



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{300}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 2) - x(13y - 27) + 44y - 94 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 16 раз больше площади треугольника DGF .
5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a , b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXYF$, если $BF = 17$, $XY = 31$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тему второе уравнение:

$$\begin{cases} x^3 + 4 \leq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \sqrt[3]{-4} \\ x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty) \end{cases}$$
$$\Rightarrow x \in (-\infty; \sqrt[3]{-4}]$$

Остапо съ отвръщато решението махим.

$$x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4}] \cup [-1; 1]$$

Отвръщато: $(-\infty; -\sqrt[3]{4}] \cup [-1; 1])$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|$$

~~Задача~~ Воспользуемся известным неравенством:

$|a| + |b| \geq |a+b|$. из него следует неравенство
 $|a| + |b| \geq |a-b|$

Попробуем $a = x^3 + 4$, $b = x^2 - 1$.

$$|a-b| = |x^3 + 4 - x^2 + 1| = |x^3 - x^2 + 5|$$

$$\text{т.о. } |x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|$$

$$\text{а по условию } |x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|$$

значит, выполняется р-б.

$$|(x^3 + 4) + (x^2 - 1)| = |x^3 - x^2 + 5|$$

таким образом $|a| + |b| = |a-b|$. Давайте рассмотрим
на знакоа а и б. если $a > 0$ и $b > 0$, то $|a| + |b| >$

$|a-b|$. Если $a < 0$ и $b < 0$, то $|a| + |b| > |a-b|$

и т.д. Покажем, что если a и b разных знаков, то

то выполняется такое же условие, либо $a \geq 0$, $b \leq 0$, либо

$b \geq 0$, $a \leq 0$. Рассмотрим эти случаи и решим их

$$\left\{ \begin{array}{l} x^3 + 4 \geq 0 \\ x^2 - 1 \leq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq \sqrt[3]{-4} \\ x \in [-1, 1] \end{array} \right. \Rightarrow x \in [-1, 1]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c образуют прогрессию. a - начальник
прогрессии

$$R = aq, C = aq^2$$

$$abc = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

и если $abc = a^3 q^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$
значит, $aq = 2^{\frac{50}{3}} \cdot 3^{\frac{100}{3}}$ и это показывает, что прогрессия
однократно делится числом q , т.к. $a = \frac{2^{\frac{50}{3}} \cdot 3^{\frac{100}{3}}}{q}$.

Всего вариантов для q :

1) если $q \geq 1$, то $51 \cdot 107$, т.к. q - может быть
любым делителем числа $2^{\frac{50}{3}} \cdot 3^{\frac{100}{3}}$, а таких есть
 $51 \cdot 107$.

2) если $0 < q \leq 1$, то тоже $51 \cdot 107$ ~~поменять~~, т.к.

в случае, где $q \geq 1$, мы получим $51 \cdot 107$ пройку
(a, b, c), если $q \leq 1$, мы получим $51 \cdot 107$ пройку,
которое будет иметь вид (b, a, c) . (просто они идут в
противоположном порядке)

Одну пройку мы исключим дважды. Это значит,
когда $q=1$. Он был исключен в обоих случаях. Но это
из ответа надо вычесть 1. То есть всего таких троек

$$\boxed{2 \cdot 51 \cdot 107 - 1} = \boxed{10301}$$

Ответ: $\cancel{2 \cdot 51 \cdot 107 - 1}^{10301}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$\Delta = (13y-27)^2 - 4(y-2)(44y-94) =$$

$$= 169y^2 - 26 \cdot 27y + 729 - 4(44y^2 - 94y - 88y + 188) =$$

$$= -7y^2 - 702y + 729 + 376y + 352y = -7y^2 + 26y - 23$$

Дискриминант должен быть не меньше 0 и при
этом еще в полном квадрате. Иначе некому.

И при довольно больших y , дискриминант становится

отрицательным и тем самым рассасывается р.к. В этом

случае дискриминант меньше 0.

При $y=1$ $\Delta = -7 + 26 - 23 = -4$ не получится

При $y=2$: $\Delta = -28 + 52 - 23 = 1$

$$x = \frac{13y-27+1}{2(y-2)} = \frac{26-27+1}{2} \leftarrow \text{ка } 0$$

$$x = \frac{13y-27-1}{2} = \frac{2}{2} = -1 \quad \text{дешт} \\ \text{меньш.}$$

Но это же не получится.

При $y=3$: $\Delta = -7 \cdot 9 + 78 - 23 = -8$ не получится.

При $y=4$: $\Delta = -7 \cdot 16 + 104 - 23 = -31$ не получится.

Покажем, что решением является $y=5$ бессложно, т.к.

Δ уменьшается, при $y \geq 5$ он тоже будет меньше 0.

Однако предыдущий случай $y=2$ еще раз.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

подставим $y=2$ в ур-ие:

$$x + 8y - 9y = 0$$

$$x = 6$$

$$\boxed{y = 2; x = 6}$$

Ещё раз с друзьями у меня разобралась и при
чём $D < 0$, значит, есть корней.

Поэтому $x = 6; y = 2$ - единственное ре-
шение.

Ответ: $x = 6; y = 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\angle GAB = \angle BCG = 2^\circ$, т.к. они опираются на одну дугу.

$\Rightarrow \angle GDA = \angle ADE = 90^\circ$, а $\angle ADE = \angle ABC$ — как соответствующие при $BC \parallel DE$ и секущий AB .

$\angle ABC$ — прямой угол. $\triangle GDF$ тоже прямоугольный.

$\triangle GDF \sim \triangle CBF$ по двум углам: $\angle EGC = \angle BCG$ и

$$\text{и } \angle GFD = \angle BFC \Rightarrow \frac{GF}{CF} = \frac{DF}{BF} = \frac{GD}{BC} = k$$

$$\text{и } \frac{S_{GDF}}{S_{CBF}} = k^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow k = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{DF}{BF} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Запишем } \frac{AF}{BF} \frac{BF}{AF} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{BF}{AF} = \frac{BC}{AC} \text{ — свойство биссектрисы} \quad \frac{BC}{AC} = \frac{2}{3} = \cos \angle BCA$$

$$\Rightarrow \underbrace{\angle BCA = \arccos \frac{2}{3}}, \quad \underbrace{\angle ABC = 90^\circ}, \quad \underbrace{\angle BAC = 90^\circ - \arccos \frac{2}{3}}$$

$$-\arccos \frac{2}{3}$$

$$\text{Ответ: } 90^\circ; \arccos \frac{2}{3}; 90^\circ - \arccos \frac{2}{3}.$$

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!Дано: $\triangle ABC$ CF - биссектриса

