



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{300}$?
3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 2) - x(13y - 27) + 44y - 94 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 16 раз больше площади треугольника DGF .
5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.
6. [5 баллов] Числа a , b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 17$, $XY = 31$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Теперь вернем систему:

$$\begin{cases} x^3 + 4 \leq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \sqrt[3]{-4} \\ x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; \sqrt[3]{-4}]$$

Остаток отбрасываем, решив систему.

$$x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4}] \cup [-1; 1]$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -\sqrt[3]{4}] \cup [-1; 1]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|$$

~~Вспомогательное~~ Воспользуемся известным неравенством:

$|a| + |b| \geq |a + b|$. Из него следует неравенство $|a| + |b| \geq |a - b|$

Положим $a = x^3 + 4$, $b = x^2 - 1$.

$$|a - b| = |x^3 + 4 - x^2 + 1| = |x^3 - x^2 + 5|$$

$$\text{То есть: } |x^3 + 4| + |x^2 - 1| \geq |x^3 - x^2 + 5|$$

$$\text{а по условию } |x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|$$

Значит, выполняется р-во.

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| = |x^3 - x^2 + 5|$$

В каких случаях $|a| + |b| = |a - b|$. Давайте посмотрим на знаки a и b . Если $a > 0$ и $b > 0$, то $|a| + |b| > |a - b|$.

Если $a < 0$ и $b < 0$, то $|a| + |b| > |a - b|$

и т.д. Показано, что если a и b разного знака, то

выполняется знак, либо $a \geq 0$, $b \leq 0$, либо

$b \geq 0$, $a \leq 0$. Рассмотрим эти случаи и решим их

$$\begin{cases} x^3 + 4 \geq 0 \\ x^2 - 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt[3]{-4} \\ x \in [-1; 1] \end{cases} \rightarrow x \in [-1; 1]$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c образуют геом. прогрессию. q — знаменатель прогрессии

$$b = aq, c = aq^2$$

$$abc = 2^{150} \cdot 3^{300} \quad \text{и еще } abc = a^3 q^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

значит, $aq = 2^{50} \cdot 3^{100}$ полагая, что прогрессия

обратно убывает числом q , т.к. $a = \frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{q}$

Всего вариантов для q :

1) если $q \geq 1$, то 51. 101, т.к. q — может быть любым делителем числа $2^{50} \cdot 3^{100}$, а таких всего 51. 101.

2) если $0 < q \leq 1$, то тоже 51. 101 ~~вариантов~~, т.к. вариантов для q

в случае, где $q \geq 1$, мы получим 51. 101 троек (a, b, c) , если $q \leq 1$, мы получим 51. 101 троек, которые будут иметь вид (c, b, a) . (троечки и возрастающие)

Одну тройку мы посчитали дважды. Это случается, когда $q = 1$. Ее надо посчитать в обоих случаях. Поэтому

из ответа надо вычесть 1. То есть всего таких троек

$$2 \cdot 51 \cdot 101 - 1 = 10301$$

Ответ: ~~2.51.101~~ ¹⁰³⁰¹

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$\text{Дискриминант } D = (13y-27)^2 - 4(y-2)(44y-94) =$$

$$= 169y^2 - 26 \cdot 27y + 729 - 4(44y^2 - 94y - 88y + 188) =$$

$$= -7y^2 - 702y + 729 + 376y + 352y - 752 =$$

$$= -7y^2 + 26y - 23$$

Дискриминант должен быть не меньше 0 и при этом ещё и полным квадратом. Интуитивно понятно,

что при довольно больших y , дискриминант отрицателен.

Отрицательные y как всегда рассматривать не будем. В этом

случае дискриминант меньше 0.

$$\text{При } y=1: D = -7 + 26 - 23 = -4 \text{ не подходит}$$

$$\text{При } y=2: D = -28 + 52 - 23 = 1$$

$$x = \frac{13y - 27 + 1}{2(y-2)} = \frac{26 - 27 + 1}{0} \text{ не подходит}$$

$$x = \frac{13y - 27 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ подходит}$$

Поэтому этот случай как не подходит.

$$\text{При } y=3: D = -7 \cdot 9 + 78 - 23 = -8 \text{ не подходит}$$

$$\text{При } y=4: D = -7 \cdot 16 + 104 - 23 = -31 \text{ не подходит}$$

Понятно, что рассматривать остальные y бесполезно, т.к.

D уменьшается, при $y \geq 5$ он тоже будет меньше 0.

Отсюда разберём случай $y=2$ ещё раз.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

подставим $y=2$ в ур-ие:

$$x + 88 - 94 = 0$$

$$x = 6$$

$$\boxed{y = 2; x = 6}$$

Так как с группой y были разобраны и при

чем $D < 0$, значит, нет корней.

Поэтому $x=6; y=2$ - единственное ре-
шение.

Ответ: $x=6; y=2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\angle GAB = \angle BCG = 2$, т.к. они опираются на одну дугу.

$\Rightarrow \angle GDA = \angle ADE = 90^\circ$, а $\angle ADE = \angle ABC$ — как соответствующие при $BC \parallel DE$ и секущей AB .

$\triangle ABC$ — прямоугольный. $\triangle GDF$ тоже прямоугольный, ~~также~~

$\triangle GDF \sim \triangle CBF$ по двум углам: $\angle GDC = \angle BCG$ и

и $\angle GFD = \angle BFC \Rightarrow \frac{GF}{CF} = \frac{DF}{BF} = \frac{GD}{BC} = k$

и ~~след~~ $\frac{S_{GDF}}{S_{CBF}} = k^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow k = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{DF}{BF} = \frac{1}{4}$

Значит, $\frac{BF}{AF} = \frac{2}{3}$

$\frac{BF}{AF} = \frac{BC}{AC}$ — свойство биссектрисы $\frac{BC}{AC} = \frac{2}{3} = \cos \angle BCA$

$\Rightarrow \angle BCA = \arccos \frac{2}{3}$, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAC = 90^\circ - \arccos \frac{2}{3}$

Ответ: 90° ; $\arccos \frac{2}{3}$; $90^\circ - \arccos \frac{2}{3}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\triangle ABC$

CF - диаметр

$AD = BD$

$AE = CE$

$CF \cap ED = G$

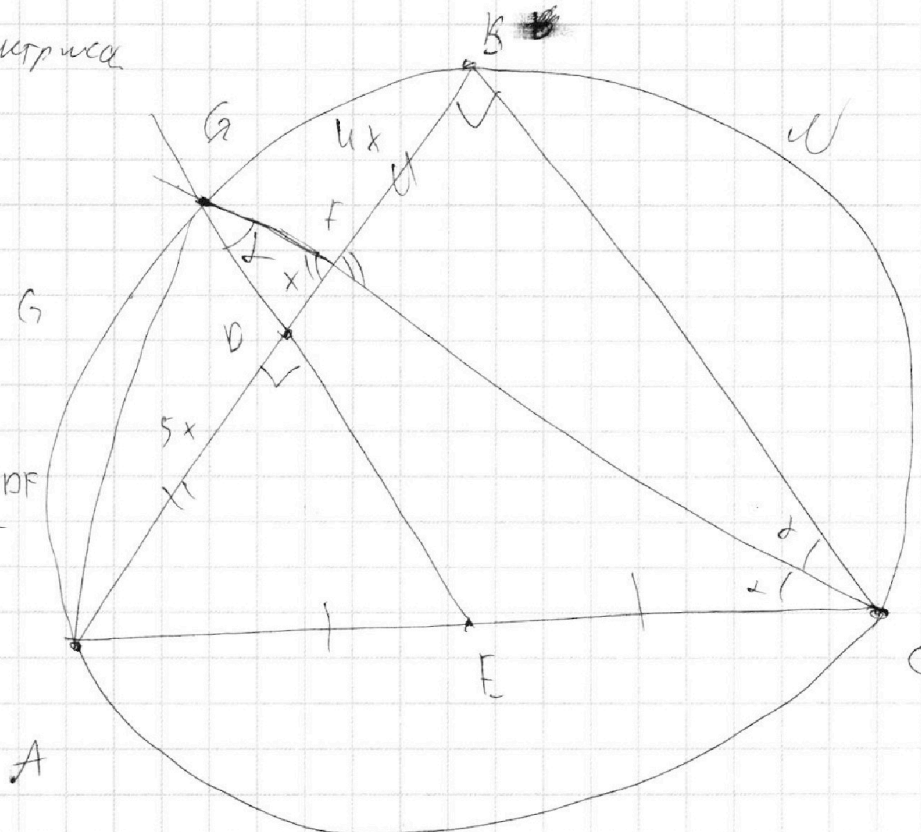
$G \in \omega$

$S_{BCF} = 16 S_{ADF}$

Найти:

угол \angle

$\angle ABC$.



