МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 8

1. [4 балла] Решите уравнение

$$6\operatorname{tg} 2x - 1 + \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $13^{180} \cdot 17^{180}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2(x-1) - (x-2)\ln(3x-3) + (\ln 3)\ln(x-1) \geqslant 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -\frac{2x^3}{3} + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC. Лучи DE и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{23}}$.

6. [5 баллов] Числа x, y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{11}{y^3} = y^3 + \frac{11}{z^3} = z^3 + \frac{11}{x^3}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения xyz.

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{15}$, $AD = DC = \sqrt{6}$, $AC = 2\sqrt{3}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2\sqrt{3} + \sqrt{15}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB, SBC и ребра SD.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 1.

$$ctg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\cos x\cdot\frac{\sqrt2}{2}+\sin x\cdot\frac{\sqrt2}{2}}{\sin x\cdot\frac{\sqrt2}{2}-\cos x\cdot\frac{\sqrt2}{2}}$$

$$ctg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\cos x+\sin x}{\sin x-\cos x}$$

$$6\,tg\,2x-1+ctg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$tg\,2x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\frac{2\sin x\cdot\cos x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}$$

$$\frac{12\sin x\cdot\cos x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}+\frac{\cos x+\sin x}{\sin x-\cos x}=1\Rightarrow 12\sin x\cdot\cos x-(\cos x+\sin x)^2=$$

$$=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=\cos^2x-\sin^2x$$

$$12\sin x\cdot\cos x-\cos^2x-2\sin x\cdot\cos x-\sin^2x=\cos^2x-\sin^2x$$

$$-2\cos^2x+10\sin x\cdot\cos x=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=5\sin x\end{array}\right.$$

1) $\cos x=0$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$.

2) $\cos x=5\sin x$

$tg\,x=\frac{1}{5}$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}\\ x=arctg\left(\frac{1}{5}\right)+\pi k, k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 2.

$a, b, c \in \mathbb{Z}$.

a, b и c в указанном порядке образуют геом. прогрессию.

По свойству геом. прогрессии $b^2 = ac$.

$a \cdot b \cdot c = (a \cdot c) \cdot b = b^3 = 13^{180} \cdot 17^{180} \Rightarrow b = 13^{60} \cdot 17^{60}$.

Пусть $a = 13^{\alpha} \cdot 17^{\beta}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, $\alpha, \beta \in [0; 120]$.

Тогда $c = \frac{13^{180} \cdot 17^{180}}{a \cdot b} = 13^{120-\alpha} \cdot 17^{120-\beta}$

Шаг такой прогрессии равен $q = 13^{60-\alpha} \cdot 17^{60-\beta}$.

Каждому a соответствует лишь одно c. Количество способов выбрать a равно $121 \cdot 121 = 14641$.

Заметим, что a и c могут быть отрицательными.

Тогда $a = -13^{\alpha} \cdot 17^{\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, $\alpha, \beta \in [0; 120]$ и $c = -13^{120-\alpha} \cdot 17^{120-\beta}$

Тогда шаг последовательности равен $q = -13^{60-\alpha} \cdot 17^{60-\beta}$.

В таком случае мы получаем ещё $121 \cdot 121 = 14641$ троек.

$N = N_1 + N_2 = 2 \cdot 14641 = 29282$

Ответ: $N = 29282$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 3.

$\ln^2(x-1) - (x-2)\ln(3x-3) + (\ln 3)\ln(x-1) \geq 0$

$\ln(3x-3) = \ln(3\cdot(x-1)) = \ln 3 + \ln(x-1)$

$\ln^2(x-1) + (2-x)(\ln 3 + \ln(x-1)) + (\ln 3)\ln(x-1) \geq 0$

$\ln^2(x-1) + (1-x)(\ln 3 + \ln(x-1)) + \ln 3 + \ln(x-1) + (\ln 3)\ln(x-1) \geq 0$

$(\ln(x-1)+1)(\ln(x-1)+\ln 3) + (1-x)(\ln(x-1)+\ln 3) \geq 0$

$(\ln(x-1)+\ln 3)(\ln(x-1)+1+1-x) \geq 0$

$\ln(3x-3)\cdot(\ln(x-1)+2-x) \geq 0$

Рассмотрим ~~уравнение~~ неравенство $\ln(x-1)+2-x \geq 0$.

Заметим, что $\ln(2-1) = \ln 1 = 0$ и $(2-2)=0$.