$AD = BD$

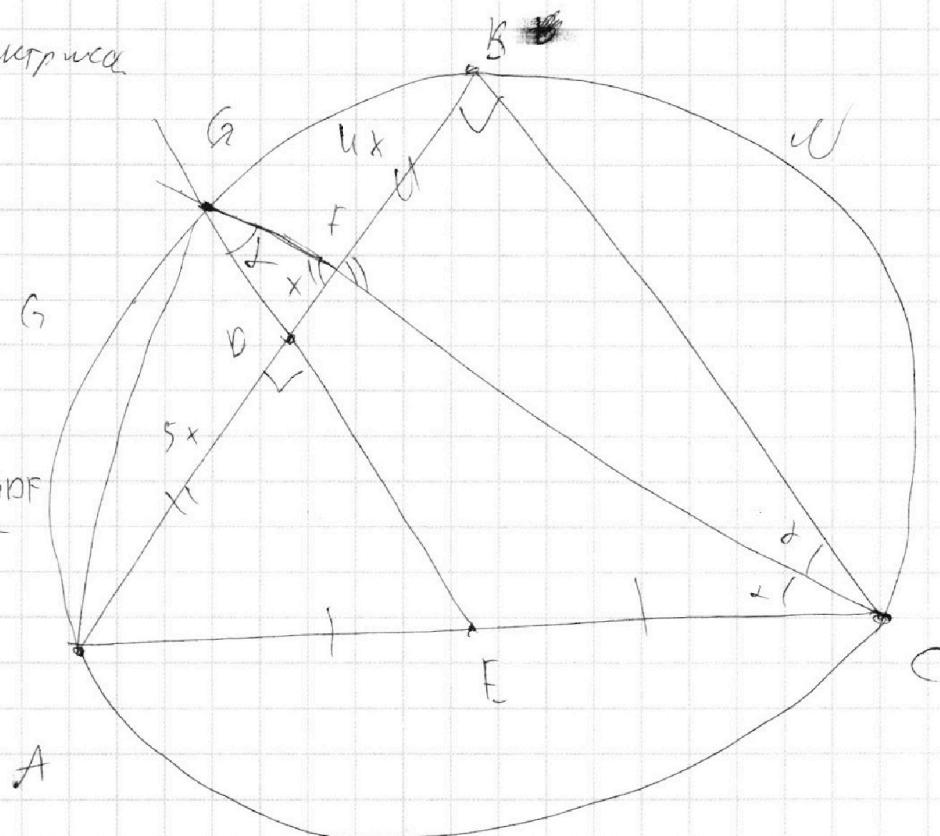
$AE = CE$

$CF \cap ED = G$

$G \in W$

$S_{BCF} = 16 S_{BPF}$

Найти:

угол D $\angle ABC$.

Решение:

$\angle BCG = \angle GCA = 2x$. CF - биссектриса

 DE - среднее линии $\Rightarrow DE \parallel BC$, а значит, $\angle CGE = \angle BCG$ $\angle BCG$ - как известно меньше при $BC \parallel DE$, следовательно $\angle CGE < 2x$.

$\triangle CGE$ - р/б, т.к. $\angle EGC = \angle GCE = 2x \Rightarrow GE = CE = AE$.

Значит, GE - медиана $\triangle AGC$ и она равнаполовине стороны, к которой проведена. Значит, $\triangle AGC$ - прямой-тупоокий,

$\angle AGC = 90^\circ$, $\angle AGE = 90^\circ - 2x$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$240ax_0 = -730x_0$$

$$\Rightarrow 240a = -730 \Rightarrow a = -\frac{73}{24}$$

Если в здравии $x_0 = -\frac{1}{3}x_1$, то получится абсолютно
такая же система. Значит, $a = -\frac{73}{24}$

Теперь найдем сторону квадрата.

Для этого решим x_0 : $ax_0 + x_0^5 = -3x_0$

$$-\frac{73}{24}x_0 + x_0^4 = -3$$

$$x_0^4 = \frac{1}{24} \quad x_0 = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{24}}$$

$x_0 = \sqrt[4]{\frac{1}{24}}$, т.к. будем воспользоваться его, как расстоя-

нием. Далее умножаем на x_0 :

$$2\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{24}} + \frac{9}{\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10}{\sqrt{24}}} = \sqrt{\frac{20}{\sqrt{6}}}$$

Сторона квадрата равна: $\sqrt{\frac{20}{\sqrt{6}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{20}{\sqrt{6}}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$

$$= \sqrt{\frac{20}{\sqrt{6}}} = \sqrt{\frac{10\sqrt{6}}{6}} = \sqrt{\frac{5\sqrt{6}}{3}}$$

Ответ: $-\frac{73}{24}; \sqrt{\frac{5\sqrt{6}}{3}}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = x^5 + ax \quad f(-x) = -x^5 - ax = -(x^5 + ax) =$$

$= -f(x)$. Значит, $ax + x^5$ — четные члены,

то есть все эти точки (коорд. x_0 и $-x_0$) симметричны
друг другу относительно начала координат.

Угол между некоторыми в начале координат и поэтому
его вершины симметричны друг другу относительно

вершины квадрата, т.к. диагонали в квадрате являются точкой
соседние пересечения сторонами. Поэтому если где-нибудь

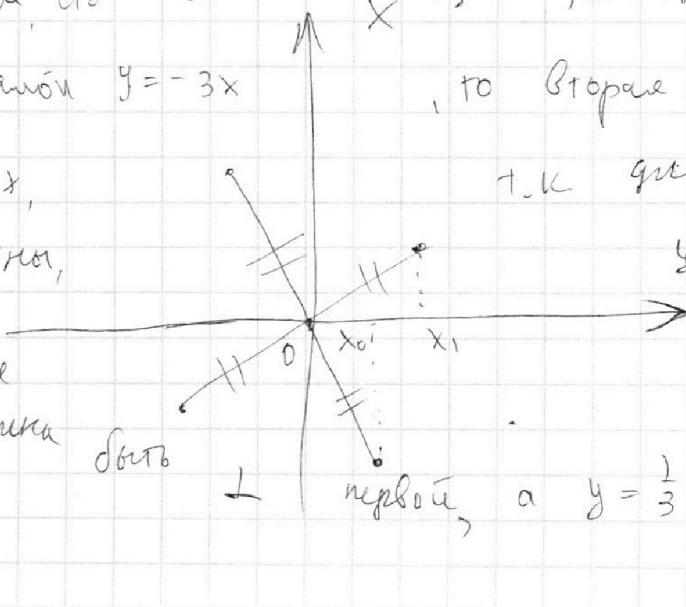
вершина квадрата лежит на прямой $f(x) = x^5 + ax$, то

группе из двух вершин тоже на ней лежат, только сам

x этих вершин не такой, что стороны квадрата параллельны
оси координат

Понимаем, что если одна диагональ квадрата
лежит на прямой $y = -3x$, то вторая лежит на
прямой $y = \frac{1}{3}x$,

то есть второе
пересечение горизонтально
состоит из точек (x_0, y_0) и $(-x_0, -y_0)$,
а $y_0 = \frac{1}{3}x_0$ и $-y_0 = -3x_0$.





- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Возьмём где вершины квадрата (не имеющие ка буквой
записки). Пусть у них координаты по ОХ x_0 и x_1 ,
 y_0 , y_1 — их координаты по ОУ:

$$B_0 - \text{первая}, y_0 = dx_0 + x_0^5, y_1 = dx_1 + x_1^5,$$

$$B_1 - \text{Сторонка}, y_0 = -3x_0, y_1 = \frac{1}{3}x_1$$

Поставим одно в другое и решим получившуюся систему:

$$\begin{cases} dx_0 + x_0^5 = -3x_0 \\ dx_1 + x_1^5 = \frac{1}{3}x_1 \end{cases}$$

Еще замечание. Покажем, что
расстояние от ~~точек~~ точек до начала

координатных осей, т.е. диагонали квадрата равны и делятся
такими же склонами, потому что $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$

$$x_1^2 + y_1^2 = x_0^2 + y_0^2 \quad y_1 = \frac{1}{3}x_1 \rightarrow y_1^2 = \frac{1}{9}x_1^2$$

$$y_0 = -3x_0 \Rightarrow y_0^2 = 9x_0^2 \quad \text{Значит, } \frac{10}{9}x_1^2 = 10x_0^2$$

$$\frac{1}{9}x_1^2 = x_0^2 \quad \underbrace{\frac{1}{3}x_1 = x_0}_{\text{также как и } x_0 = -\frac{1}{3}x_1}$$

