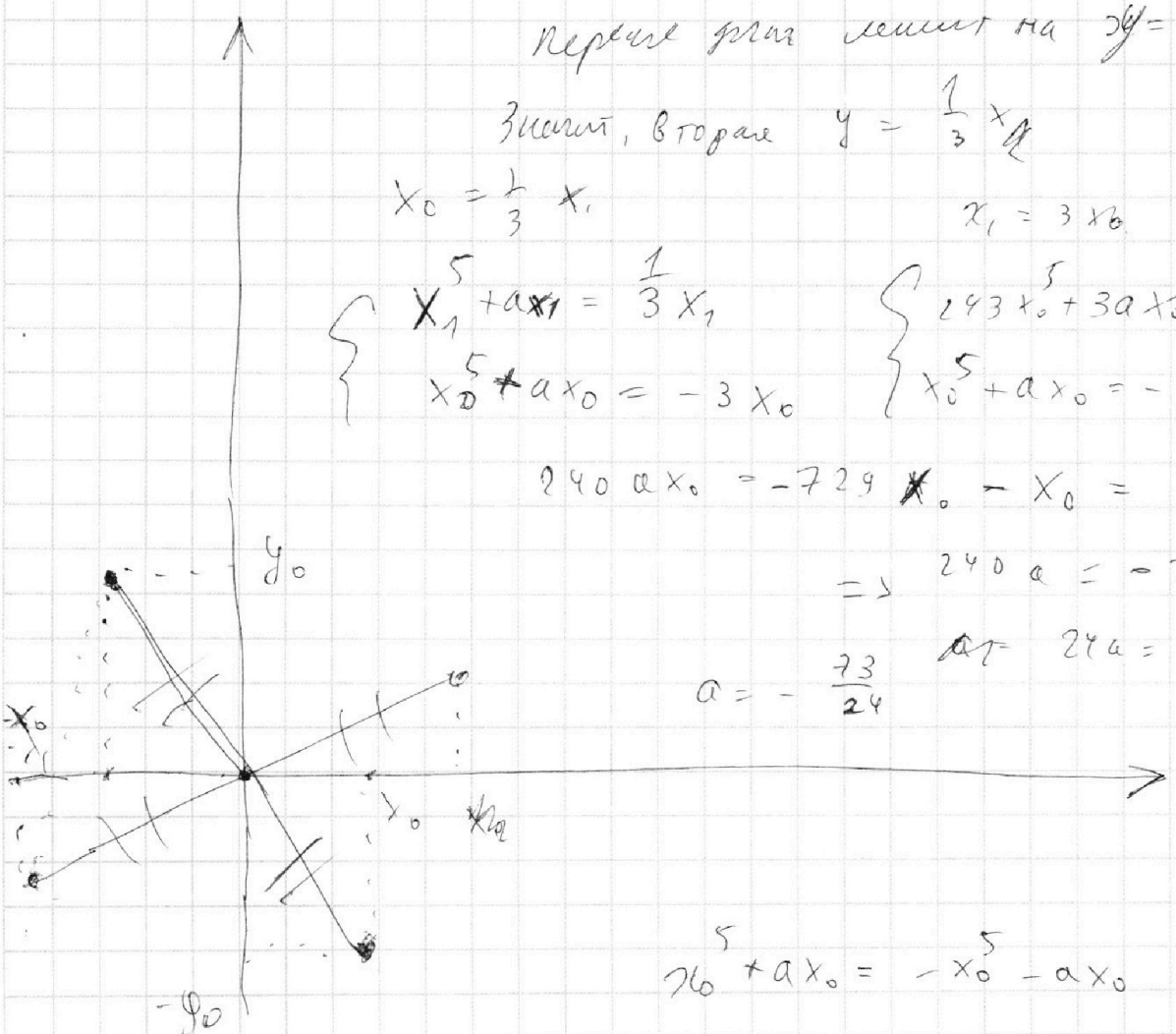
$$\begin{cases} x_1^5 + ax_1 = \frac{1}{3}x_1 \\ x_0^5 + ax_0 = -3x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 243x_0^5 + 3ax_0 = x_0 \\ x_0^5 + ax_0 = -3x_0 \end{cases}$$

