



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Решите уравнение

$$6 \operatorname{tg} 2x - 1 + \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $13^{180} \cdot 17^{180}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2(x-1) - (x-2) \ln(3x-3) + (\ln 3) \ln(x-1) \geq 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -\frac{2x^3}{3} + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC . Лучи DE и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{23}}$.

6. [5 баллов] Числа x , y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{11}{y^3} = y^3 + \frac{11}{z^3} = z^3 + \frac{11}{x^3}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения xyz .

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{15}$, $AD = DC = \sqrt{6}$, $AC = 2\sqrt{3}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2\sqrt{3} + \sqrt{15}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB , SBC и ребра SD .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\sqrt{5}}{4}\right) &= \frac{\cos\left(x - \frac{\sqrt{5}}{4}\right)}{\sin\left(x - \frac{\sqrt{5}}{4}\right)} = \frac{\cos x \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} + \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} \\ \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\sqrt{5}}{4}\right) &= \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x}\end{aligned}$$

$$6 \operatorname{tg} 2x - 1 + \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\sqrt{5}}{4}\right) = 0$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}$$

$$\frac{12 \sin x \cdot \cos x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} + \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} = 1 \Rightarrow 12 \sin x \cdot \cos x + (\cos x + \sin x)^2 =$$

$$= (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$12 \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$-2 \cos^2 x + 10 \sin x \cdot \cos x = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = 5 \sin x \end{cases}$$

$$\begin{aligned}1) \cos x &= 0 & 2) \cos x &= 5 \sin x \\ x &= \frac{\sqrt{5}}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} & \operatorname{tg} x &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{5}}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

$$a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

a, b и c в указанном порядке образуют геом. прогрессию.

По свойству геом. прогрессии $b^2 = ac$.

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot c) \cdot b = b^3 = 13^{180} \cdot 17^{180} \Rightarrow b = 13^{60} \cdot 17^{60}$$

$$\text{Пусть } a = 13^d \cdot 17^{\beta} \text{ где } d, \beta \in \mathbb{Z}, d, \beta \in [0; 120].$$

$$\text{Тогда } c = \frac{13^{180} \cdot 17^{180}}{a \cdot b} = 13^{120-d} \cdot 17^{120-\beta}$$

$$\text{Шаг такой прогрессии равен } q = 13^{60-d} \cdot 17^{60-\beta}$$

Каждому a соответствует лишь одно c . Количество способов выбрать a равно $121 \cdot 121 = 14641$.

Заметим, что a и c могут быть отрицательными.

$$\text{Тогда } a = -13^d \cdot 17^{\beta}, d, \beta \in \mathbb{Z}, d, \beta \in [0; 120] \text{ и } c = -13^{120-d} \cdot 17^{120-\beta}$$

$$\text{Тогда шаг неизменяемости равен } q = -13^{60-d} \cdot 17^{60-\beta}$$

В таком случае мы получаем еще $121 \cdot 121 = 14641$ случаев.

$$N = N_1 + N_2 = 2 \cdot 14641 = 29282$$

Ответ: $N = 29282$.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$\ln^2(x-1) - (x-2)\ln(3x-3) + (\ln 3) \ln(x-1) \geq 0.$$

$$\ln(3x-3) = \ln(3 \cdot (x-1)) = \ln 3 + \ln(x-1).$$

$$\ln^2(x-1) + (2-x)(\ln 3 + \ln(x-1)) + (\ln 3) \ln(x-1) \geq 0$$

$$\ln^2(x-1) + (1-x)(\ln 3 + \ln(x-1)) + \ln 3 + \ln(x-1) + (\ln 3) \ln(x-1) \geq 0$$

$$(\ln(x-1) + 1)(\ln(x-1) + \ln 3) + (1-x)(\ln(x-1) + \ln 3) \geq 0$$

$$(\ln(x-1) + \ln 3)(\ln(x-1) + 1 + 1 - x) \geq 0$$

$$\ln(3x-3) \cdot (\ln(x-1) + 2-x) \geq 0$$

Рассмотрим ~~неравенство~~ $\ln(x-1) + 2-x \geq 0$.

Заметим, что $\ln(2-1) = \ln 1 = 0$ и $(2-2) = 0$.

Найдем касательную к $f(x) = \ln(x-1)$ в точке $x_0 = 2$:

$$y = f(x_0) + (x-x_0) \cdot f'(x) = \ln(2-1) + (x-2) \cdot \frac{1}{x-1} = x-2.$$

То есть $y = x-2$ это касательная к $f(x) = \ln(x-1)$

Значит при $x=2$, $\ln(x-1) + 2-x = 0$, при $x \neq 2$ ~~$\ln(x-1) + 2-x > 0$~~

Неравенство $\ln(3x-3) \geq 0 = \ln 1 \Rightarrow \frac{3x-3-1}{e-1} \geq 0$. $\ln(x-1) + 2-x < 0$

$$3x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{4}{3}$$

При $x \geq \frac{4}{3}$ $\ln(3x-3) \geq 0$, при $x < \frac{4}{3}$ $\ln(3x-3) < 0$.