Саму же линию $y_0 = -3x_0$, такая форма для него называется
расщеплением | Возвращение к системе:

$$\begin{cases} dx_0 + x_0^5 = -3x_0 \\ 3dx_0 + 243x_0^5 = x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 243dx_0 + 243x_0^5 = -729x_0 \\ 3dx_0 + 243x_0^5 = x_0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

Перенесем в более удобном

виде:

$$\begin{cases} a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} \Rightarrow a - b = \frac{5}{c} - \frac{5}{b} = \frac{5(b-c)}{bc} \quad (1) \\ b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \Rightarrow b - c = \frac{5}{a} - \frac{5}{c} = \frac{5(c-a)}{ac} \quad (2) \\ a + \frac{5}{b} = c + \frac{5}{a} \quad c - a = \frac{5}{b} + \frac{5}{a} = \frac{5(a-b)}{ab} \quad (3) \end{cases}$$

$$\text{Подставим (2) \& (1): } a - b = 5 \cdot \frac{5(c-a)}{ac \cdot bc} = \frac{25(c-a)}{abc^2}$$

$$\text{Подставим (3) \& (1): } a - b = \frac{5 \cdot 25 \cdot (a-b)}{(abc)^2} = \frac{125(a-b)}{(abc)^2}$$

В условии сказано, что среди чисел a, b, c есть хотя бы
один ненулевой. В силу симметрии можно, не
меняя обозначений обобщить сказав, что $a \neq b$.

Тогда $a-b \neq 0$ и мы можем сократить на $a-b$.

$$\frac{125}{(abc)^2} = 1 \quad (abc)^2 = 125 \quad abc = \pm \sqrt{125} = \pm 5\sqrt{5}$$

$-5\sqrt{5} < 5\sqrt{5} \Rightarrow -5\sqrt{5}$ это наименьшее

значение abc .

Ответ: $-5\sqrt{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

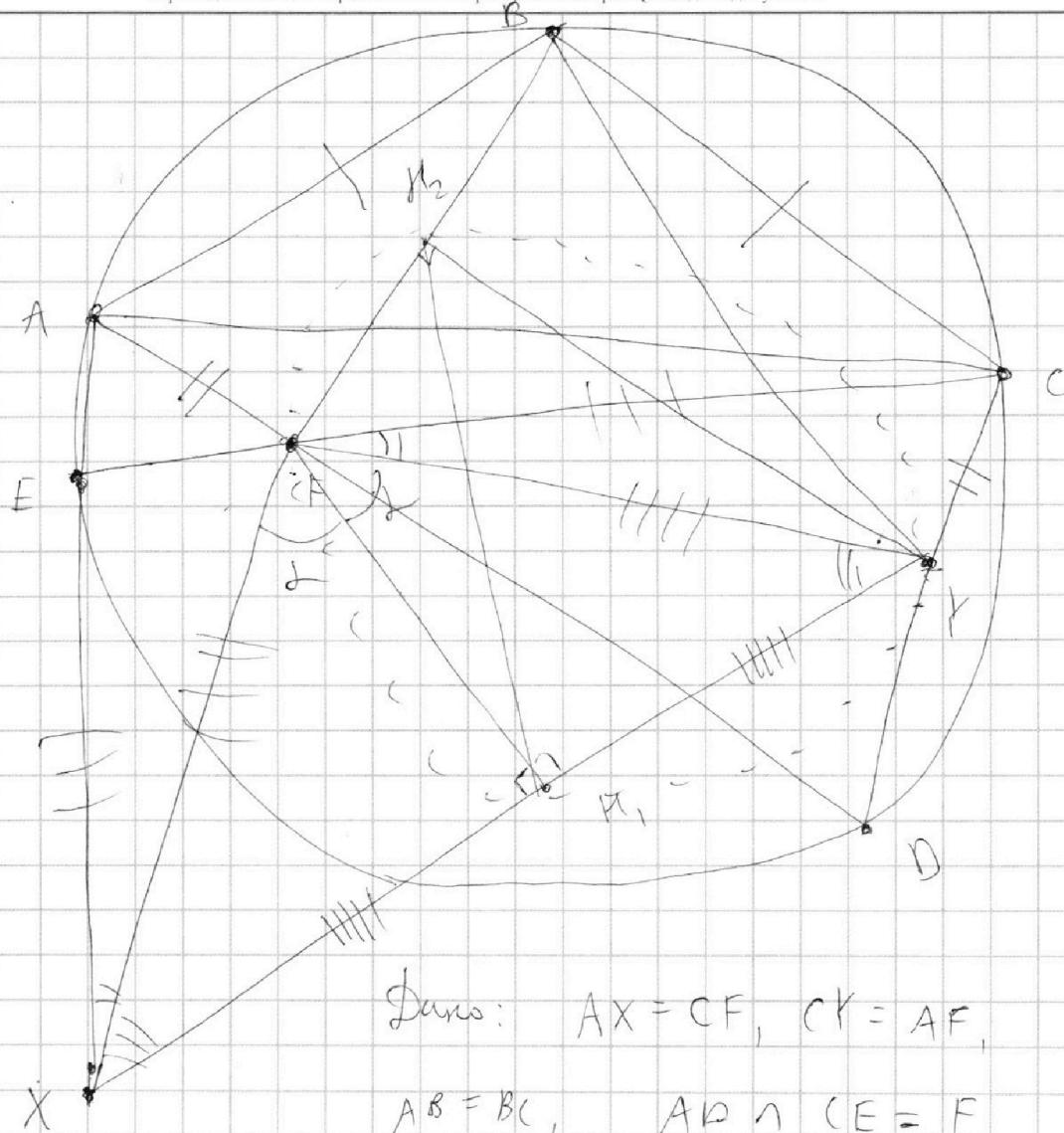
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Опустим высоту FH_1 на XK и FH_2 на BF .

$$S_{BFXY} = S_{BFY} + S_{XYF} = \frac{1}{2} XY \cdot FH_1 + \frac{1}{2} BF \cdot FH_2 = \\ = \frac{1}{2} (XY \cdot FH_1 + BF \cdot FH_2)$$

$$\angle FH_1 = \alpha. FH_1, FH_2 - \text{биссектрисы}, \angle XFY = 180^\circ$$

$$FH = \frac{H_1 H_2}{\sin \alpha} - \text{расстояние между}$$

$$FY = \frac{15,5}{\sin \alpha} \quad H_1 H_2 = \frac{1}{2} XY, \text{т.к. } \triangle XFY - \text{равнобедренный}$$

$$FH_1 \text{ и } FH_2 \text{ в этом } \triangle \text{ биссектрисы, и между ними, и}$$
$$FH_1 = \sqrt{XY^2 - FH_1^2} - \text{из теоремы Пи-} \\ \text{тагора.} \quad FH_2 = \sqrt{FY^2 - FH_2^2} = \sqrt{\frac{15,5^2}{\sin^2 \alpha} - 15,5^2} =$$

$$= \sqrt{15,5^2} = 15,5 \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1} = 15,5 \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} =$$