$240ax_0 = -729x_0 - x_0 =$

$\Rightarrow 240a = -730$

$24a = -73$

$a = -\frac{73}{24}$



$x_0^5 + ax_0 = -x_0^5 - ax_0$

$y_0 = -3x_0$

$\sqrt{(y_0^2 + x_0^2)} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

$y_0^2 = (x_0^5 + ax_0)^2 \qquad y_1^2 = (x_1^5 + ax_1)^2$

$(x_0^5 + ax_0)^2 + x_0^2 = x_1^2 + (x_1^5 + ax_1)^2$

$10x_0^2 = x_1^2 + \frac{1}{9}x_1^2 = \frac{10}{9}x_1^2 \qquad x_0^2 = \frac{1}{9}x_1^2$

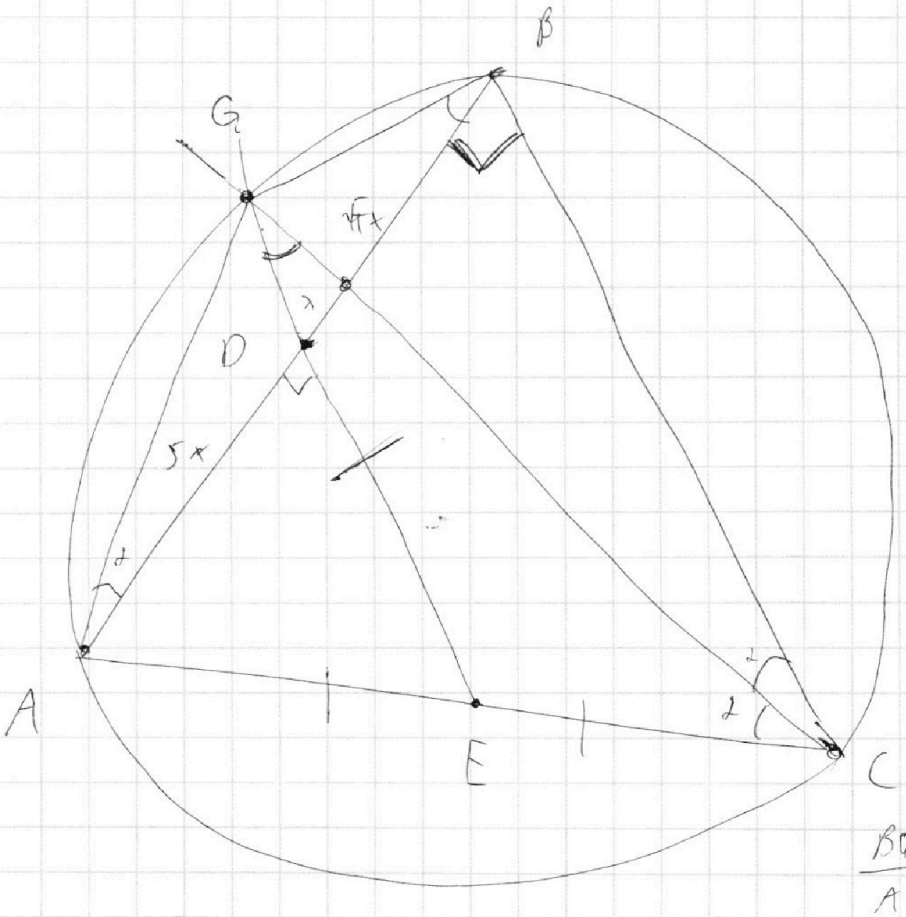
$x_0 = \frac{1}{3}x_1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{BF}{AF} = \frac{AC}{AC} =$

$= \frac{2}{3} =$

$= \sin \angle BCA.$

$S_{BCF} = 16 S_{DGF}$

$\angle AGC = 90°$

$\angle AGF = 90° - \alpha$

$S_{BCF} = \frac{BF \cdot CF}{2}$ $\quad S_{DGF} = \frac{DF \cdot GF}{2}$

$\angle BCA = \arcsin \frac{2}{3}.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