Решение:

$\angle BCG = \angle GCA = \alpha$. CF - диаметр

DE - средняя линия $\Rightarrow DE \parallel BC$, а значит, $\angle CGE = \angle$

$\angle BCG$ - как накрест лежащие при $BC \parallel DE$, секущей CG .

$\triangle CGE$ - р/б, т.к. $\angle EGC = \angle GCE = \alpha \Rightarrow GE = CE =$

$= AE$. Значит, GE - медиана $\triangle AGC$ и она равна

половине стороны, к которой проведена. Значит, $\triangle AGC$ - пря-

моугольный, $\angle AGC = 90^\circ$, $\angle AGE = 90^\circ - \alpha$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$240ax_0 = -730x_0$$

$$\Rightarrow 240a = -730 \Rightarrow a = -\frac{73}{24}$$

Если взять $x_0 = -\frac{1}{3}x_1$, то получится абсолютно такая же система. Значит, $a = -\frac{73}{24}$

Теперь найдём сторону квадрата.

$$\text{Для этого найдём } x_0: ax_0 + x_0^5 = -3x_0$$

$$-\frac{73}{24}x_0 + x_0^5 = -3x_0$$

$$x_0^4 = \frac{1}{24} \quad x_0 = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{24}} \quad \text{будем считать, что}$$

$$x_0 = \sqrt[4]{\frac{1}{24}}, \text{ т.к. будем воспринимать его, как расстоя-$$

ние. Длина диагонали квадрата $\sqrt{2}$:

$$2\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{24} + \frac{9}{24}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10}{\sqrt{24}}} = \sqrt{\frac{20}{\sqrt{6}}}$$

$$\text{Сторона квадрата равна: } \sqrt{\frac{20}{\sqrt{6}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{20}{\sqrt{6}}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \sqrt{\frac{20}{\sqrt{6}}} = \sqrt{\frac{10\sqrt{6}}{6}} = \sqrt{\frac{5\sqrt{6}}{3}}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{73}{24}; \sqrt{\frac{5\sqrt{6}}{3}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

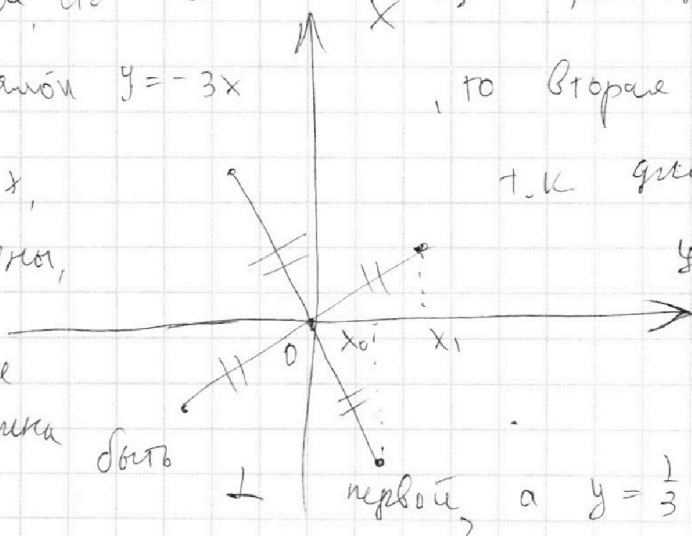
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$f(x) = x^5 + ax$ $f(-x) = -x^5 - ax = -(x^5 + ax) =$
 $= -f(x)$. Значит, $ax + x^5$ — нечетная функция,
то есть все её точки (коорд. x_0 и $-x_0$) симметричны
друг другу относительно начала координат.

Центр квадрата находится в начале координат и поэтому
его вершины симметричны друг другу относительно
начала координат, т.к. диагонали в квадрате делятся точкой
пересечения пополам. Поэтому если две ~~соседние~~
вершины квадрата лежат на графике $f(x) = x^5 + ax$, то
другие две вершины тоже на нём лежат, только сам
 x этих вершин не таков, что стороны квадрата параллельны
оси координат

Поймем, что если одна диагональ квадрата
лежит на прямой $y = -3x$, то вторая лежит на
прямой $y = \frac{1}{3}x$, т.к. диагонали квадрата
перпендикулярны,
то есть вторая
прямая должна
быть
первой, а $y = \frac{1}{3}x \perp y = -3x$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Возьмем две вершины квадрата (не лежащие на одной
границе). Пусть у них координаты по Ox x_0 и x_1 ,
 y_0 , y_1 — их координаты по Oy :

Во-первых, $y_0 = ax_0 + x_0^5$, $y_1 = ax_1 + x_1^5$

Во-вторых, $y_0 = -3x_0$, $y_1 = \frac{1}{3}x_1$

Подставим одно в другое и решим получившуюся систему:

$$\begin{cases} ax_0 + x_0^5 = -3x_0 \\ ax_1 + x_1^5 = \frac{1}{3}x_1 \end{cases}$$

Еще замечание. Показано, что
расстояние от ~~каждой~~ точки до центра

квадрата равно, т.е. диагонали квадрата равны и делятся

точкой пересечения пополам. Поэтому $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$

$$x_1^2 + y_1^2 = x_0^2 + y_0^2 \quad y_1 = \frac{1}{3}x_1 \rightarrow y_1^2 = \frac{1}{9}x_1^2$$

$$y_0 = -3x_0 \Rightarrow y_0^2 = 9x_0^2 \quad \text{Значит, } \frac{10}{9}x_1^2 = 10x_0^2$$

$$\frac{1}{9}x_1^2 = x_0^2 \quad \frac{1}{3}x_1 = x_0 \quad \text{Тогда же берём } x_0 = -\frac{1}{3}x_1$$

В силу равенства расстояний до-ше, там были бы абсолютно
равные) Вернёмся к системе:

$$\begin{cases} ax_0 + x_0^5 = -3x_0 \\ 3ax_0 + 243x_0^5 = x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 243ax_0 + 243x_0^5 = -729x_0 \\ 3ax_0 + 243x_0^5 = x_0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \quad \text{Решим в более удобном}$$

виде:

$$\begin{cases} a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} & \Rightarrow a - b = \frac{5}{c} - \frac{5}{b} = \frac{5(b-c)}{bc} & (1) \\ b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} & \Rightarrow b - c = \frac{5}{a} - \frac{5}{c} = \frac{5(c-a)}{ac} & (2) \\ a + \frac{5}{b} = c + \frac{5}{a} & c - a = \frac{5}{b} - \frac{5}{a} = \frac{5(a-b)}{ab} & (3) \end{cases}$$

$$\text{Подставим (2) в (1): } a - b = 5 \cdot \frac{5(c-a)}{ac \cdot bc} = \frac{25(c-a)}{abc^2}$$

$$\text{Подставим (3) в (1): } a - b = \frac{5 \cdot 25 \cdot (a-b)}{(abc)^2} = \frac{125(a-b)}{(abc)^2}$$

В условии сказано, что среди чисел a, b, c есть хотя бы
одна пара неравных. В силу симметрии считаем, мы
можем без ограничения общности сказать, что $a \neq b$.

Тогда $a - b \neq 0$ и мы можем сократить на $a - b$.

$$\frac{125}{(abc)^2} = 1 \quad (abc)^2 = 125 \quad abc = \pm \sqrt{125} = \pm 5\sqrt{5}$$

$$-5\sqrt{5} < 5\sqrt{5} \Rightarrow -5\sqrt{5} \quad \text{это наименьшее}$$

значение abc .

Ответ: $-5\sqrt{5}$.