Найдём касательную к $f(x) = \ln(x-1)$ в точке $x_0 = 2$:

$y = f(x_0) + (x-x_0)\cdot f'(x) = x-2$.

То есть $y = x-2$ это касательная к $f(x) = \ln(x-1)$

Значит при $x=2$ $\ln(x-1)+2-x=0$, при $x \neq 2$ $\ln(x-1)+2-x<0$.

Неравенство $\ln(3x-3) \geq 0 = \ln_e 1 \Rightarrow \frac{3x-3-1}{e-1} \geq 0$.

$3x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{4}{3}$

При $x \geq \frac{4}{3}$ $\ln(3x-3) \geq 0$, при $x < \frac{4}{3}$ $\ln(3x-3) < 0$.

Применим метод интервалов:

$\ln(3x-3)$: $-$ 0 $+$ $+$

$\ln(x-1)+2-x$: $-$ $-$ 0 $-$

1, $\frac{4}{3}$, 2

Учитывая ОДЗ $x-1>0$ $\Downarrow$ $x>1$

Получим: $x \in (1; \frac{4}{3}] \cup \{2\}$

Ответ: $x \in (1; \frac{4}{3}] \cup \{2\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 4.

$y = -\frac{2x^3}{3} + ax$. Заметим, что $y(0) = 0$.

Точки пересечения графиков $y = -\frac{2x^3}{3} + ax$ и $y = 3x$ являются ~~вершинами~~ точками квадрата, которые заканчивают его диагонали (кроме точки $(0;0)$, т.к. это центр диагонали).

$-\frac{2x^3}{3} + ax = 3x \overset{x\neq 0}{\Rightarrow} -\frac{2x^2}{3} + a = 3 \Rightarrow$ ~~$x = \sqrt{\frac{3}{2}(a-3)}$~~ $x^2 = \frac{3}{2}(a-3)$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}(a-3)}$. $a > 3$

$y_{1,2} = \pm 3\sqrt{\frac{3}{2}(a-3)}$

Диагонали ~~квад~~ ~~квад~~ квадрата перпендикулярны, следовательно остальные 2 точки квадрата лежат на прямой $y = -\frac{1}{3}x$ (т.к. прямые $y = 3x$ и $y = -\frac{1}{3}x$ перпендикулярны).

$-\frac{2x^3}{3} + ax = -\frac{1}{3}x \overset{x\neq 0}{\Rightarrow} -\frac{2}{3}x^2 + a = -\frac{1}{3} \Rightarrow x^2 = \left(a + \frac{1}{3}\right)\cdot\frac{3}{2}$.

$x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}\left(a + \frac{1}{3}\right)}$

$y_{3,4} = \mp\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}\left(a + \frac{1}{3}\right)}$.

Расстояния от каждой точки квадрата до его центра равны между собой, то есть:

~~$(x_1-0)^2 + (y_1-0)^2 + (x_3$~~ $(x_1-0)^2 + (y_1-0)^2 = (x_3-0)^2 + (y_3-0)^2$.

т.к. центр квадрата находится в точке $(0;0)$.

$x_1^2 + y_1^2 = x_3^2 + y_3^2$.

$\frac{3}{2}(a-3) + 9\left(\frac{3}{2}(a-3)\right) = \frac{3}{2}\left(a+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}\left(a+\frac{1}{3}\right)\right)$

$(a-3)\cdot 15 = \left(a+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{5}{3}$

$9(a-3) = \left(a + \frac{1}{3}\right)$.

$9a - a = 27 + \frac{1}{3}$

$8a = \frac{81+1}{3} = \frac{82}{3}$

$a = \frac{82}{24} = \cancel{\frac{41}{12}}\ \frac{41}{12}$

Найдём половину диагонали:

$\frac{d}{2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{41}{12} - 3\right) + 9\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{41}{12} - 3\right)} =$

$= \sqrt{15}\cdot\sqrt{\frac{5}{12}} = \frac{5}{2}$.

$d = 5$ – диагональ квадрата.

$S = \left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{d^2}{2} = \frac{25}{2}$ – площадь квадрата.

Ответ: $a = \frac{41}{12}$, $S = \frac{25}{2}$.