Применим метод интервалов:

$\ln(3x-3)$	-	0	+	+
$\ln(x-1) + 2-x$	-	-	0	-

Учитывая ОДЗ $x-1 > 0$
($x > 1$)

Получим:

$$x \in (1; \frac{4}{3}] \cup \{2\}$$

Ответ: $x \in (1; \frac{4}{3}] \cup \{2\}$

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.

$$y = -\frac{2x^3}{3} + ax. \text{ Заметим, что } y(0) = 0.$$

Точки пересечения графиков $y = -\frac{2x^3}{3} + ax$ и $y = 3x$.

Являются ~~точками~~ вершинами квадрата, который записан с его диагональю (кресте точки $(0; 0)$, т.к. это центры диагоналей).

$$-\frac{2x^3}{3} + ax = 3x \Rightarrow -\frac{2x^2}{3} + a = 3 \Rightarrow \frac{2}{3}(a-3) x^2 = \frac{3}{2}(a-3)$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}(a-3)}. \quad (a > 3)$$

$$y_{1,2} = \pm 3 \sqrt{\frac{3}{2}(a-3)}$$

Диагонали ~~кв~~ квадрата перпендикулярны, следовательно остальные 2 точки квадрата лежат на прямой $y = -\frac{1}{3}x$ (т.к. прямые $y = 3x$ и $y = -\frac{1}{3}x$ перпендикулярны).

$$-\frac{2x^3}{3} + ax = -\frac{1}{3}x \Rightarrow -\frac{2}{3}x^2 + a = -\frac{1}{3} \Rightarrow x^2 = (a + \frac{1}{3}) \cdot \frac{3}{2}$$

$$x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}(a + \frac{1}{3})}$$

$$y_{3,4} = \mp \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{2}(a + \frac{1}{3})}$$

Расстояния от каждой точки квадрата до его центра равны между собой, то есть:

$$(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2 = (x_3 - 0)^2 + (y_3 - 0)^2$$

т.к. центры квадрата находятся в точке $(0; 0)$.

$$x_1^2 + y_1^2 = x_3^2 + y_3^2$$

$$\frac{3}{2}(a-3) + 9(\frac{3}{2}(a-3)) = \frac{3}{2}(a + \frac{1}{3}) + \frac{1}{9}(\frac{3}{2}(a + \frac{1}{3}))$$

$$(a-3) \cdot 15 = (a + \frac{1}{3}) \cdot \frac{5}{3}$$

$$9(a-3) = (a + \frac{1}{3})$$

$$9a - a = 27 + \frac{1}{3}$$

$$8a = \frac{81+1}{3} = \frac{82}{3}$$

$$a = \frac{82}{24} = \frac{41}{12}$$

Найдем сторону квадрата:

$$\frac{d}{2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{\frac{3}{2}(\frac{41}{12}-3) + 9 \cdot \frac{3}{2}(\frac{41}{12}-3)} = \sqrt{15} \cdot \sqrt{\frac{5}{12}} = \frac{5}{2}$$

$d = 5$ - диагональ квадрата.

$$S = \left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{d^2}{2} = \frac{25}{2} - \text{площадь квадрата.}$$

Ответ: $a = \frac{41}{12}$,

$$S = \frac{25}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

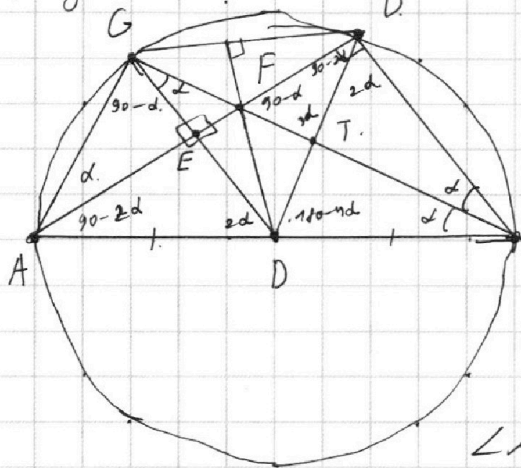
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.



$$\angle ACF = \angle FCB. (CF - \text{бисс.})$$

$$DE \parallel BC \text{ (DE - ср. линия).}$$

$$\text{Потому } \angle ACF = \alpha = \angle FCB.$$

$$\text{Потому } \angle ADE = \angle ACB = 2\alpha.$$

$$\angle GDC = 180^\circ - \angle ADE = 180^\circ - 2\alpha.$$

$$\angle DGC = 180^\circ - \angle GDC - \angle ACG = \alpha.$$

$$\angle DGC = \angle DCG \Rightarrow GD = DC.$$

$$AD = CD \text{ (D - середина AC).}$$

$$AD = CD = GD \Rightarrow \angle AGC = 90^\circ \text{ (GP - диаметр)}$$

$$\angle AGC = 90^\circ \Rightarrow AC - \text{диаметр. (}\angle C = 180^\circ\text{)}.$$

D - середина диаметра AC $\Rightarrow$ D - центр окружности.