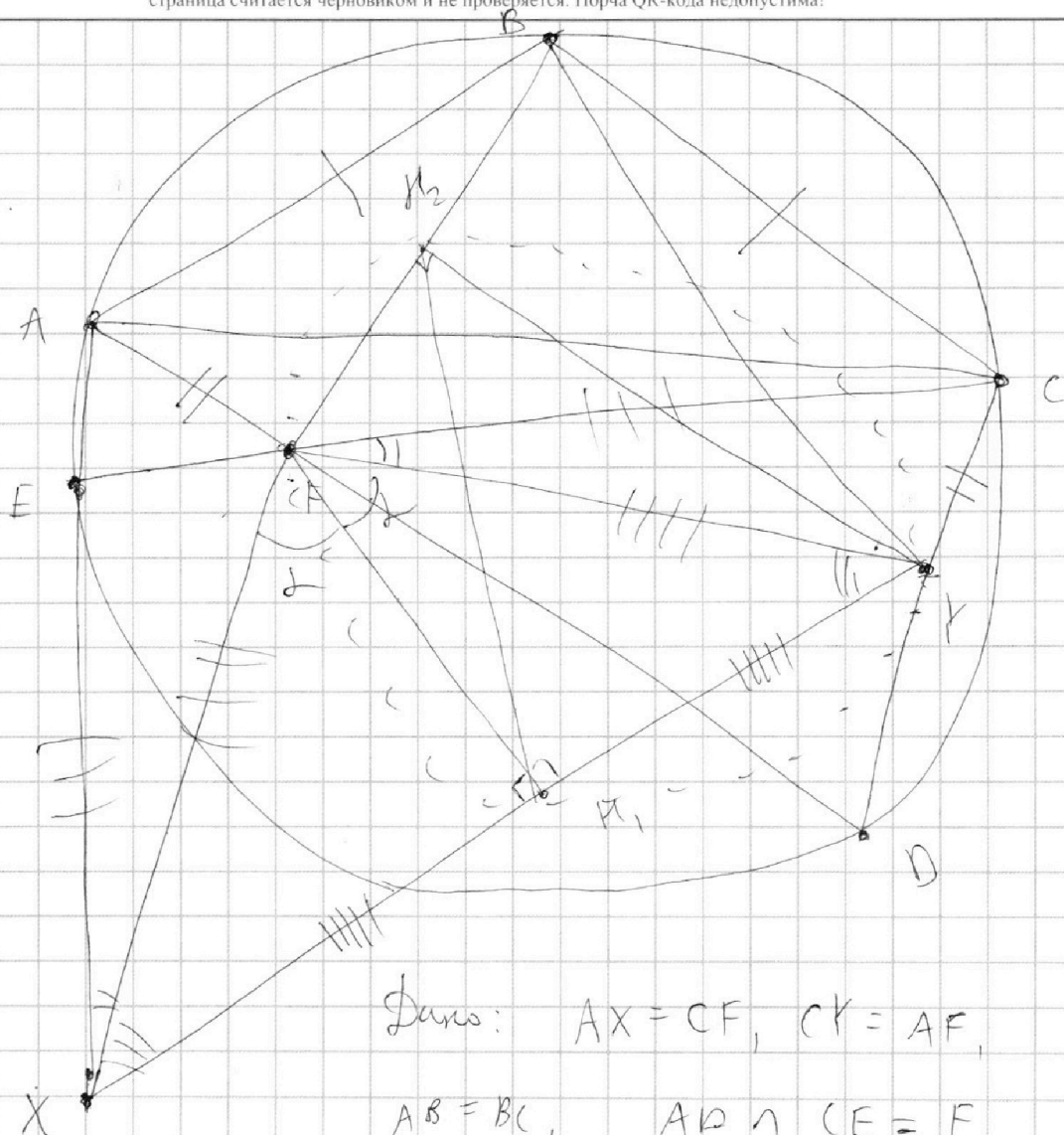
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $AX = CF$, $CF = AF$,
 $AB = BC$, $AD \cap CE = F$,
 $BF = 17$, $XY = 37$.

Найти: $S_{BFXY} = ?$

Решение:

$\triangle AXF$ и $\triangle CFY$ равны по двум сторонам и углу между ними. ($AX = CF$, $CF = AF$, $\angle XAD = \angle ECD$ как опирающиеся на одну дугу). Значит, $XF = FY$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Опустим высоту FH_1 на XY и YH_2 на BF .

$$S_{BFXY} = S_{YBF} + S_{XFY} = \frac{1}{2} XY \cdot FH_1 + \frac{1}{2} BF \cdot YH_2 =$$

$$= \frac{1}{2} (XY \cdot FH_1 + BF \cdot YH_2)$$

$\angle YFH_1 = \alpha$. FH_1, YH_2 — выискиваем, т.к. \angle

$$\angle FH_1Y + \angle FH_2Y = 180^\circ$$

$$FY = \frac{H_1Y}{\sin \alpha} \quad \text{— теорема синусов.}$$

$$FY = \frac{15,5}{\sin \alpha} \quad H_1Y = \frac{1}{2} XY, \text{ т.к. } \Delta XFY \text{ — равнобедренный}$$

и FH_1 — высота, и медиана, и

диаметр описанной окружности. $FH_1 = \sqrt{XF^2 - XH_1^2}$ — из теоремы Пифагора.

$$FH_1 = \sqrt{FY^2 - XH_1^2} = \sqrt{\frac{15,5^2}{\sin^2 \alpha} - 15,5^2} =$$

$$= \sqrt{15,5^2} = 15,5 \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1} = 15,5 \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} =$$

$$= 15,5 \operatorname{tg} \alpha$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \quad \text{Найти: } \min abc = ?$$

$$a = b = c \quad \text{Кельзед}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} \\ b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \\ a + \frac{5}{b} = c + \frac{5}{a} \end{array} \right. \quad a - b = \frac{\frac{5}{c} - \frac{5}{b}}{\frac{5}{c} - \frac{5}{b}} = \frac{5b - 5c}{bc} = \frac{5(b-c)}{bc}$$

$$b - c = \frac{\frac{5}{a} - \frac{5}{c}}{\frac{5}{a} - \frac{5}{c}} = \frac{5c - 5a}{ac} = \frac{5(c-a)}{ac}$$

$$a - b = \frac{5 \cdot \frac{5(c-a)}{ac}}{bc} = \frac{25(c-a)}{abc^2}$$

$$c - a = \frac{\frac{5}{b} - \frac{5}{a}}{\frac{5}{b} - \frac{5}{a}} = \frac{5(a-b)}{ba} \quad a - b = \frac{25 \cdot \frac{5(a-b)}{ba}}{ab^2c} =$$

$$= \frac{125(a-b)}{a^2b^2c^2} = \frac{125(a-b)}{(abc)^2} \cdot \frac{125}{(abc)^2} = 1.$$

$$(abc)^2 = 125 \quad \Rightarrow abc = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

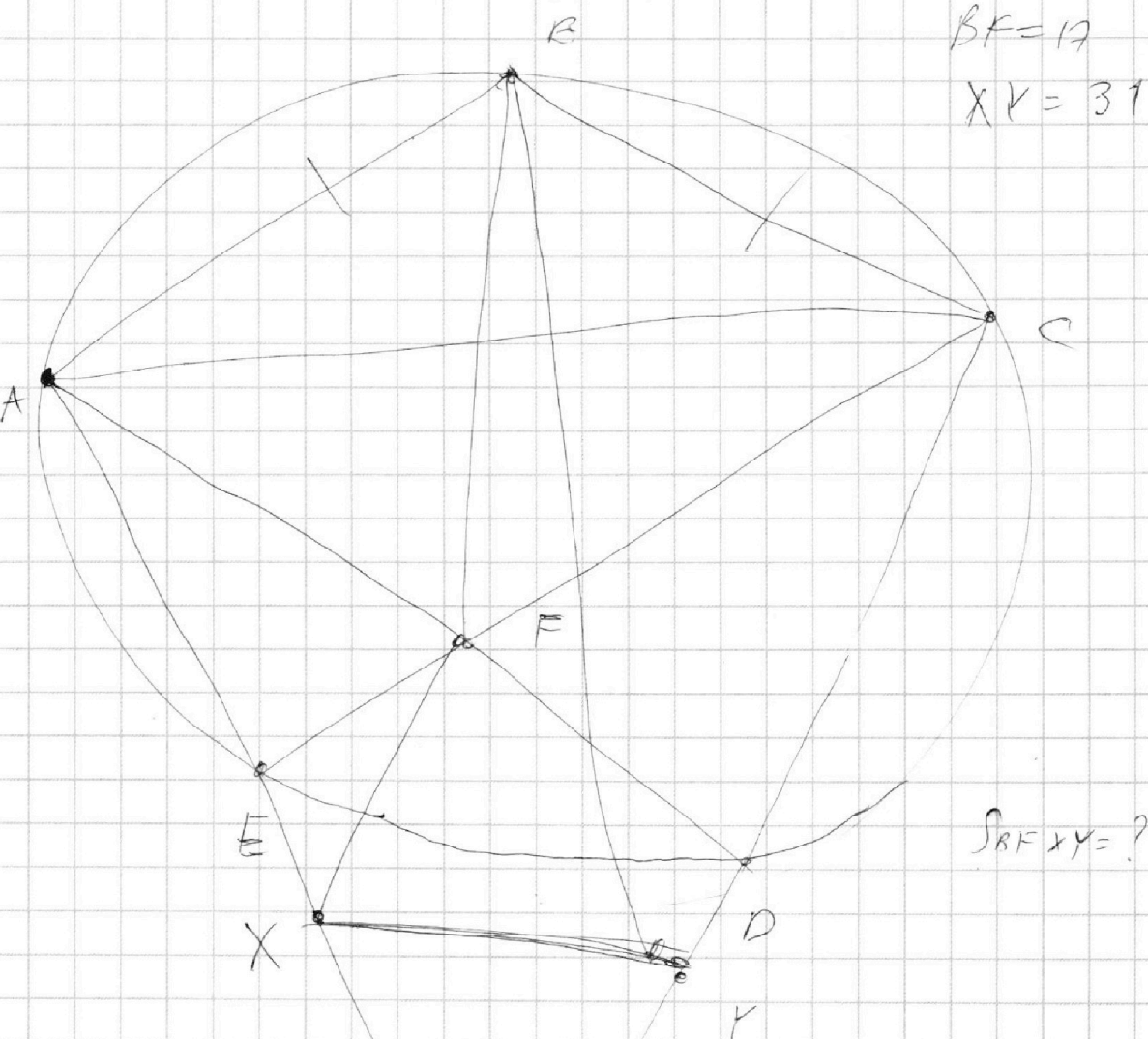
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