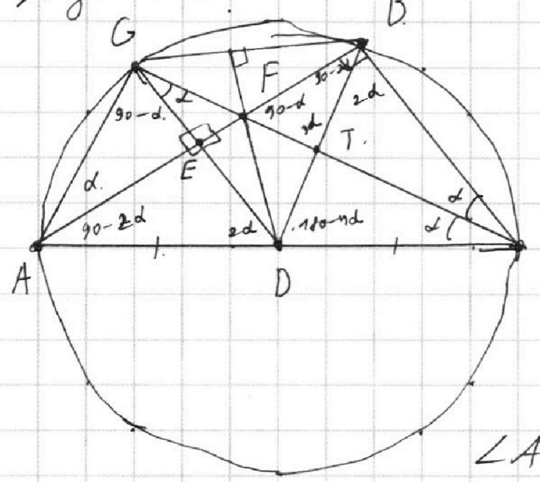
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.



$\angle ACF = \angle FCB$. (CF - бисс.)

$DE \parallel BC$ (DE - ср. линия).

Пусть $\angle ACF = \alpha = \angle FCB$.

Тогда $\angle ADE = \angle ACB = 2\alpha$.

$\angle GDC = 180^\circ - \angle ADE = 180^\circ - 2\alpha$.

$\angle DGC = 180^\circ - \angle GDC - \angle ACG = \alpha$.

$\angle DGC = \angle DCG \Rightarrow GD = DC$.

$AD = CD$ (D - середина AC).

$AD = CD = GD \Rightarrow \angle AGC = 90^\circ$ (GD - медиана)

$\angle AGC = 90^\circ \Rightarrow AC$ - диаметр ($\breve{AC} = 180^\circ$).

D - середина диаметра AC => D - центр окружности.

$\angle ABC = \angle AGC = 90^\circ = \angle AED$.

$DB = CD \Rightarrow \angle BDC = 180^\circ - 4\alpha$

$\angle BAC = 90^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle ADE = 2\alpha$

$\angle GDB = 180^\circ - 2\alpha - (180 - 4\alpha) = 2\alpha$. $GD = BD \Rightarrow \angle DGB = \angle DBG = \frac{180 - 2\alpha}{2}$

$\angle DGB = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle CGB = 90 - 2\alpha$.

$\angle DBG = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle ABG = \alpha$.

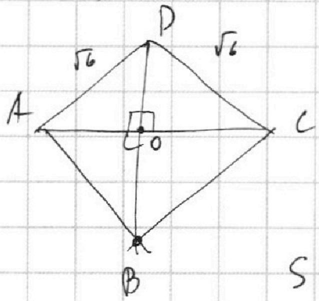
$BD \parallel AG \Rightarrow \angle DTC = 90^\circ = \angle FTB \Rightarrow$ ~~DF = FB~~

~~[illegible] = BF~~ $\alpha = 30^\circ$.

Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BCA = 60^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$

Задача 7

Рассмотрим $ABCD$:



$AD=CD,\ AB=BC \Rightarrow AC\perp BD,\ AO=OC=\frac{AC}{2}$

$AO=\sqrt{3} \Rightarrow OD=\sqrt{AD^2-AO^2}=\sqrt{3}$

$OB=\sqrt{BC^2-OC^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$BD=OD+OB=3\sqrt{3}$

$SD\perp ABCD \Rightarrow SA^2=SD^2+AD^2,\ SB^2=SD^2+BD^2.$

Пусть $SD=h$. Тогда $SA=\sqrt{h^2+6}$, $SB=\sqrt{h^2+27}$.

По условию $SA+SB=2\sqrt{3}+\sqrt{15}$

$\sqrt{h^2+6}+\sqrt{h^2+27}=2\sqrt{3}+\sqrt{15}=\sqrt{3}(2+\sqrt{5})$

$\sqrt{\frac{h^2}{3}+2}+\sqrt{\frac{h^2}{3}+9}=(2+\sqrt{5})$ Пусть $\frac{h^2}{3}=t$.

$t+2+t+9+2\sqrt{(t+2)(t+9)}=(2+\sqrt{5})^2=9+4\sqrt{5}.$

$t+\sqrt{(t+2)(t+9)}=2\sqrt{5}-1.$

$(t+2)(t+9)=(2\sqrt{5}-1-t)^2$

$t^2+11t+18=t^2-2t(2\sqrt{5}-1)+(2\sqrt{5}-1)^2=t^2-4t\sqrt{5}+2t+20-4\sqrt{5}+1$

$9t+4t\sqrt{5}=3-4\sqrt{5}$

$t=\frac{3-4\sqrt{5}}{9+4\sqrt{5}} \Rightarrow h^2=\frac{9-12\sqrt{5}}{9+4\sqrt{5}}=(9-12\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})=81+240-4\sqrt{5}(27+9)$