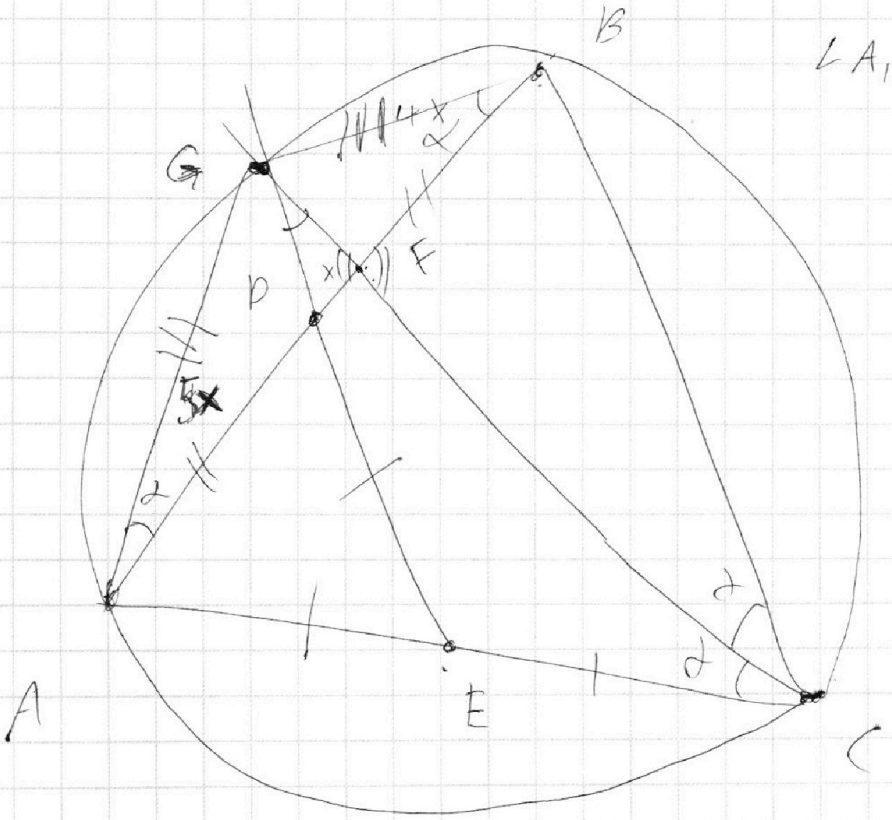
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$-2x^2 + 27x - 91 = 0$.

$D = 729 - 728 \cdot 4 > 0$.



$\angle A, B, C = ?$

$\frac{AC}{BC} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$S_{BCF} = 16 S_{DGF}$

$\triangle GFD \sim \triangle CFB \quad k = \frac{1}{4}$

$\frac{DF}{BF} = \frac{DG}{BC} = \frac{GF}{CF} = \frac{1}{4}$

$GF \cdot CF = AF \cdot BF$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5) $x = 7$

$y - 13y + 25 = 94$

$-12y = 69$ нет решений.

6) $x = -7$

$-y - 13y + 25 = -94$

$-14y = -119$ нет решений.

7) $x = 94$

$94y - 13y + 25 = 7$

$81y = -24$ нет решений.

$x^2y - 2x^2 - 13xy + 27x + 44y - 94 = 0$

$x(xy - 2x - 13y + 27) = 94 - 44y$

$x^2(y-2) - 13x(y-2) + x + 44y - 94 = 0$

$(y-2)(x^2 - 13x) + x + 44y - 94 = 0$

$x(y-2)(x-13) + x$

если $y : 2$, то $13y - 27 \vdots 2$

$\Rightarrow D \vdots 2$.

$-7y^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x^2(y-2) + x(13y-27) + 44y - 94 = 0$

$D = (13y-27)^2 - 4(y-2)(44y-94) =$

$= 169y^2 - 26 \cdot 27 \cdot y + 729 - 4(44y^2 - 94y - 88y + 188) =$ $-7 \cdot 16 + 104 - 23 =$

$=$

$= -7y^2 - 702y + 729 + 376y + 352y - 752 = -7y^2 + 26y - 23$ $-28 + 52 - 23 =$

$= 1.$

$-7y^2 + 26y - 23$ – полный квадрат.

$\frac{13y - 27 \pm \sqrt{D}}{2}$ – целое число.

Если $y \vdots 2$, тогда $D = b^2$, где $b \vdots 2$.

D – чётный.

$-7y^2 - 23$ – чётное число $26y$ – тоже чётное

$2 - 2 = 0.$

$-7 \cdot 25 - 23 =$ и $-7y^2 + 26y - 23 \vdots 4.$

$= -175 - 27$ $7y^2 - 23 \vdots 4$

$y^2 + 1 \vdots 4$

$1^2 \equiv 1$ $= 98$ $23 \equiv 3.$

$y^2 \not\equiv 3.$

$3^2 \equiv 1$ $-7 \cdot 44$ $-23 \equiv 1$

$-343 - 23 =$ $7 \equiv 3$

$-7 \equiv 1$

$= 366$