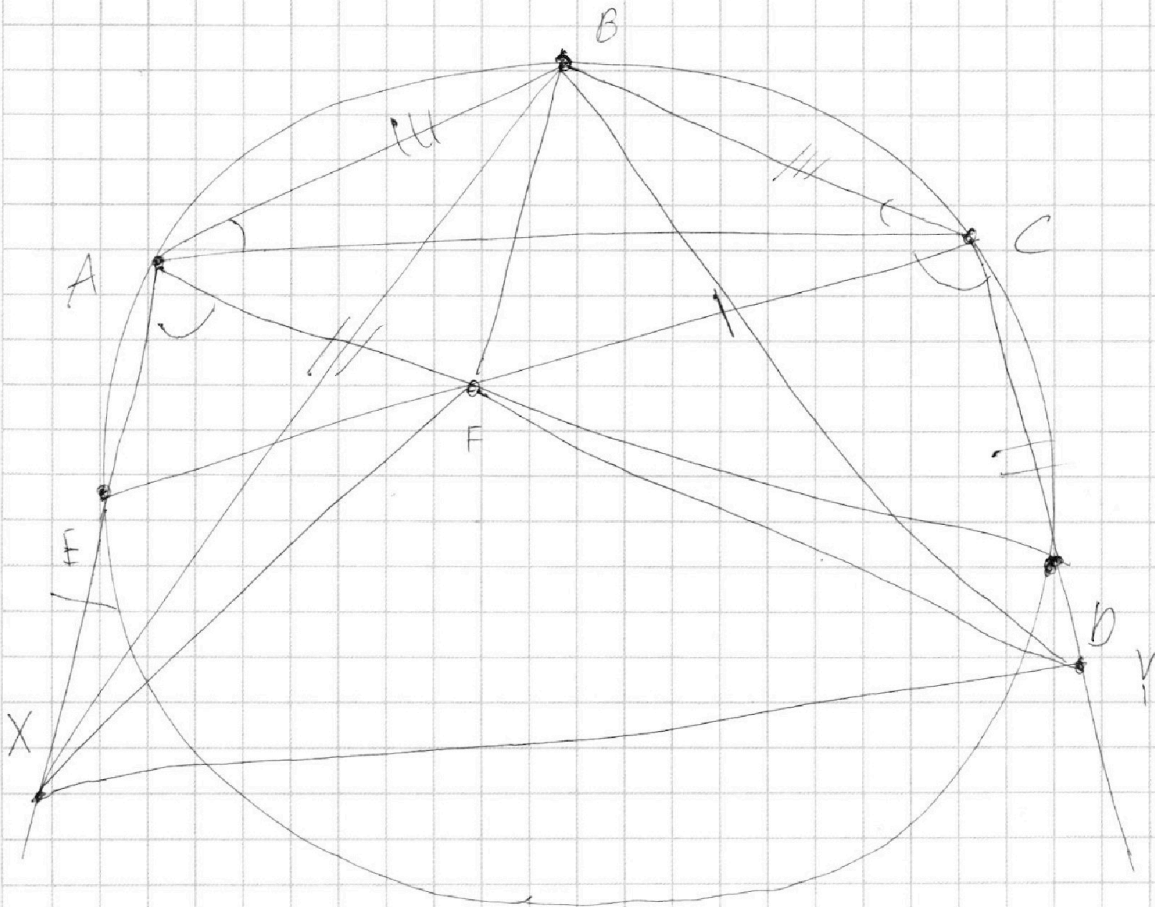
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$BF = 17, \quad XY = 31.$$

$$AX = CF \\ CY = AF$$

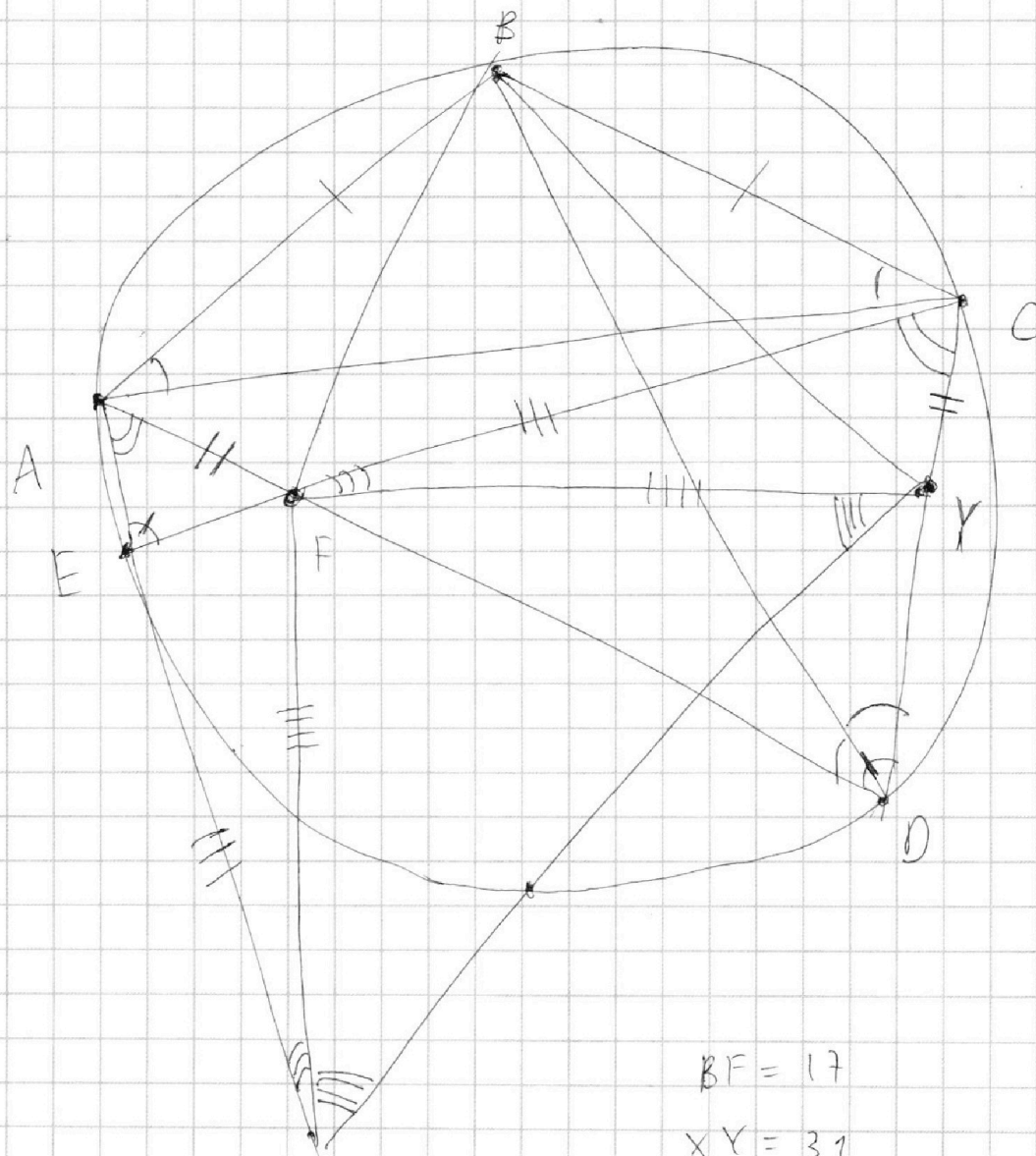
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$BF = 17$$