$$\angle ABC = \angle AGC = 90^\circ = \angle AED.$$

$$DB = CD \Rightarrow \angle BDC = 180^\circ - 4\alpha$$

$$\angle BAC = 90^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle ADE = 2\alpha$$

$$\angle GDB = 180^\circ - 2\alpha - (180^\circ - 4\alpha) = 2\alpha. \quad GD = BD \Rightarrow \angle DGB = \angle DBG = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2}$$

$$\angle DGB = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle CGB = 90^\circ - 2\alpha.$$

$$\angle DBG = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle ABG = \alpha.$$

$$BD \parallel AG \Rightarrow \angle DTC = 90^\circ = \angle FTB \Rightarrow \angle AFE = \angle B.$$

$$\angle = 30^\circ.$$

$$\text{Ответ: } \angle ABC = 90^\circ, \angle BCA = 60^\circ, \angle BAC = 30^\circ$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

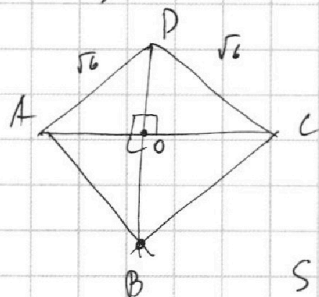
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7

Рассмотрим $ABCD$:



$$AD = CD, AB = BC \Rightarrow AC \perp BD, AO = OC = \frac{AC}{2}$$

$$AO = \sqrt{3} \Rightarrow OD = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{3}$$

$$OB = \sqrt{BC^2 - OC^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$BD = OD + OB = 3\sqrt{3}$$

$$SD \perp ABCD \Rightarrow SA^2 = SD^2 + AD^2, SB^2 = SD^2 + BD^2$$

Пусть $SD = h$. Тогда $SA = \sqrt{h^2 + 6}$, $SB = \sqrt{h^2 + 24}$.

По условию $SA + SB = 2\sqrt{3} + \sqrt{15}$

$$\sqrt{h^2 + 6} + \sqrt{h^2 + 24} = 2\sqrt{3} + \sqrt{15} = \sqrt{3}(2 + \sqrt{5})$$

$$\sqrt{\frac{h^2}{3} + 2} + \sqrt{\frac{h^2}{3} + 9} = (2 + \sqrt{5}) \quad \text{Пусть } \frac{h^2}{3} = t$$

$$t + 2 + t + 9 + 2\sqrt{(t+2)(t+9)} = (2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$$

$$t + \sqrt{(t+2)(t+9)} = 2\sqrt{5} - 1$$

$$(t+2)(t+9) = (2\sqrt{5} - 1 - t)^2$$

$$t^2 + 11t + 18 = t^2 - 2t(2\sqrt{5} - 1) + (2\sqrt{5} - 1)^2 = t^2 - 4t\sqrt{5} + 2t + 20 - 4\sqrt{5} + 1$$

$$9t + 4t\sqrt{5} = 3 - 4\sqrt{5}$$

$$t = \frac{3 - 4\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}} \Rightarrow h^2 = \frac{9 - 12\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}} = (9 - 12\sqrt{5})(9 - 4\sqrt{5}) = 81 + 240 - 4\sqrt{5}(24 + 9)$$

$$h^2 = 321 - 36 \cdot 4\sqrt{5}$$

$$h = SD = \sqrt{321 - 144\sqrt{5}}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{ABCD} = \frac{\sqrt{321 - 144\sqrt{5}}}{3} \cdot \frac{AC \cdot BD}{2} = 3\sqrt{321 - 144\sqrt{5}} - \text{объем пирамиды}$$

Ответ: $V = 3\sqrt{321 - 144\sqrt{5}}$ - объем пирамиды

Пусть O' - проекция центра сферы на $ABCD$.