$$= 15,5 \tan \alpha$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

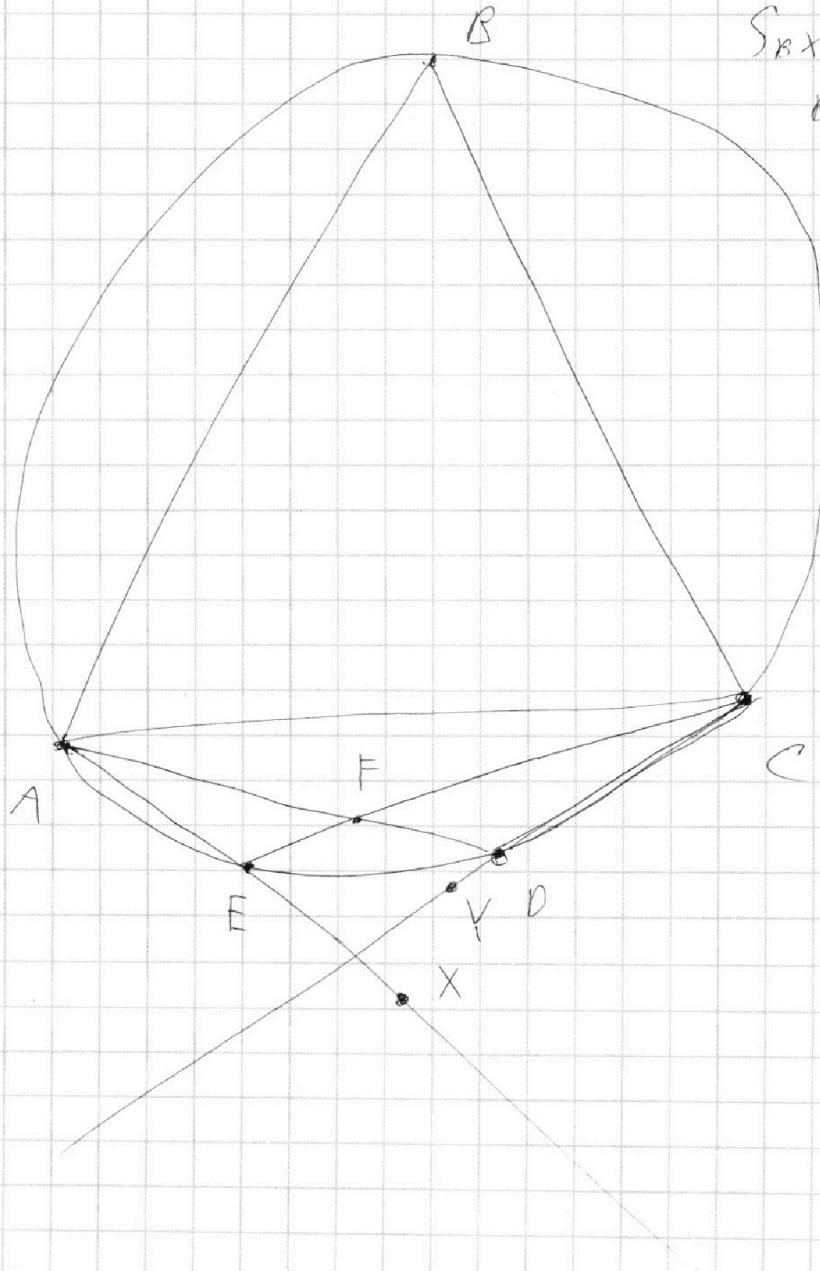
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AB = BC$$

$$S_{BFY} = 9$$

$$BF = 17, XY = 31$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

Найдите: $\min abc = ?$

$$a = b = c \quad \text{какое зал}$$

$$\begin{cases} a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} \\ b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \\ a + \frac{5}{b} = c + \frac{5}{a} \end{cases}$$
$$a - b = \frac{5}{c} - \frac{5}{b} = \frac{5(b - c)}{bc}$$

$$b - c = \frac{5}{a} - \frac{5}{c} = \frac{5(c - a)}{ac}$$

$$a - b = \frac{5 \cdot \frac{5(c-a)}{ac}}{bc} = \frac{25(c-a)}{abc^2}$$

$$c - a = \frac{5}{b} - \frac{5}{a} = \frac{5(a-b)}{ba}$$
$$a - b = \frac{25 \cdot \frac{5(a-b)}{ba}}{abc^2} =$$

$$= \frac{125(a-b)}{a^2b^2c^2} = \frac{125(a-b)}{(abc)^2} = \frac{125}{(abc)^2} = 1.$$

$$(abc)^2 = 125 \Rightarrow abc = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

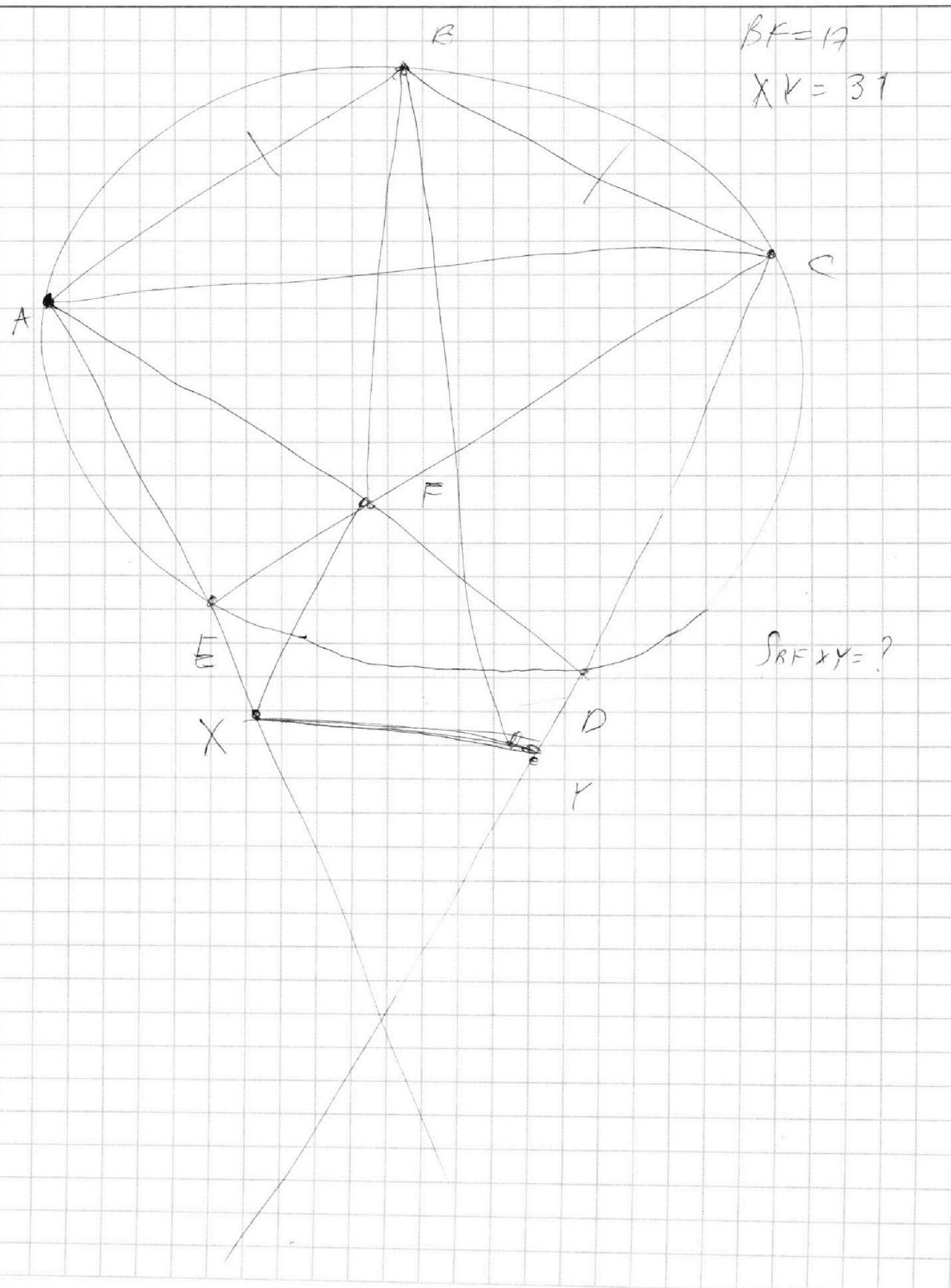
5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