$$XY = 31$$

$$AX = CF$$

$$CY = AF$$

$$S_{BFXY} = ?$$

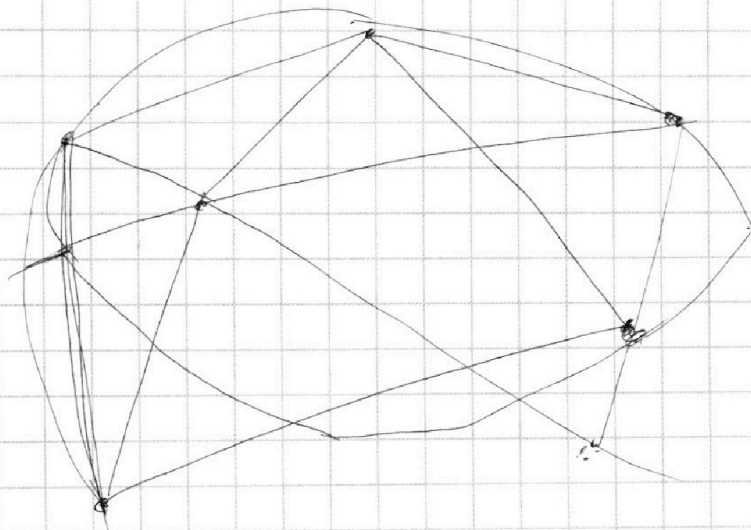
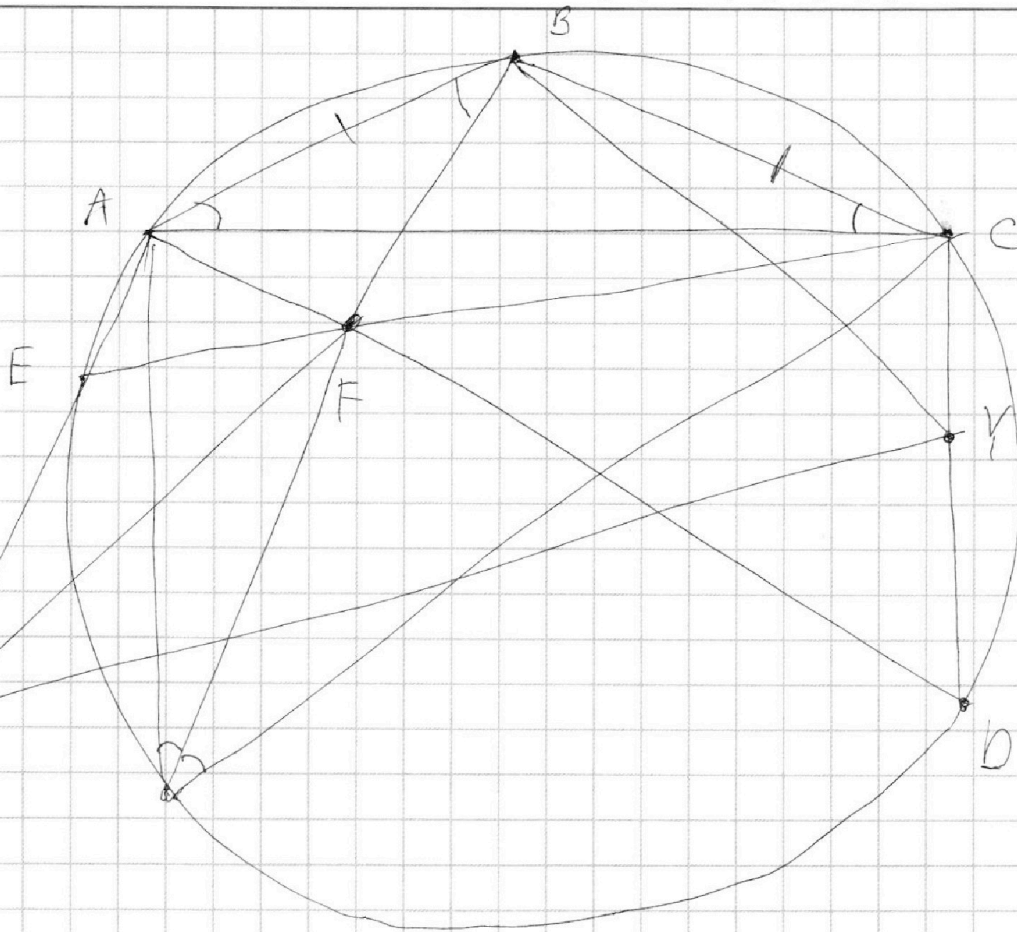
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





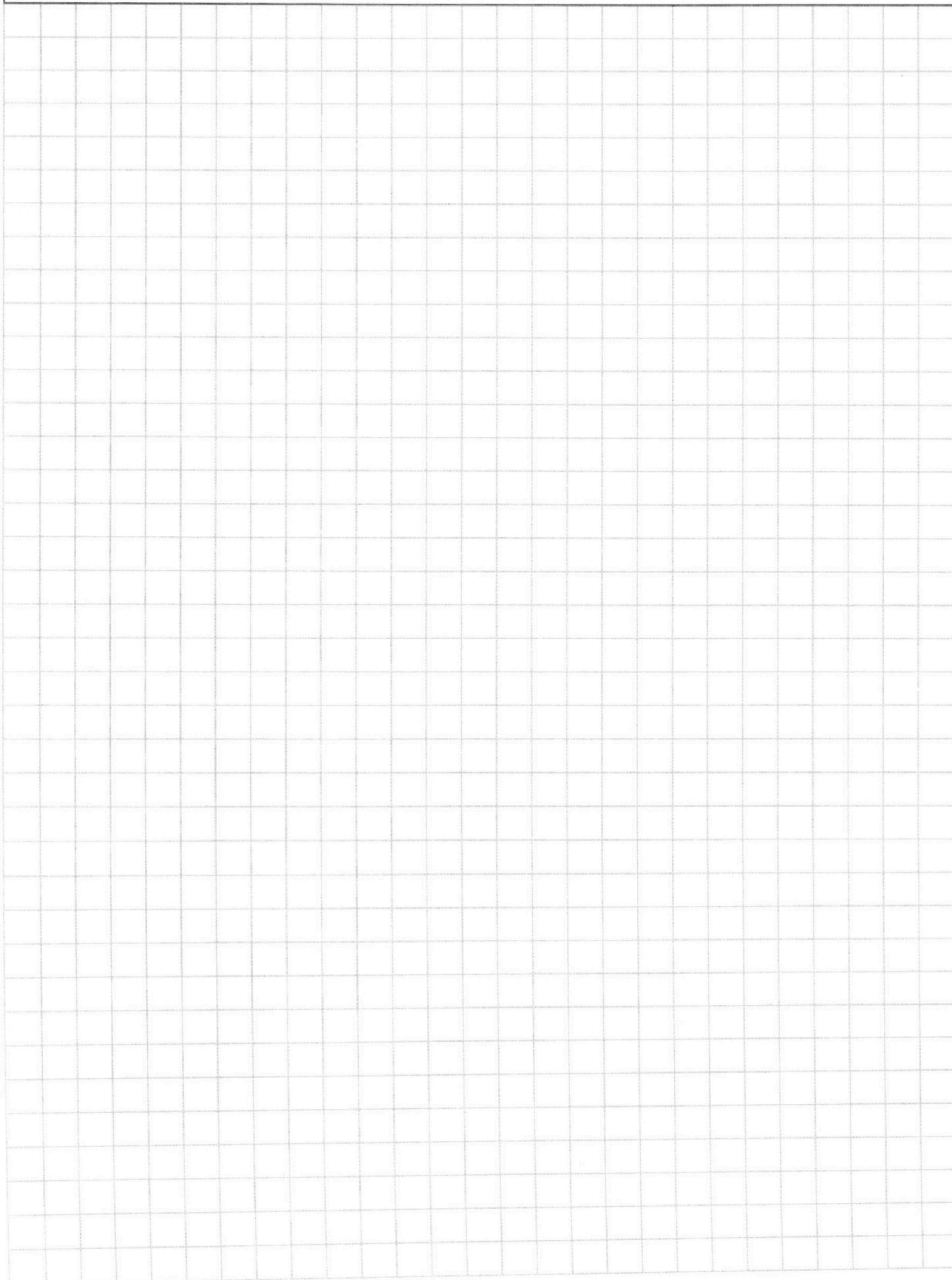
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