$h^2=321-36\cdot 4\sqrt{5}.$

$h=SD=\sqrt{321-144\sqrt{5}}$

$V=\frac{1}{3}\cdot h\cdot S_{ABCD}=\frac{\sqrt{321-144\sqrt{5}}}{3}\cdot\frac{AC\cdot BD}{2}=3\sqrt{321-144\sqrt{5}}$ – объём пирамиды

Ответ: $V=3\sqrt{321-144\sqrt{5}}$ – объём пирамиды

Пусть O' – проекция центра сферы на ~~BD~~ $ABCD$.

Сфера касается сторон SAB и SBC, поэтому .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

[illegible] $b^2 = ac$

$abc = b^3 = 13^{180} \cdot 17^{180}$

$b = 13^{60} \cdot 17^{60}$

$ac = 13^{120} \cdot 17^{120}$

$a = 13^{\alpha} \cdot 17^{\beta}$

$c = 13^{(120-\alpha)} \cdot 17^{(120-\beta)}$

$\alpha, \beta \in [0; 120]$

α, β

$120 \cdot 120 = 14400$

Ответ: $14400 \cdot 2 = 28800$

$a = -13^{\alpha} \cdot 17^{\beta}$

$c = -13^{(120-\alpha)} \cdot 17^{(120-\beta)}$

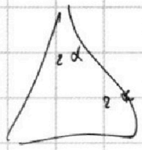
[illegible]

13^{120}, $13^{60} \cdot 17^{60}$, 17^{120}

$13^{\alpha} \cdot 17^{\beta}$, $13^{60} \cdot 17^{60}$, $13^{120-\alpha} \cdot 17^{120-\beta}$

$d = 13^{60-\alpha} \cdot 17^{60-\beta}$

$x_1^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{41}{21} - \frac{3 \cdot 21}{21}\right)$

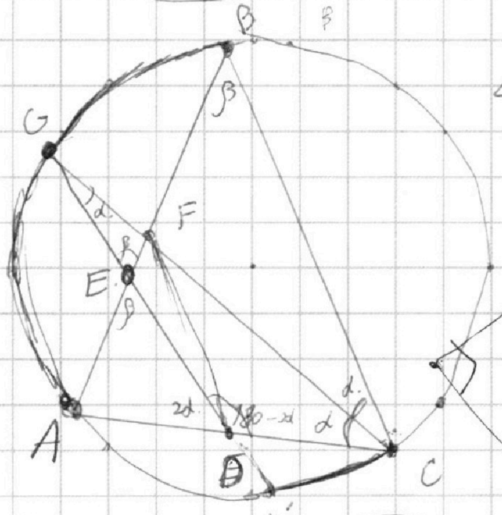


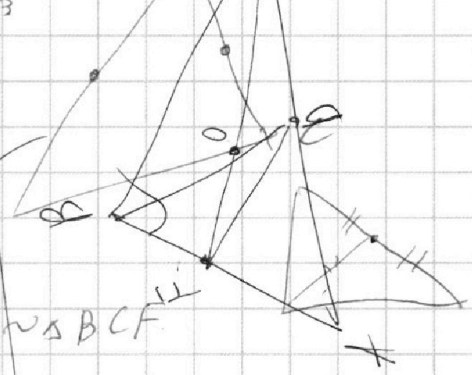
$\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{23}}$

$\angle DGC = \alpha$

$CF = x\sqrt{2}$

$DF = x\sqrt{23}$





A

$\triangle CEF \sim \triangle BCF$

$360 = 180 - \alpha + 180 - \beta + \varphi$

$\varphi = \alpha + \beta$

$\angle EFC = \alpha + \beta$

$\angle AGC = 90^\circ$

$\overset{\frown}{AC} = 180^\circ$

$\overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{AG} = \overset{\frown}{GB}$