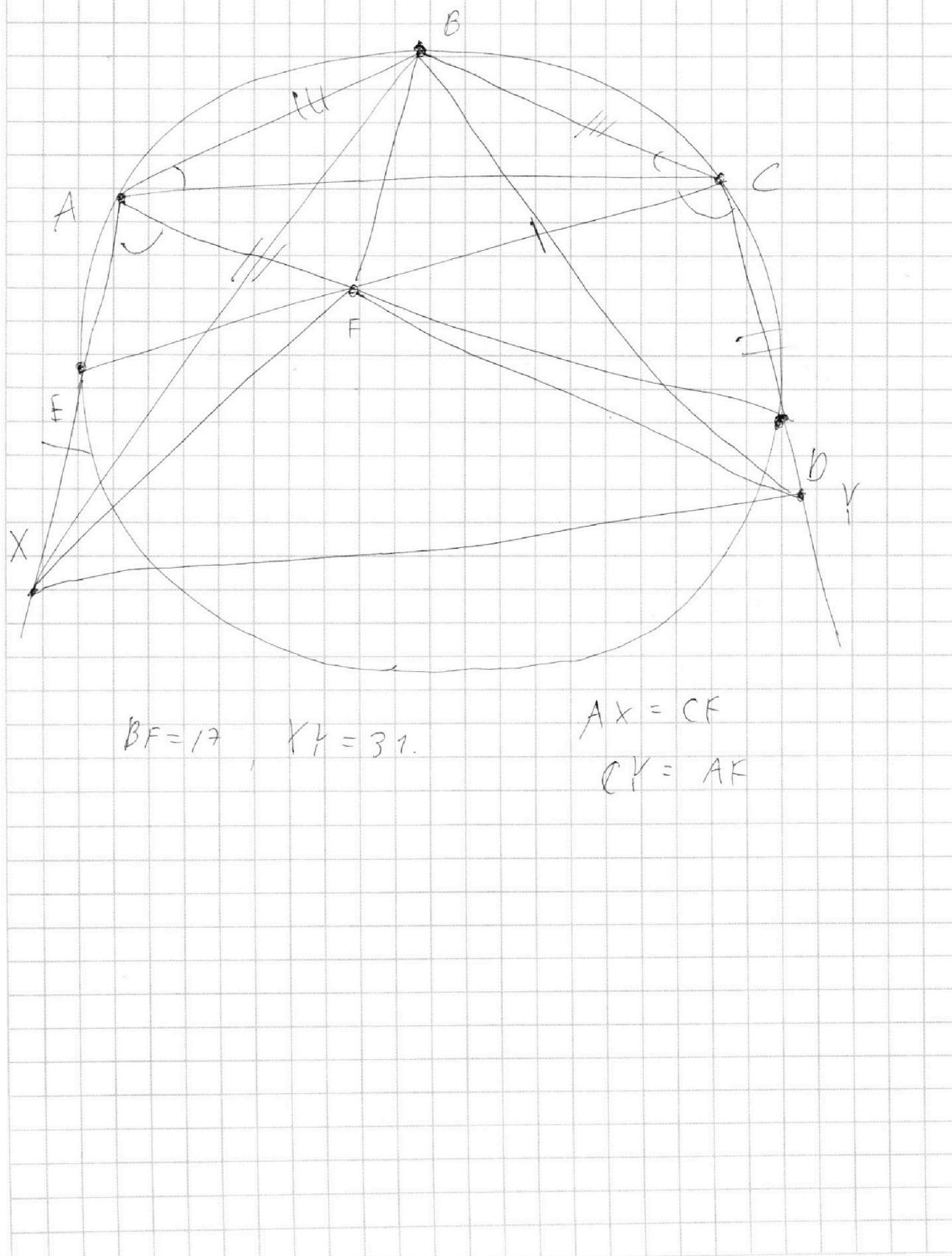
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





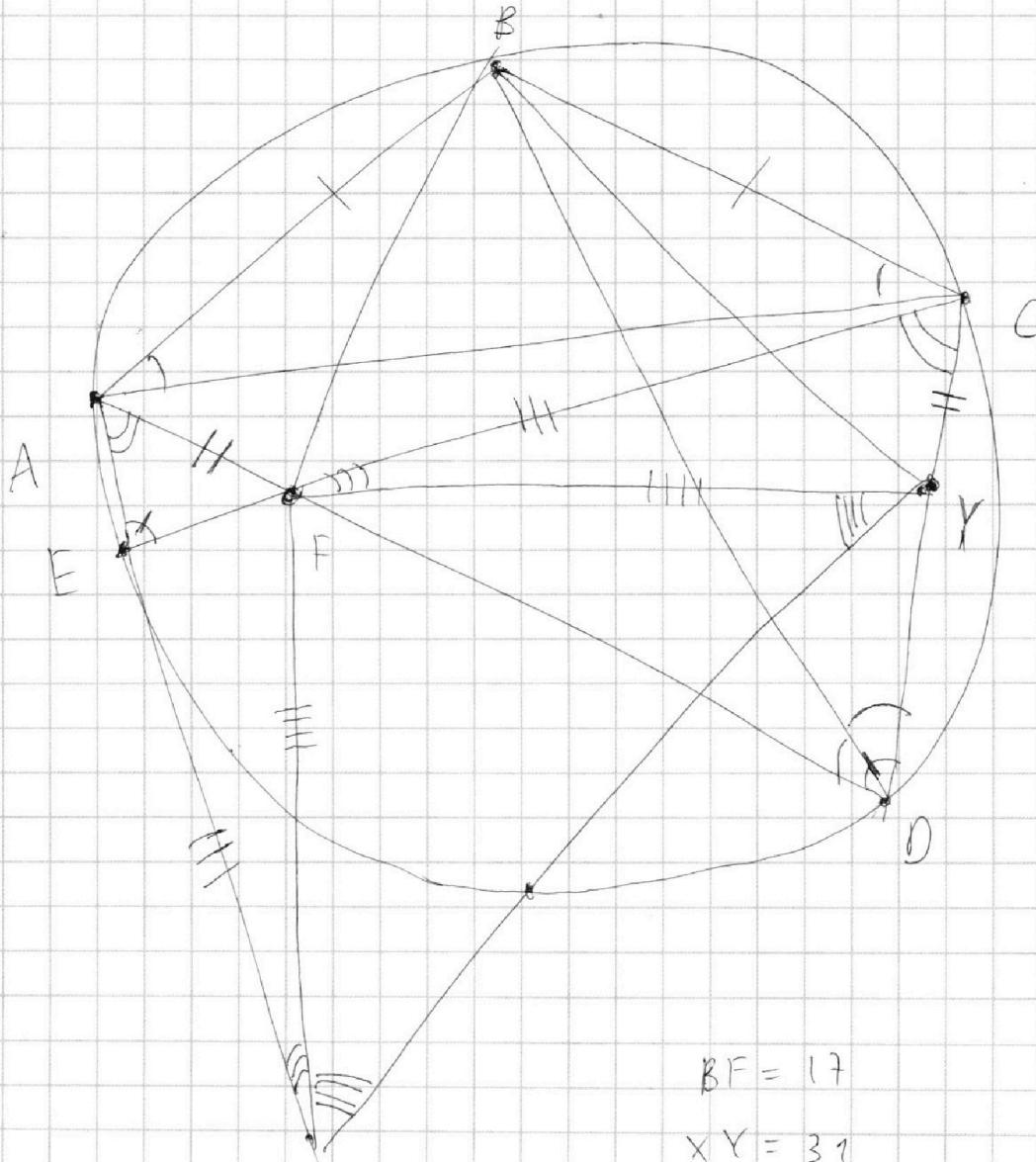
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$BF = 17$$