Сфера касается сторон SAB и SBC , поэтому



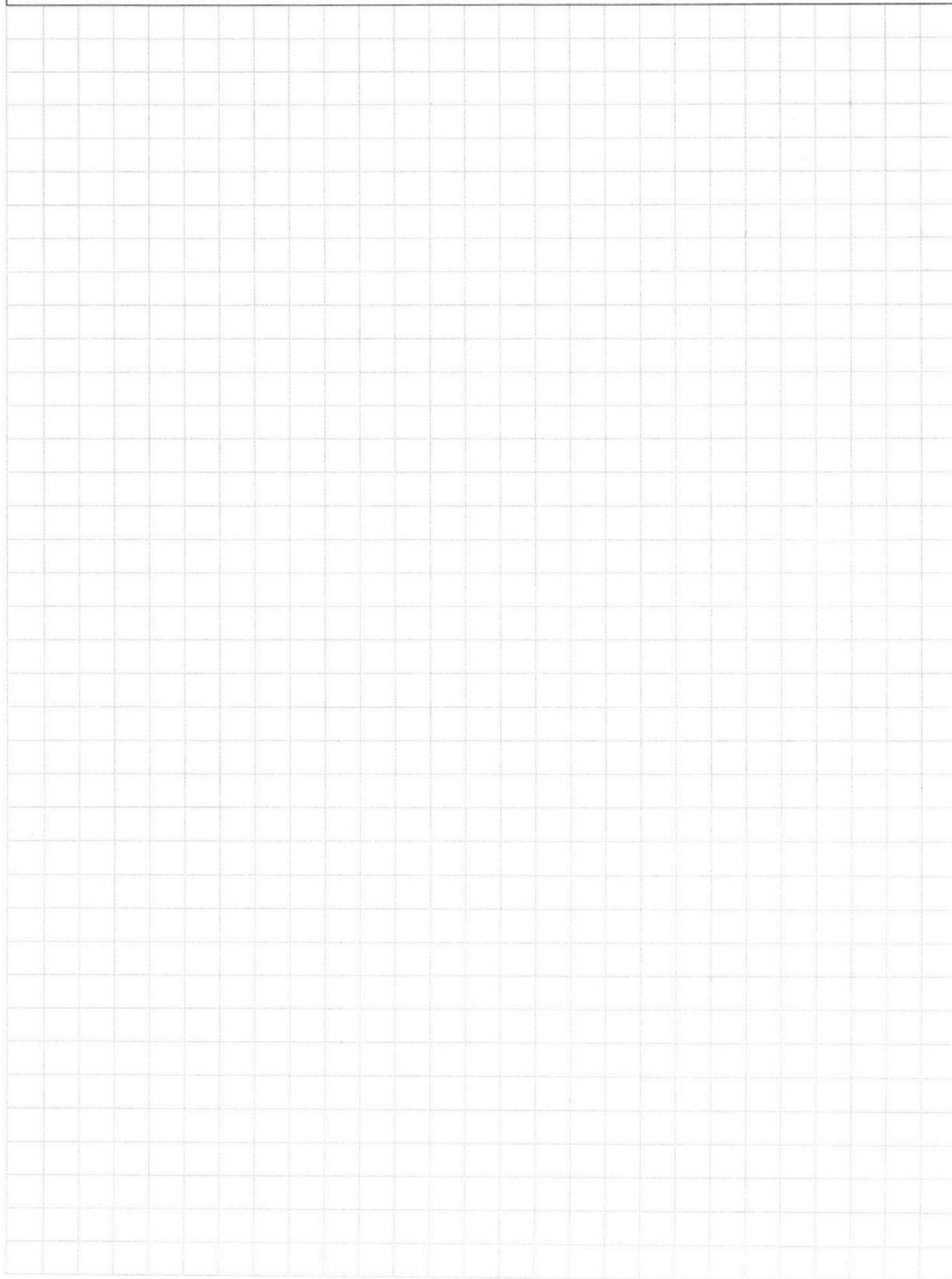
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

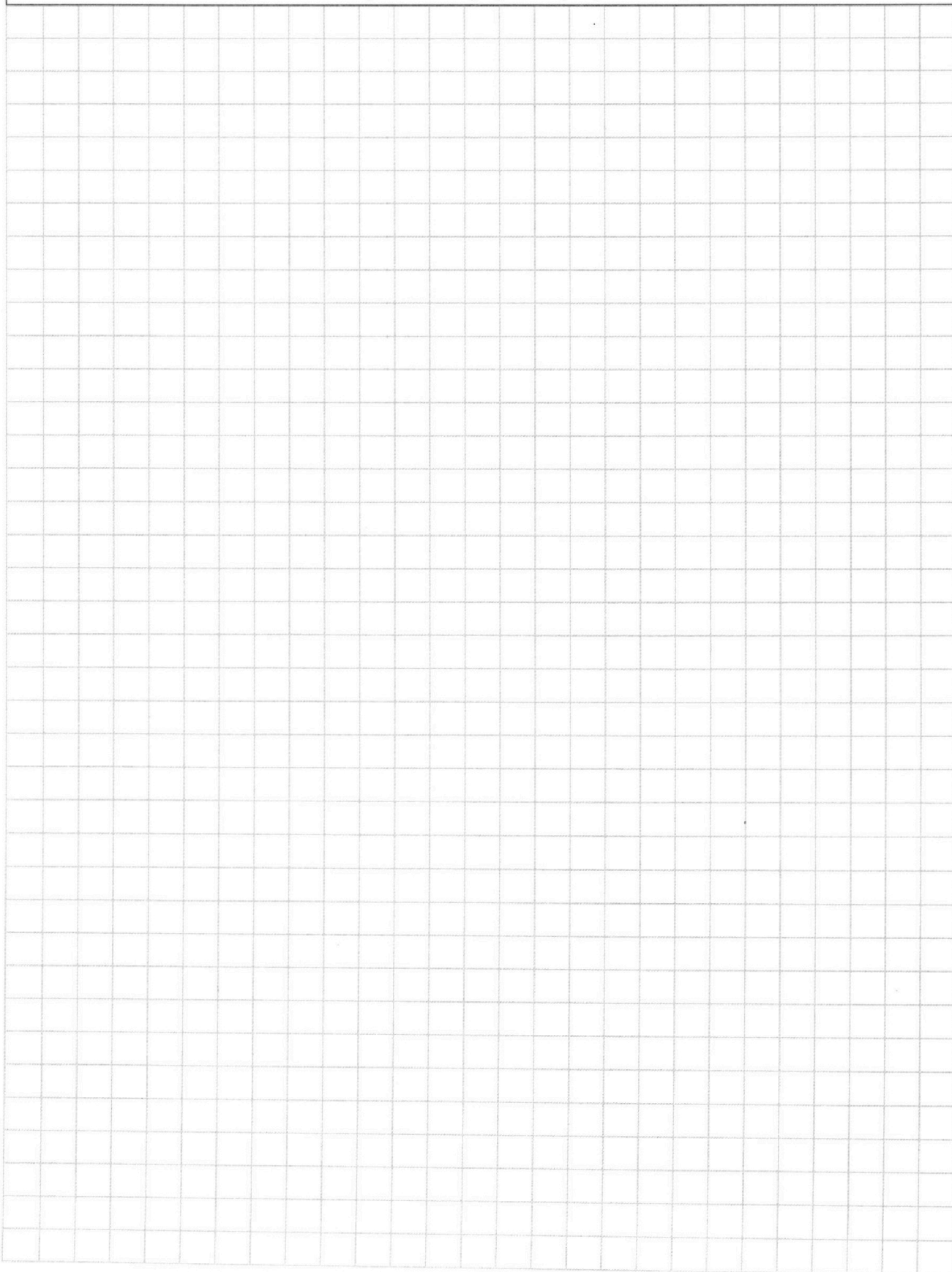
5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$b^2 = ac$