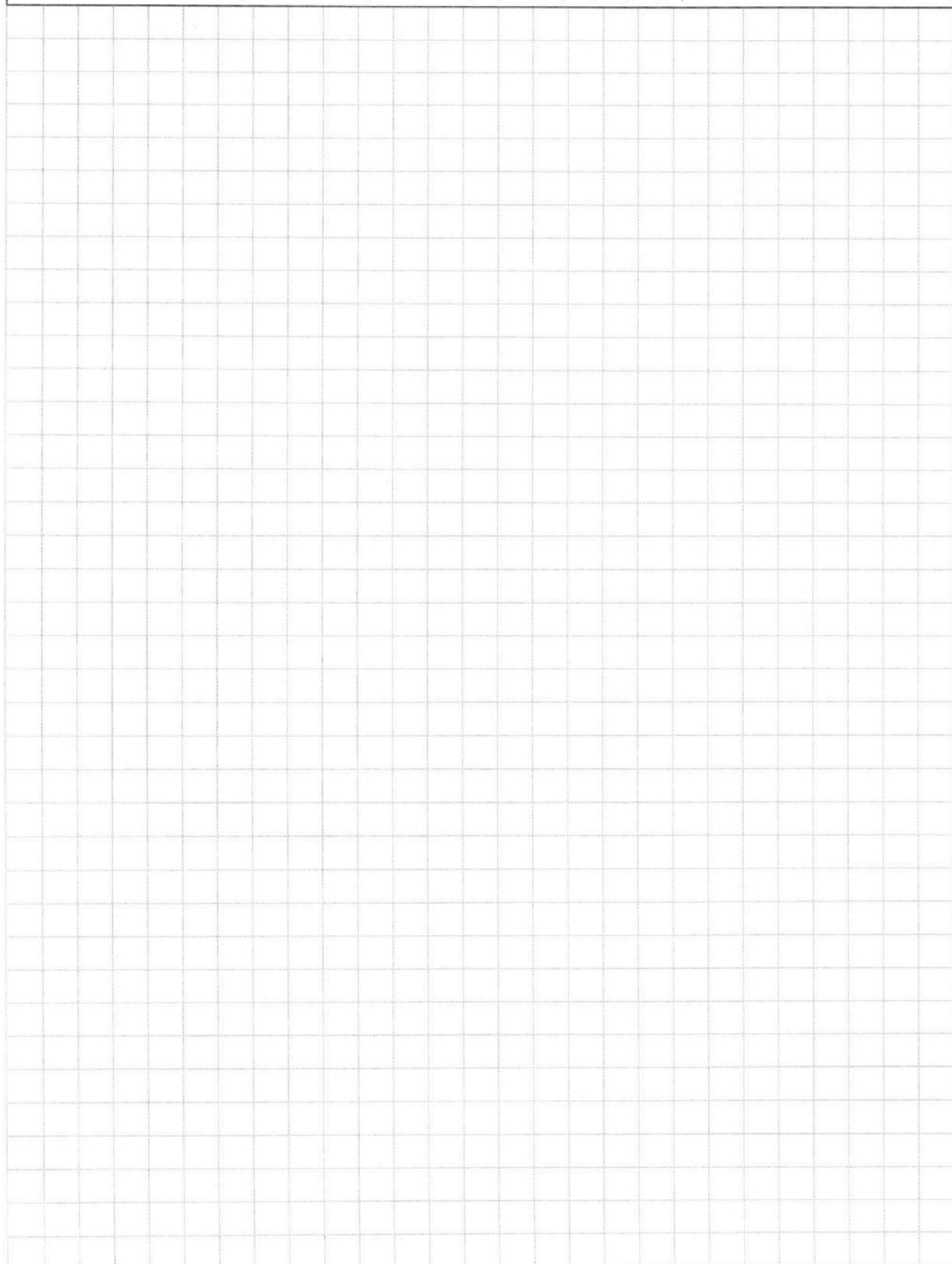
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| = |x^3 - x^2 + 5|$$

$$\begin{cases} x^3 + 4 \geq 0 \\ x^2 - 1 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{x^3} \geq -4 \\ x^2 < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \sqrt[3]{-4} \\ -1 < x < 1 \end{cases} \quad x \in (-1; 1)$$

$$\begin{cases} x^3 + 4 \leq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 < -4 \\ x^2 \geq 1 \end{cases} \quad f = -x^2 + 1$$

$$\begin{cases} x < \sqrt[3]{-4} \\ x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty) \end{cases} \quad |a| + |b| \geq |a + b|$$

$$x \leq \sqrt[3]{-4}$$
$$0 + (\sqrt[3]{-4})^2 - 1 = |1 - (\sqrt[3]{-4})^2|$$
$$(\sqrt[3]{-4})^2 = (\sqrt[3]{4})^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2(y-2) - x(13y-22) + 44y - 94 = 0$$

$$x^2(y-2) - 13x(y-2) - x + 44y - 94 = 0$$

$$|x^3+4| + |x^2-1| \leq |x^3-x^2+5|$$

$$x^3+4 \rightarrow x^3-x^2+5$$

4x

$$x^3+4 - x^2+1 \leq x^3-x^2+5$$

$$x^3+4 = 0 \quad x^3 = \sqrt[3]{-4}$$

$$x^2-1 = 0 \quad x = \pm 1$$

$$x^3-x^2+5 = 0$$

$$|-5| + |4| \geq |-5+4|$$

$$|a| + |b| \geq |a+b|$$

$$|a| + |b| \geq$$

$$|x^3+4| + |x^2-1| \geq |x^3+x^2+3|$$

$$|a| + |1-b| \geq |a-b|$$

$$-b = x^2-1$$

$$|a| + |1-b| \leq |a+b|$$

$$|x^3+4| + |x^2-1| \leq |x^3+4-x^2+1|$$

$$|a| + |b| \vee |a-b|$$

$$1) \quad a+b \vee a-b$$

$$2) \quad a-b \vee |a-b|$$

$$3) \quad -a-b \vee \dots$$



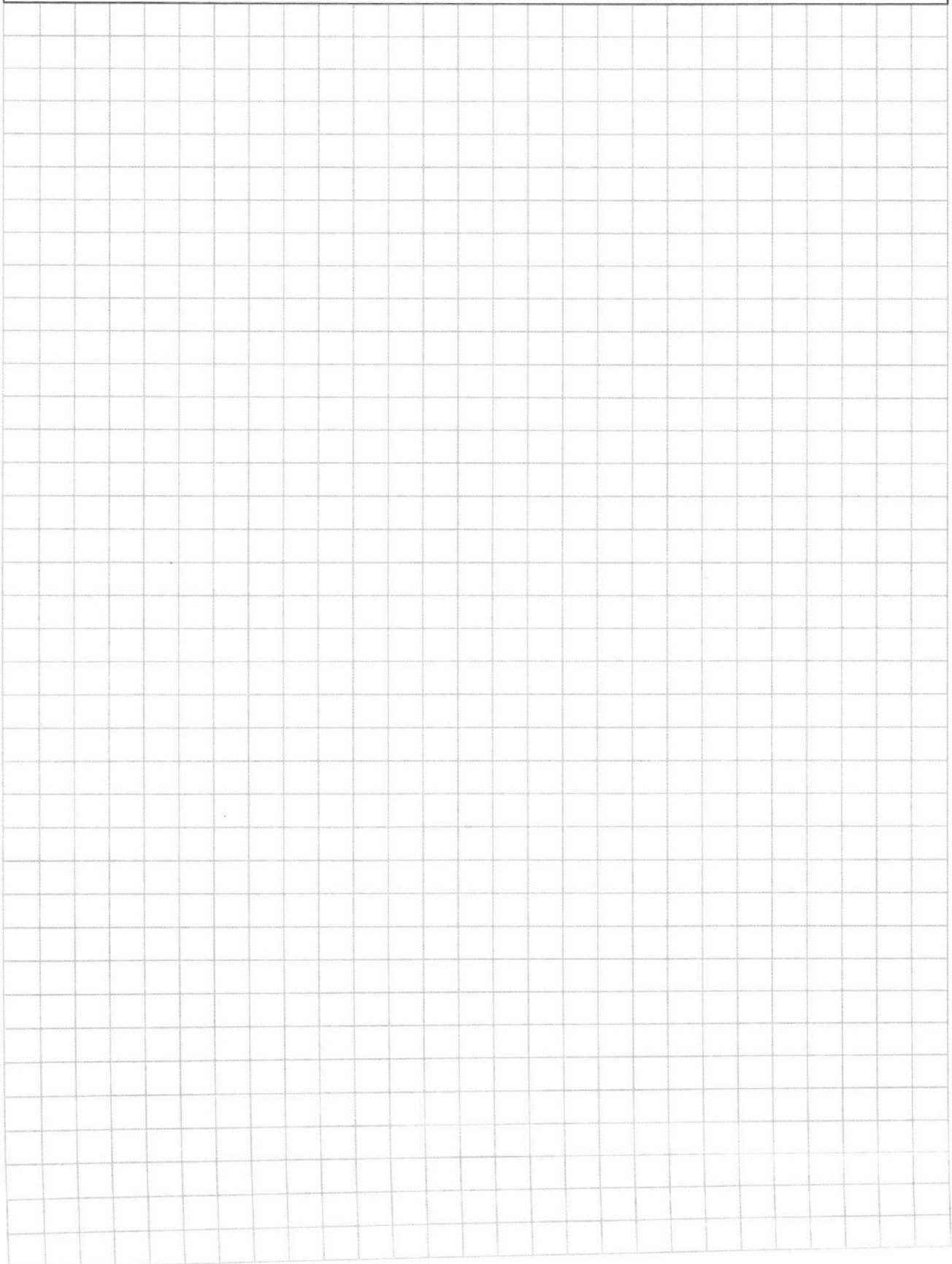
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c геом. прогр. q — знаменатель