$$XY = 31$$

$$AX = CF$$

$$CX = AF$$

$$S_{BFX} = ?$$



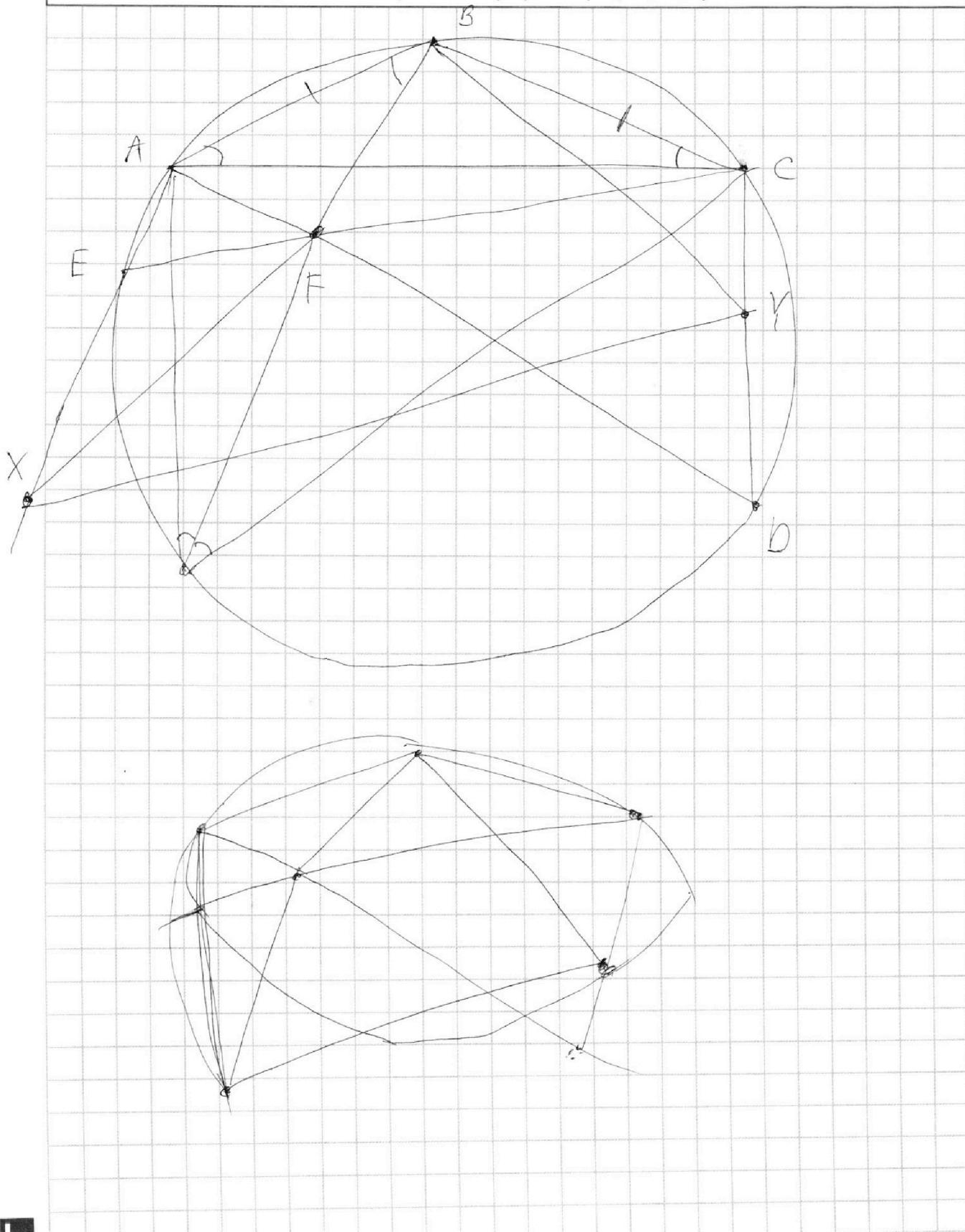
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

 МФТИ





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| = |x^3 - x^2 + 5|$$

$$\begin{cases} x^3 + 4 \geq 0 \\ x^2 - 1 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 \geq x^2 - 4 \\ x^3 < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \sqrt[3]{-4} \\ -1 < x < 1 \end{cases} \quad x \in (-1, 1)$$

$$\begin{cases} x^3 + 4 \leq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 < -4 \\ x^2 \geq 1. \quad f = -x^2 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq \sqrt[3]{-4} \\ x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty) \end{cases} \quad |a| + |b| \geq |a+b|$$

$$x \leq \sqrt[3]{-4}$$

$$0 + (\sqrt[3]{-4})^2 - 1 = 1 - (\sqrt[3]{-4})^2$$

$$(\sqrt[3]{-4})^2 = (\sqrt[3]{4})^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3(y-2) - 2(13y - 27) + 4y^2y - 94 = 0$$

$$x^3(y-2) - 13(y-2) - x + 4y^2y - 94 = 0.$$

$$|x^3+4| + |x^2-1| \leq |x^3 - x^2 + 5|$$

$$x^3 + 4 > x^3 - x^2 + 5$$

$$x^3 + 4 - x^2 + 1 \leq x^3 - x^2 + 5$$

$$\cancel{x^3 + 4} = 0 \quad x^2 = \sqrt[3]{-4}$$

$$x^2 - 1 = 0 \quad x = \pm 1.$$

$$x^3 - x^2 + 5 = 0$$

$$|-5| + |4| \geq |-5 + 4|$$

$$|a| + |b| \geq |a+b|$$

$$|a| + |b| \geq$$

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \geq |x^3 + x^2 + 3|$$

$$|a| + |b| \geq |a-b|$$

$$-b = x^2 - 1$$

$$|a| + |b| \leq |a+b|$$

$$|x^3+4| + |x^2-1| \leq |x^3+4 - x^2 + 1|$$

$$|a| + |b| \vee |a-b|$$

$$1) \quad a+b \vee a-b$$

$$2) \quad a-b \vee |a-b|$$

$$3) \quad -a-b \quad \text{некоректно}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c геом. прог. q - знакоизмен.

$$b = aq, c = aq^2$$
$$150 \quad 300$$
$$ab = 2 \quad 3$$

$$abc = aq^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$$
$$aq = 2^{50} \cdot 3^{100}$$

если $q \geq 1$, то все \sqrt{abc} выражаются в виде

$$q = 51 \cdot 107$$

если $q < 1$, то $0 < q \leq 1$, то иск. $51 \cdot 107$.

$$2 \cdot 51 \cdot 107 = 1$$

$$y_0 = -\frac{3}{\sqrt{24}}$$

$$102 \cdot 101 = 1$$

$$\begin{aligned} & \begin{array}{r} 102 \\ 101 \\ \hline 102 \\ + 102 \\ \hline 10302 \end{array} \quad \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \\ & = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{24}} + \frac{9}{\sqrt{17}}} = \\ & = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{24}}} \cdot \sqrt{2} = \end{aligned}$$

$$-\frac{73}{24} x_0 = -3x_0 - x_0^5$$

$$-\frac{1}{24} x_0 = -x_0^5$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{24} &= x_0^4 & x_0 &= \sqrt[4]{\frac{1}{24}} = \\ & & &= \sqrt[4]{\frac{1}{24}} = \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$-x^2 + 14x - 50 = 0 \quad D = 196 - 200 = \\ = 4 \\ x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0 \\ x^2y - 2x - 13xy + 27x + 44y - 94 = 0 \\ x^2y + 25x - 13xy - 94 = 0, \quad y = 0. \\ x(xy + 25 - 13y) - 94 = 0 \\ x(xy + 25 - 13y) = 94 = 47 \cdot 2 = 94 - 1$$

1) $x = 47 \quad 47y + 25 - 13y = 2$

$$34y + 25 = 2$$

~~2422~~ нет решений.