$abc = b^3 = 13^{180-72} = 13^{108}$

$b = 13^{36}$

$ac = 13^{120-72} = 13^{48}$

$a, c \in [0; 120]$

$a = 13^{d-72}$

$c = 13^{(120-d)-72}$

$d, \beta \in [0; 120]$

$a = -13^{d-72}$

$c = -13^{(120-d)-72}$

$14 \cdot 120 \cdot 120 = 201600$

$14 \cdot 120 \cdot 120 = 201600$

$\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{23}}$

$\angle DGC = d$

$CF = x\sqrt{2}$

$DF = x\sqrt{23}$

$\triangle CEF \sim \triangle BCF$

$360 = 180 - d + 180 - \beta + \varphi$

$(\varphi = d + \beta)$

$\angle EFC = d + \beta$

$\angle AGC = 90^\circ$

$\angle AC = 180^\circ$

$AC - \text{гипотенуз.}$

$BC = 2y$

$DE = y$

$\angle ABC = 90^\circ$

$D - \text{центр}$

$B - \text{окружность}$

$\frac{AG}{2R} = \frac{FB}{x\sqrt{2}}$

$23x^2 = 2x^2 + R^2 - 2 \cdot x\sqrt{2} \cdot R \cdot \cos d$

$(R^2 - 21x^2)y = x\sqrt{2} \cdot x\sqrt{2} \cdot R = 2x^2R$

$180 - 90 + d - 90 + 2d + \varphi = 180$

$\varphi = 180 - 3d$

$\cos d = \frac{R^2 - 21x^2}{2x\sqrt{2}R} = \frac{x\sqrt{2}}{2y}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 + \frac{11}{y^3} = y^3 + \frac{11}{z^3} = z^3 + \frac{11}{x^3}$$

$$\begin{cases} x^3 + \frac{11}{y^3} = t \\ y^3 + \frac{11}{z^3} = t \\ z^3 + \frac{11}{x^3} = t \end{cases}$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3t$$

$$x^6 y^3 z^3 + 11 x^3 z^3 = x^3 y^6 z^3 + 11 x^3 y^3 = x^3 y^3 z^6 + 11 y^3 z^3$$

$$x^6 y^3 z^3 + 11 x^3 z^3 = x^3 y^6 z^3 + 11 x^3 y^3$$

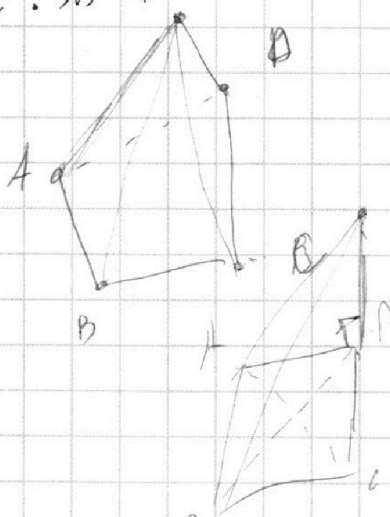
$$x^3(x^3 y^3 z^3) + x^3 11 z^3 - x^3 \cdot y^6 z^3 - 11 x^3 \cdot y^3 = 0$$