$$b = aq, \quad c = aq^2$$

$$abc = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

$$abc = a^3 q^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

$$aq = 2^{50} \cdot 3^{100}$$

если $q \geq 1$, то все факторы выносятся
 $q = 51 \cdot 101$

если $0 < q < 1$, то все $51 \cdot 101$

$$2 \cdot 51 \cdot 101 - 1$$

$$102 \cdot 101 - 1$$

$$\begin{array}{r} \times 102 \\ 101 \\ \hline + 102 \\ \hline 102 \\ \hline 10302 \end{array}$$

$$-\frac{73}{24}x_0 = -3x_0 - x_0^5$$

$$-\frac{1}{24}x_0 = -x_0^5$$

$$\frac{1}{24} = x_0^4$$

$$x_0 = \sqrt[4]{\frac{1}{24}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{24}}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x_0^2 + y_0^2} &= \\ &= \sqrt{\frac{1}{\sqrt{24}} + \frac{9}{\sqrt{24}}} = \\ &= \sqrt{\frac{10}{\sqrt{24}}} \cdot \sqrt{2} = \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$-x^2 + 14x - 50 = 0$$

$$D = 196 - 200 =$$

$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$= -4$$

$$x^2y - 2x^2 - 13xy + 27x + 44y - 94 = 0$$

$$x^2y + 25x - 13xy - 94 = 0$$

$$y = 0$$

$$-2x^2$$

$$x(xy + 25 - 13y) - 94 = 0$$

$$x(xy + 25 - 13y) = 94 = 47 \cdot 2 = 94 \cdot 1$$

1) $x = 47$

$$47y + 25 - 13y = 2$$

$$34y + 25 = 2$$

~~нет~~ нет решений.

2) $x = -47$

$$-47y + 25 - 13y = -2$$

$$-60y + 25 = -2$$

нет решений.

3) $x = 2$

$$2y - 13y + 25 = 47$$

$$-11y = 22$$

$$y = -2$$

$$(2; -2)$$

4) $x = -2$

$$-15y + 25 = -47$$

$$-15y = -72$$

$$15y = 72$$

$$y = \frac{72}{15}$$

нет решений.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$f(x) = x^5 + ax$$

$$f(-x) = -x^5 - ax = -f(x)$$

- функция нечетная

$$x_0 = -\frac{1}{3}x_1$$

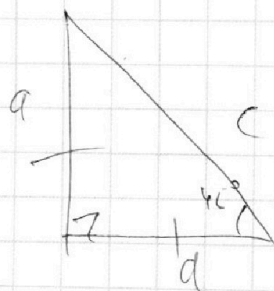
$$x_1 = -3x_0$$

$$\begin{cases} ax_0 + x_0^5 = -3x_0 \\ ax_1 + x_1^5 = \frac{1}{3}x_1 - x_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{40}{\sqrt{2}}} &= \sqrt{\frac{20}{\sqrt{6}}} = \\ &= \sqrt{\frac{20\sqrt{6}}{6}} = \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{cases} ax_0 + x_0^5 = -3x_0 \\ -3ax_0 - 243x_0^5 = -x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax_0 + x_0^5 = -3x_0 \\ 3ax_0 + 243x_0^5 = x_0 \end{cases}$$



$$a = c \sin 45^\circ =$$

=

$$a^2 + a^2 = c^2 = 2a^2$$

$$a = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

$$c = \sqrt{2}a$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Все имеет $y = x^5 + ax$

Первая прямая имеет на $xy = -3x$

Значит, вторая $y = \frac{1}{3}x$

$$x_0 = \frac{1}{3}x_1$$

$$x_1 = 3x_0$$

$$\begin{cases} x_1^5 + ax_1 = \frac{1}{3}x_1 \\ x_0^5 + ax_0 = -3x_0 \end{cases}$$

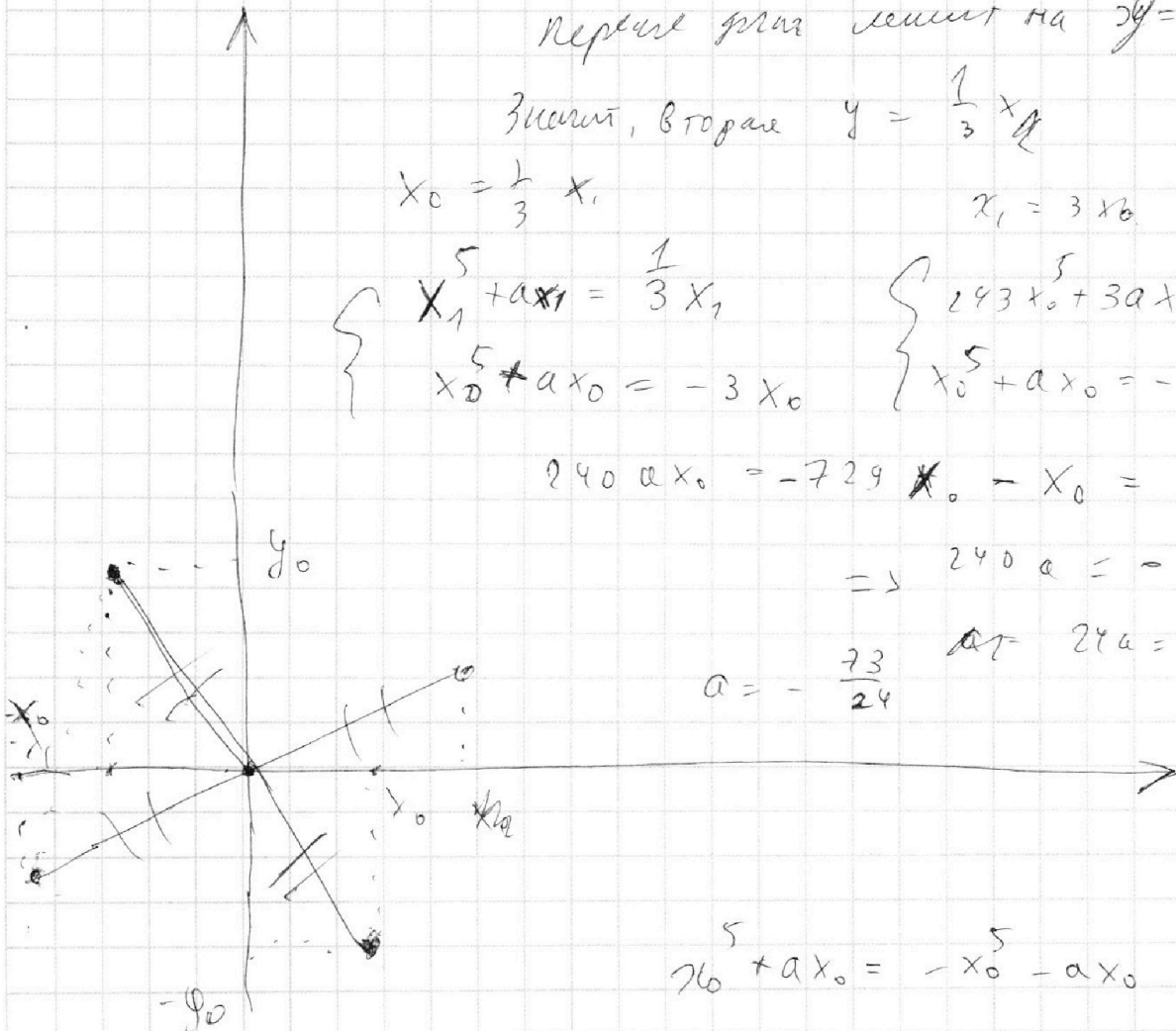
$$\begin{cases} 243x_0^5 + 3ax_0 = x_0 \\ x_0^5 + ax_0 = -3x_0 \end{cases}$$

$$240ax_0 = -729x_0 - x_0 =$$

$$\Rightarrow 240a = -730$$

$$a = -\frac{73}{24}$$

$$a = -\frac{73}{24}$$



$$x_0^5 + ax_0 = -x_0 - ax_0$$

$$y_0 = -3x_0$$

$$\sqrt{(y_0^2 + x_0^2)} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$y_0^2 = (x_0 + ax_0)^2 \quad y_1^2 = (x_1^5 + ax_1)^2$$