2) $x = -47 \quad 62y - 47y + 25 - 13y = -2$

$$-60y + 25 = -2$$

. нет решений.

3) $x = 2 \quad 62y - 13y + 25 = 47$

$\boxed{(2, -2)}$

$$-11y = 22$$

$$y = -2$$

4) $x = -2 \quad -15y + 25 = -47$

$$-15y = -72$$

$$15y = 72$$

$$y = \frac{72}{15}$$

нет решений.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = x^5 + ax$$

$$f(-x) = -x^5 - ax = -f(x)$$

- функция нечетная

$$x_0 = -\frac{1}{3}x_1$$

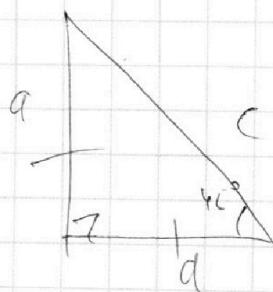
$$x_1 = -3x_0$$

$$\begin{cases} ax_0 + x_0^5 = -3x_0 \\ ax_1 + x_1^5 = \cancel{ax_0} - x_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{40}{\sqrt{6}}} &= \sqrt{\frac{20}{\sqrt{6}}} = \\ &= \sqrt{\frac{20\sqrt{6}}{6}} = \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{cases} ax_0 + x_0^5 = -3x_0 \\ -3ax_0 - 243x_0^5 = -x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax_0 + x_0^5 = -3x_0 \\ 3ax_0 + 243x_0^5 = x_0 \end{cases}$$



$$a = c \sin 45^\circ =$$

=

$$a^2 + a^2 = r^2 = 2a^2$$

$$a = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$c = \sqrt{2}a$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Все линии $y = x^5 + \alpha x$

Первые две линии лежат на $2y = -3x$

Значит, вторая $y = \frac{1}{3}x$

$$x_0 = \frac{1}{3}x_1$$

$$x_1 = 3x_0$$

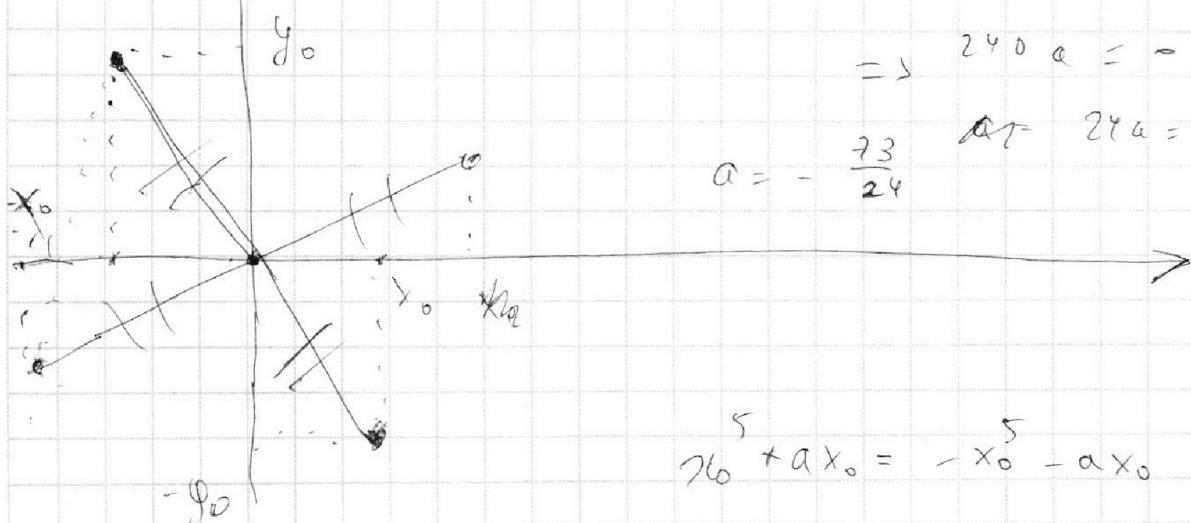
$$\begin{cases} x_1^5 + \alpha x_1 = \frac{1}{3}x_1 \\ x_0^5 + \alpha x_0 = -3x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 243x_0^5 + 3\alpha x_0 = x_0 \\ x_0^5 + \alpha x_0 = -3x_0 \end{cases}$$

$$240\alpha x_0 = -729 \quad x_0 =$$

$$\Rightarrow 240\alpha = -730$$

$$\alpha = -\frac{73}{24} \quad \alpha = -73$$



$$260^5 + \alpha x_0 = -x_0 - \alpha x_0$$

$$y_0 = -3x_0$$

$$\sqrt{(y_0^2 + x_0^2)} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$y_0^2 = (x_0^5 + \alpha x_0)^2 \quad y_1^2 = (x_1^5 + \alpha x_1)^2$$

$$(x_0^5 + \alpha x_0)^2 + x_0^2 = x_1^2 + (x_1^5 + \alpha x_1)^2$$

$$10x_0^2 = x_1^2 + \frac{1}{9}x_1^2 = \frac{10}{9}x_1^2 \quad x_0^2 = \frac{1}{9}x_1^2$$

$$x_0 = \frac{1}{3}x_1$$

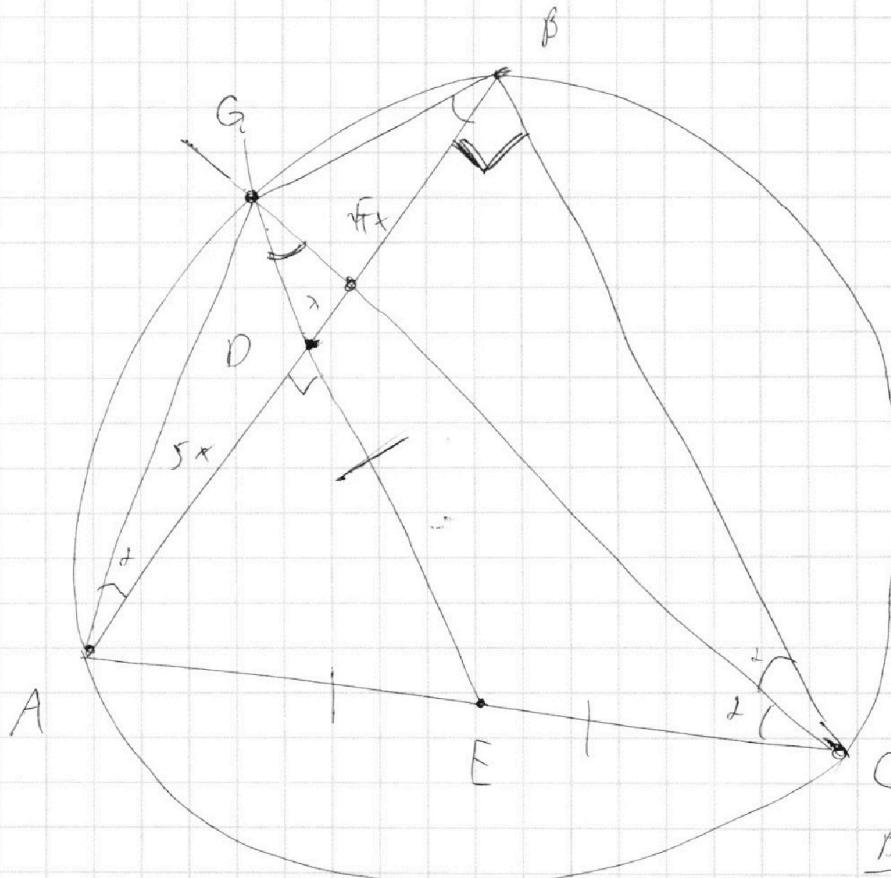
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{BF}{AF} = \frac{AC}{AC} =$$