$$11 x^3 (z^3 - y^3) + z^3 \cdot x^6 y^3 - z^3 \cdot x^3 y^6 = 0$$

$$11 (z^3 - y^3) + z^3 \cdot x^3 y^3 - z^3 \cdot y^6 = 0$$

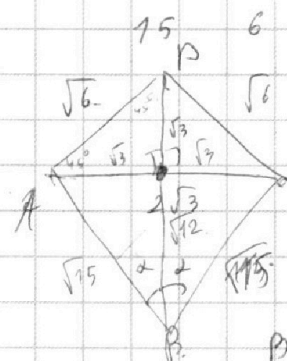
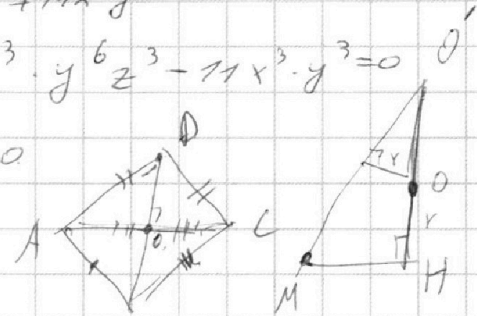
$$11 (z^3 - y^3) = z^3 y^3 (y^3 - x^3)$$

$$\frac{2/\sqrt{3}}{2} \cdot 3\sqrt{3} = 9$$



$$\begin{aligned} AB &= BC = \sqrt{15} \\ AD &= DC = \sqrt{6} \\ AC &= 2\sqrt{3} \\ SD &\perp ABCD \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SD &= h \\ SA &= \sqrt{h^2 + 6} \\ SB &= \sqrt{h^2 + 24} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \\ \cos \alpha &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos \beta &= \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos \gamma &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$PD = \sqrt{3} + \sqrt{12} = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{h^2}{3} + 2} + \sqrt{\frac{h^2}{3} + 9} = 2 + \sqrt{5}$$

$$\sqrt{h^2 + 6} + \sqrt{h^2 + 24} = 2\sqrt{3} + \sqrt{15} = \sqrt{3}(2 + \sqrt{5})$$

$$h^2 + 6 + h^2 + 24 + 2\sqrt{(h^2 + 6)(h^2 + 24)} = 3 \cdot (4 + 5 + 4\sqrt{5}) = 3(9 + 4\sqrt{5}) = 27 + 12\sqrt{5}$$

$$2t + 2\sqrt{(t+6)(t+24)} = 12\sqrt{5} - 6$$

$$(t+6)(t+24) = (6\sqrt{5} - 3 - t)^2$$

$$t^2 + 33t + 24 \cdot 6 = (6\sqrt{5} - 3)^2 + t^2 - 2t(6\sqrt{5} - 3)$$

$$t(33 + 6\sqrt{5} - 3) = (6\sqrt{5} - 3)^2 - 24 \cdot 6 = 9(2\sqrt{5} - 1)^2 - 9 \cdot 36$$

$$t(30 + 6\sqrt{5}) = 9(20 + 1 - 4\sqrt{5} - 18) = 9(3 - 4\sqrt{5})$$

$$t = \frac{9(3 - 4\sqrt{5})}{3(10 + 2\sqrt{5})} = \frac{9 - 12\sqrt{5}}{25 + 2\sqrt{5}} = \frac{(9 - 12\sqrt{5})(10 - 2\sqrt{5})}{100 - 20} = \frac{90 - 120\sqrt{5} - 18\sqrt{5} + 24 \cdot 5}{80}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{t+2} + \sqrt{t+9} = 2 + \sqrt{5}$$

$$(t+2) + 2\sqrt{(t+2)(t+9)} + (t+9) = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = (4+5) + 4\sqrt{5}$$

$$2t + 2\sqrt{(t+2)(t+9)} = 4\sqrt{5} - 2$$

$$\sqrt{(t+2)(t+9)} = 2\sqrt{5} - 1 - t$$

$$(t+2)(t+9) = (2\sqrt{5} - 1 - t)^2 = 20 - 4\sqrt{5} + 1 - 2t(2\sqrt{5} - 1) + (2\sqrt{5} - 1)^2$$

$$11t + 4t\sqrt{5} + 2t = (20 - 4\sqrt{5} + 1) - 18 = 3 - 4\sqrt{5}$$

$$9 \cdot 8 \cdot \sqrt{5}$$

$$t(9 + 4\sqrt{5}) = 3 - 4\sqrt{5} \quad \frac{h^2}{3} = \frac{3 - 4\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}}$$

$$\frac{9 - 12\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}} = \frac{9 + 4\sqrt{5} - 16\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}} = 1 - \frac{16\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}}$$

$$h^2 = \frac{9 - 12\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}} = \frac{(9 - 12\sqrt{5})(9 - 4\sqrt{5})}{(9 + 4\sqrt{5})(9 - 4\sqrt{5})} = \frac{(9 - 12\sqrt{5})(9 - 4\sqrt{5})}{81 - 160} = \frac{(9 - 12\sqrt{5})(9 - 4\sqrt{5})}{-79}$$

$$h^2 = 81 - 9(12\sqrt{5} + 4\sqrt{5}) + 48 \cdot 5 = 321 - 9 \cdot 16 \cdot \sqrt{5}$$