$$(x_0 + ax_0)^2 + x_0^2 = x_1^2 + (x_1^5 + ax_1)^2$$

$$10x_0^2 = x_1^2 + \frac{1}{9}x_1^2 = \frac{10}{9}x_1^2$$

$$x_0^2 = \frac{1}{9}x_1^2$$

$$x_0 = \frac{1}{3}x_1$$

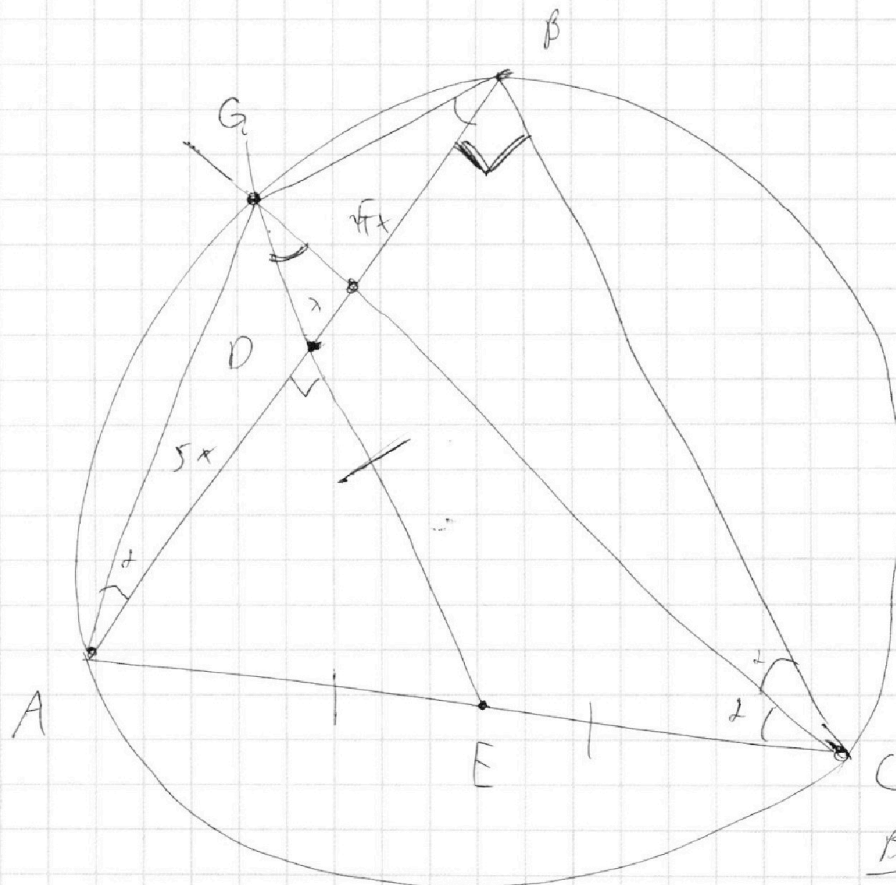
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{BCF} = 16 S_{DGF}$$

$$\angle AGC = 90^\circ$$

$$\angle AGE = 90^\circ - 2\alpha$$

$$\frac{BF}{AF} = \frac{AC}{AC} = \frac{2}{3} = \sin \beta$$

$$= \sin \beta$$

$$S_{BCF} = \frac{BF \cdot CF}{2}$$

$$S_{DGF} = \frac{DF \cdot GF}{2}$$

$$\angle BCA = \arcsin \frac{2}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

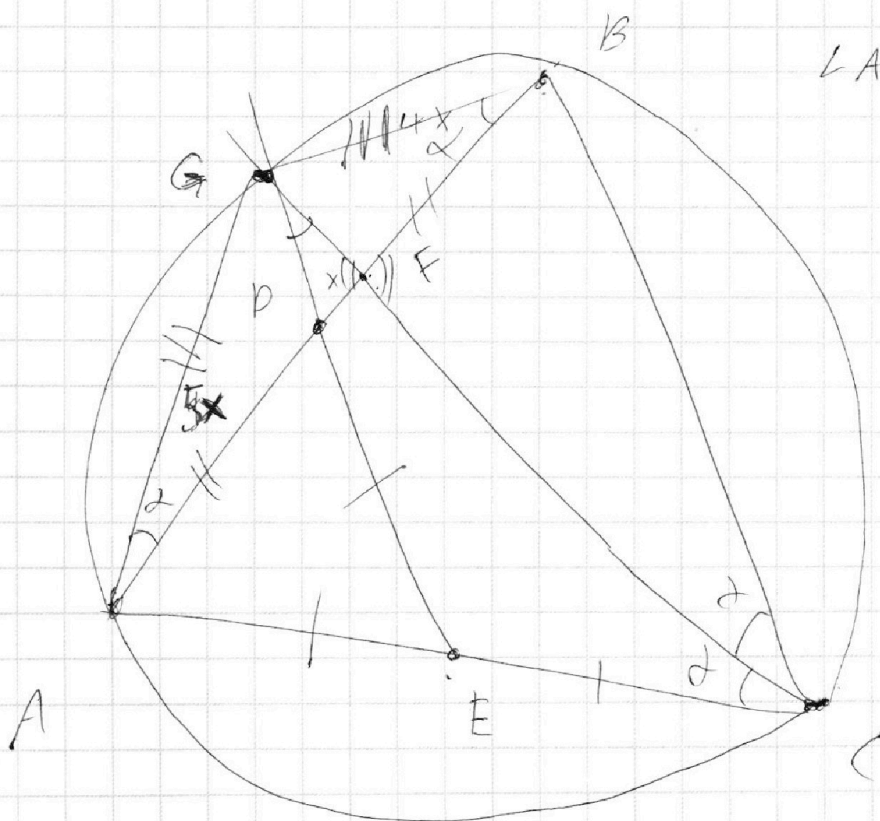


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$-2x^2 + 27x - 94 = 0.$$

$$\Delta = 729 - 188 \cdot 4 > 0.$$



$\angle A, B, C = ?$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$S_{BCF} = 16 S_{DGF}$$

$$\triangle GFD \sim \triangle CFB \quad k = \frac{1}{4}$$

$$\frac{DF}{BF} = \frac{DG}{BC} = \frac{GF}{CF} = \frac{1}{4}$$

$$GF \cdot CF = AF \cdot BF$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5) $x = 7$

$$y - 13y + 25 = 94$$

$$-12y = 69 \text{ нет решений.}$$

6) $x = -1$

$$-y - 13y + 25 = -94$$

$$-14y = -119 \text{ нет решений.}$$

7) $x = 94$

$$94y - 13y + 25 = 7$$

$$81y = -24 \text{ нет решений.}$$

$$x^2y - 2x^2 - 13xy + 27x + 44y - 94 = 0$$
$$x(xy - 2x - 13y + 27) = 94 - 44y$$

$$x^2(y-2) - 13x(y-2) + x + 44y - 94 = 0$$

$$(y-2)(x^2 - 13x) + x + 44y - 94 = 0$$

$$x(y-2)(x-13) + x$$

или $y = 2$, то $13y - 27 \neq 2 \quad y$

$$a \Rightarrow 0 \neq 2.$$

$$-7y^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$\Delta = (13y-27)^2 - 4(y-2)(44y-94) =$$

$$= 169y^2 - 26 \cdot 27 \cdot y + 729 - 4(44y^2 - 94y -$$

$$- 88y + 188) = -7 \cdot 16 + 104 - 23 =$$

$$= -7y^2 - 702y + 729 + 376y + 352y -$$

$$- 752 = -7y^2 + 26y - 23 \quad -28 + 52 - 23 =$$

$$-7y^2 + 26y - 23 \quad \text{— полный квадрат.} \quad = 1$$

$$\frac{13y-27 \pm \sqrt{D}}{2} \quad \text{— целые числа.}$$

для $y \neq 2$, тогда $D = b^2$, где $b \in \mathbb{Z}$.

D — четный.

$-7y^2 - 23$ — четное число $26y$ — тоже четное

$$2 - 2 = 0.$$

$$-7 \cdot 25 - 23 =$$

и

$$-7y^2 + 26y - 23 \div 4.$$

$$-175 - 23 \quad 7y^2 - 23 \div 4$$

$$y^2 + 1 \div 4$$

$$1^2 \equiv 1$$

$$\equiv 98$$

$$23 \equiv 3.$$

$$y^2 \not\equiv 3.$$

$$3^2 \equiv 3$$

$$-7 \cdot 44$$

$$-23 \equiv 1$$

$$-373 - 23 =$$

$$-28$$

$$7 \equiv 3$$

$$-7 \equiv 1$$

$$= 366.$$