$$= \frac{2}{3} =$$

$$S_{BCF} = 16 S_{DGF}$$

$$\angle AGC = 90^\circ$$

$$\angle AGE = 90^\circ - \angle \alpha \sin \beta CA.$$

$$S_{BCF} = \frac{BF \cdot CF}{2}$$

$$S_{DGF} = \frac{DF \cdot GF}{2}$$

$$\angle BCA = \arcsin \frac{2}{3}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

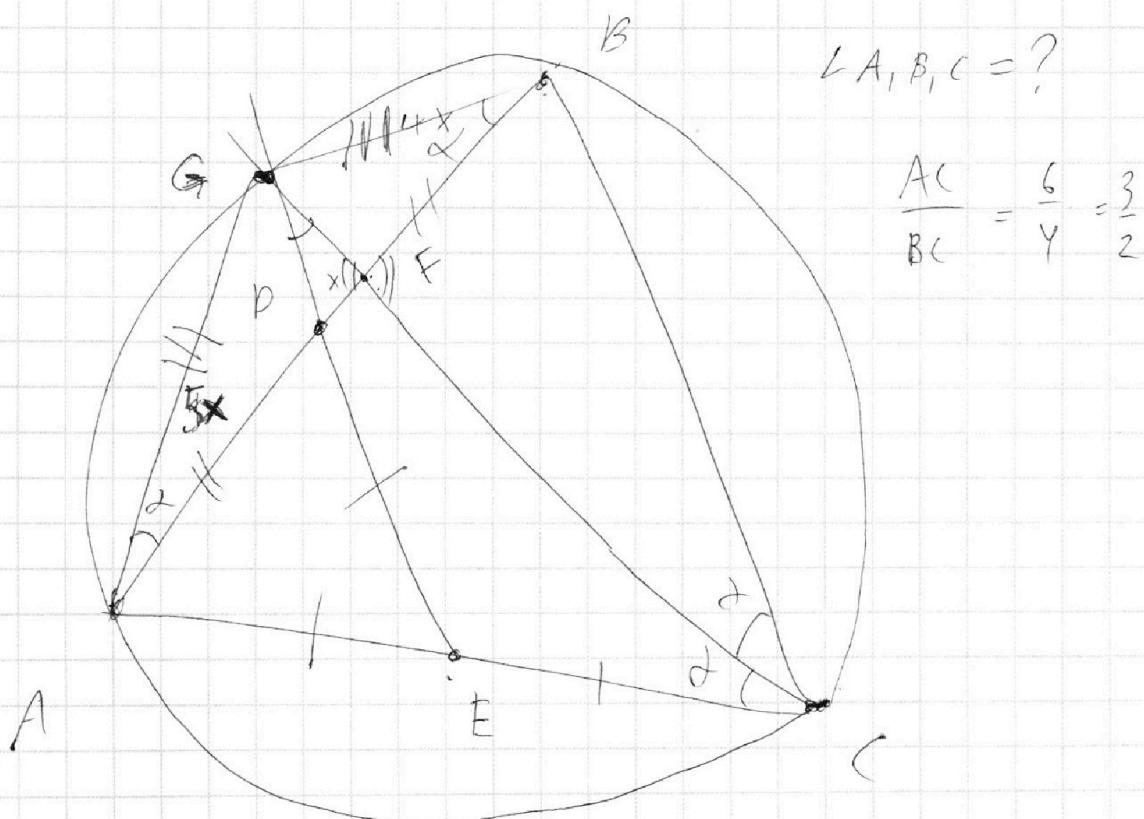
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$-2x^2 + 27x - 94 = 0.$$

$$\Delta = 729 - 188 \cdot 4 > 0.$$



$$S_{BCF} = 16 S_{BGF}$$

$$GF \cdot CF = \\ = AF \cdot BF$$

$$\triangle GFB \sim \triangle CFB \quad k = \frac{1}{4}$$

$$\frac{DF}{BF} = \frac{DG}{BC} = \frac{GF}{CF} = \frac{1}{4}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5) $x = 7$

$$y - 13y + 25 = 94$$

$-12y = 69$ как решить.

6) $x = -1$

$$-y - 13y + 25 = -94$$

$14y = -119$ как решить.

7) $x = 94$

$$94y - 13y + 25 = 1$$

$81y = -24$ как решить.

$$x^2y - 2x^2 - 13xy + 27x + 44y - 94 = 0$$

$$x(xy - 2x - 13y + 27) = 94 - 44y$$

$$x^2(y-2) - 13x(y-2) + x + 44y - 94 = 0$$

$$(y-2)(x^2 - 13x) + x + 44y - 94 = 0$$

$$x(y-2)(x-13) + x$$

делим y : 2, то $13y - 27 \neq 2$ 4

$$\Rightarrow D \neq 2.$$

$$-7y^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$\Delta = (13y-27)^2 - 4(y-2)(44y-94) =$$

$$= 169y^2 - 26 \cdot 27 \cdot y + 729 - 4(44y^2 - 94y -$$

$$- 88y + 188) = - 7 \cdot 16 + 104 \cdot 23 -$$

=

$$= 169y^2 - 2y^2 - 702y + 729 + 376y + 352y -$$

$$- 752 = - 7y^2 + 26y - 23 - 28 + 52 - 23 =$$

$$- 7y^2 + 26y - 23 - \text{некий квадрат.} = 1$$

$$\frac{13y-27 \pm \sqrt{\Delta}}{2} - \text{две члены.}$$

$$\text{если } y \geq 2, \text{ тогда } \Delta = b^2, \text{ где } b : 2.$$

b - чётный.

$$- 7y^2 - 23 - \text{нечётное число} \quad 26y - \text{чётное}$$

число

$$2 - 2 = 0.$$

$$- 7 \cdot 25 - 23 = \text{и} \quad - 7y^2 + 26y - 23 : 4.$$

$$- 2 - 175 - 23 \quad 7y^2 - 23 : 4$$

$$y^2 + 1 \neq 4$$

$$1^2 \equiv 1$$

$$- 2 - 175 - 23 \equiv 1$$

$$23 \equiv 3.$$

$$y^2 \neq 3.$$

$$3^2 \equiv 9$$

$$- 2 - 175 - 23 \equiv 9$$

$$- 23 \equiv 1$$

$$- 373 - 23 = 68y \quad \text{и} \quad 7 \equiv 3 \\ - 7 \equiv 1$$

$$= 366$$