$$81 - 12 \cdot 9\sqrt{5} + 48 \cdot 5 + 48 \cdot 5$$

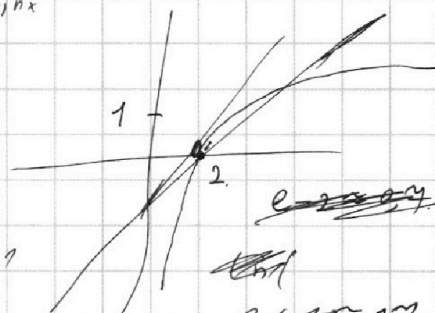
$$9^2 - 2 \cdot 9 \cdot 8\sqrt{5} + 48 \cdot 5$$

$$-1 + 1 = 0$$

$$\sin 2x = 0$$

$$\tan 2x = 0$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sin x} = 1$$



$$e + 1 = 17$$

$$\ln e = 1$$

$$x - 2 \geq \ln(x - 1)$$

$$\ln(x - 1) + 2 - x \leq 0$$

$$10x_1^2 = \frac{10}{9}x_3^2$$

$$9x_1^2 = x_3^2$$

$$9 \cdot \frac{3}{2}(a - 3) = \frac{3}{2}(a + \frac{1}{3})$$

$$9a - 27 = a + \frac{1}{3} \Rightarrow 8a = 27 + \frac{1}{3} = \frac{27 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{82}{3}$$

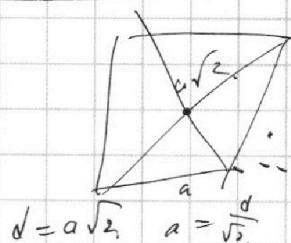
$$8a = \frac{82}{3} \Rightarrow a = \frac{82}{3 \cdot 8} = \frac{41}{12}$$

$$x_1^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{41}{12} - \frac{36}{12} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{12}$$

$$x_3^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{41}{12} + \frac{4}{12} \right) = \frac{3 \cdot 45}{2 \cdot 12}$$

$$\sqrt{\frac{15 \cdot 5}{12}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 5}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$S = a^2 = \left(\frac{d}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{d^2}{2}$$





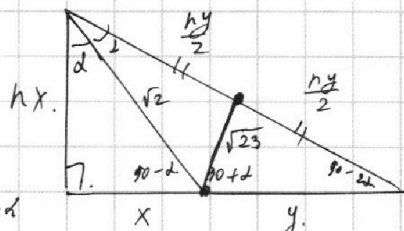
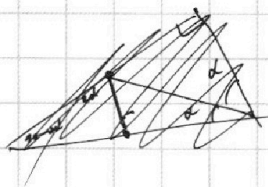
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~cos d~~

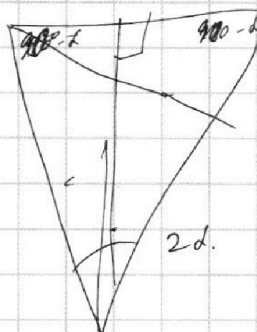
$$x^2 = n^2 x^2 + 2 - 2\sqrt{2} \cdot nx \cdot \cos d$$

$$\cos d = \frac{n^2 x^2 + 2 - x^2}{2\sqrt{2} \cdot nx}$$

$$23 = \frac{n^2 y^2}{4} + 2 - \frac{ny}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos d$$

$$\cos d = \frac{\frac{n^2 y^2}{4} - 21}{ny \sqrt{2}}$$

$$90 - 2d \quad d.$$



$$(n^2 x^2 + 2 - x^2)y = \frac{n^2 y^2}{2} - 42.$$
$$-4 \quad -4 \quad -5.$$

$$4 + 4 + 5 + 4 + 2 + 2 =$$

$$27/34.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1. \quad 6 \operatorname{tg} 2x - 1 + \operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$4 + 4 + 5 + 4 + 6 + 5 + 6 = 34$$

$$\operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\cos(x - \frac{\pi}{4})}{\sin(x - \frac{\pi}{4})} = \frac{\cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}$$

$$\frac{2 \sin x \cdot \cos x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} + \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} = 1$$

$$\begin{matrix} a & b & c \\ + & + & + \\ - & + & - \end{matrix} \quad 5 \log_2 2 = 5$$

$$\log_2 32 = \log_2 4 \cdot 8 = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$$

$$2 \sin x \cdot \cos x - (\cos x + \sin x)^2 = \cos 2x$$

$$\log_a(a \cdot b) = \log_a a + \log_a b$$

$$2 \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x - 2 \cos x \cdot \sin x - \sin^2 x = \cos 2x$$

$$\log_a(a \cdot \frac{1}{a}) = \log_a a + \log_a \frac{1}{a} = 1 - 1 = 0$$

$$-2 \cos^2 x + 10 \cos x \cdot \sin x = 0$$

$$\log_2 2 = 1$$

$$\log_2 4 = 2$$

$$\log_2 8 = 3$$

$$\log_2 16 = 4$$

$$\log_2 32 = 5$$

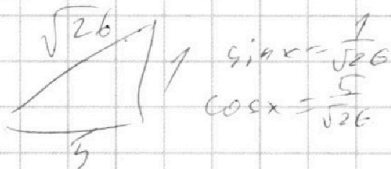
$$\cos x (\cos x - 5 \sin x) = 0$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x = 0$$

$$2) \cos x = 5 \sin x$$

$$\operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{4}) = \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) = 1$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{5} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{5} \Rightarrow \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{25}{24} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$



$$\operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\cos(x - \frac{\pi}{4})}{\sin(x - \frac{\pi}{4})} = \frac{\cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x}$$

$$n_2(a, b, c) \in \mathbb{Z}$$

$$a = b \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

$$b = b \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$$

$$c = b \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$$

$$b^2 = ac$$

$$\ln^2(x-1) - (x-2)(\ln 3 + \ln(x-1)) + (\ln 3) \cdot \ln(x-1) \geq 0$$

$$\ln(3x-3) = \ln(3(x-1)) = (\ln 3 + \ln(x-1))$$

$$\ln^2(x-1) - (x-2)(\ln 3 + \ln(x-1)) + (\ln 3)(\ln(x-1)) \geq 0$$

$$t^2 - (e^t - 1)(\ln 3 + t) + (\ln 3) \cdot t \geq 0$$

$$\ln^2(x-1) - (x-2)(\ln 3 + \ln(x-1)) + (\ln 3)(\ln(x-1)) \geq 0$$

$$(\ln(x-1) + 1)(\ln(x-1) + \ln 3) - (x-2)(\ln 3 + \ln(x-1)) + \ln 3(\ln(x-1) + 1) \geq 0$$

$$(\ln(x-1) + 1)(\ln(x-1) + \ln 3) - (x-2)(\ln 3 + \ln(x-1)) + \ln 3(\ln(x-1) + 1) \geq 0$$

$$(\ln(x-1) + 1)(\ln(x-1) + \ln 3) - (x-2)(\ln 3 + \ln(x-1)) + \ln 3(\ln(x-1) + 1) \geq 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\ln^2(x-1) + (1-x)(\ln 3 + \ln(x-1)) + \ln 3 + \ln(x-1) + (\ln 3) \cdot \ln(x-1) \geq 0$$

$$(\ln(x-1) + 1)(\ln(x-1) + \ln 3) + (\ln 3 + \ln(x-1)) \cdot (1-x) \geq 0$$

$$(\ln 3 + \ln(x-1))(\ln(x-1) + 1 + 1-x) \geq 0$$

$$(\ln(3x-3)) \cdot (\ln(x-1) + 2-x) \geq 0$$

$$\ln(x-1) \geq x-2$$

$$2 = \log_e e^2$$

$$x = \log_e e^x$$

$$\ln(x-1) + \ln e^2 - \ln e^x \geq 0$$

$$\ln(e^2 \cdot (x-1)) \geq \ln e^x$$

$$e^2 \cdot (x-1) \geq e^x$$

$$(x-1) \geq \frac{e^x}{e^2} = e^{x-2}$$



$$f(x) = \ln(x-1)$$

$$g(x) = x-2$$

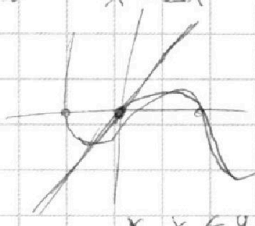
$f(x)$	1	0.7	1
$g(x)$	0	1	1.4

$$\ln(x-1) = x-2 = (x-1) - 1$$

$$\ln a = a-1$$

$$\ln a \cdot e = a$$

$$\ln' x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{x+\Delta x - x} = \frac{\ln(4 + \frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}}$$

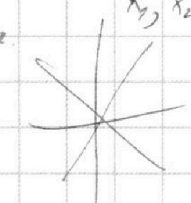


$$y = -\frac{2x^3}{3} + ax = x(-\frac{2x^2}{3} + a)$$

$$y(0) = 0$$

$$x(a - \frac{2x^2}{3}) = 0$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}a}$$



$$-\frac{2x^3}{3} + ax = 3x$$

$$-\frac{2x^2}{3} + a = 3$$

$$a-3 = \frac{2x^2}{3}$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}(a-3)}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}}$$

$$-\frac{2x^3}{3} + ax = -\frac{1}{3}x$$

$$-\frac{2}{3}x^2 + a = -\frac{1}{3}$$

$$a + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}x^2$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{2(a-3)}{3}}$$

$$y_1 = 3x_1 = \sqrt{6(a-3)}$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{2(a-3)}{3}}$$

$$y_2 = \sqrt{6(a-3)}$$

$$x_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}}$$

$$y_3 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}}$$

$$x_4 = \sqrt{\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}}$$

$$y_4 = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}}$$

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$$

$$x_3^2 + y_3^2 = x_4^2 + y_4^2$$

$$\frac{3}{2}a + \frac{1}{2} = 2 \cdot 3(a-3) = 6a-18$$

$$3a+1 = 12a-36$$

$$37 = 9a$$

$$a = \frac{37}{9}$$

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$\cos x = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

$$\sin 2x = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$$

$$\cos 2x = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$$