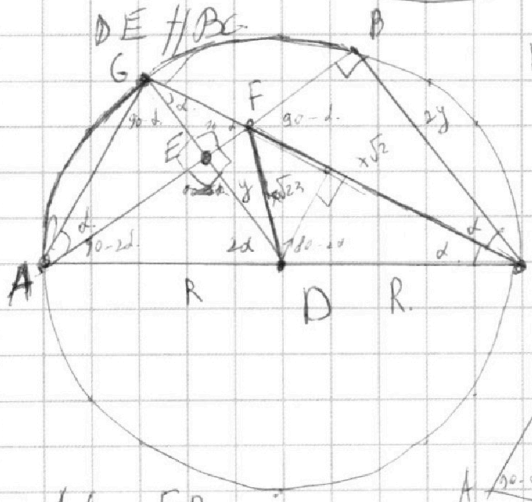
$GD = DC$

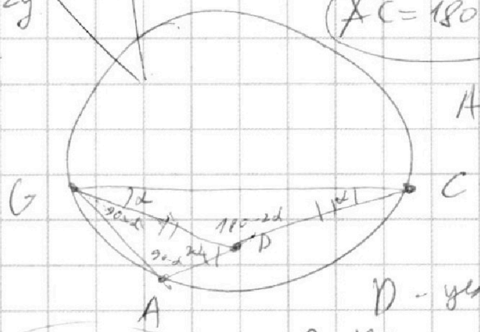
$DE \parallel BC$

$BC = 2y$

$DE = y$

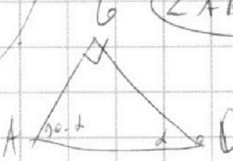
AC – диаметр.

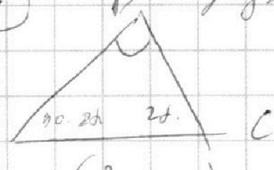




D – центр окружности

$\angle ABC = 90^\circ$





$\frac{AG}{2R} = \frac{FB}{x\sqrt{2}}$

$23x^2 = 2x^2 + R^2 - 2 \cdot x\sqrt{2} \cdot R \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{R^2 - 21x^2}{2x\sqrt{2} \cdot R} = \frac{x\sqrt{2}}{2y}$

$(R^2 - 21x^2)\, y = x\sqrt{2} \cdot x\sqrt{2} \cdot R = 2x^2 R$

$\cancel{180} - 90 + \alpha - 90 + 2\alpha + \varphi = \cancel{180}$

$\varphi = \cancel{180} - 3\alpha$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$x^3+\frac{11}{y^3}=y^3+\frac{11}{z^3}=z^3+\frac{11}{x^3}$$

$$\begin{cases} x^3+\frac{11}{y^3}=t \\ y^3+\frac{11}{z^3}=t \\ z^3+\frac{11}{x^3}=t \end{cases} \qquad x^3+y^3+z^3:$$

$$\begin{cases} x^3y^3z^3+11z^3=ty^3z^3 \\ x^3y^3z^3+11x^3=tx^3z^3 \\ x^3y^3z^3+11y^3=ty^3z^3 \end{cases}$$

$$x^6y^3z^3+11x^3z^3=x^3y^6z^3+11x^3y^3=x^3y^3z^6+11y^3z^3$$

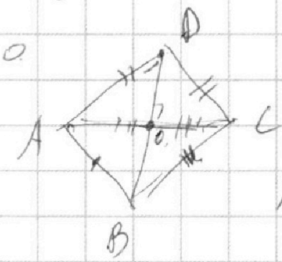
$$x^6y^3z^3+11x^3z^3=x^3y^6z^3+11x^3y^3$$

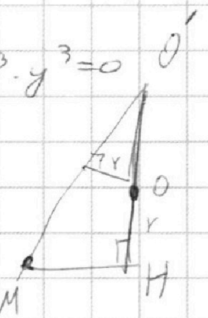
$$x^3(x^3y^3z^3)+x^3\,11z^3-x^3\cdot y^6z^3-11x^3\cdot y^3=0$$

$$11x^3(z^3-y^3)+z^3\cdot x^6y^3-z^3\cdot x^3y^6=0$$

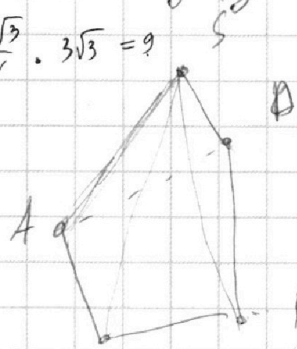
$$11(z^3-y^3)+z^3\cdot x^3y^3-z^3\cdot y^6=0$$

$$11(z^3-y^3)=z^3y^3(y^3-x^3)$$





$$\frac{2/\sqrt3}{2}\cdot 3\sqrt3=9$$



$AB=BC=\sqrt{15}$

$AD=DC=\sqrt6$

$AC=2\sqrt3$

$SD\perp ABCD$

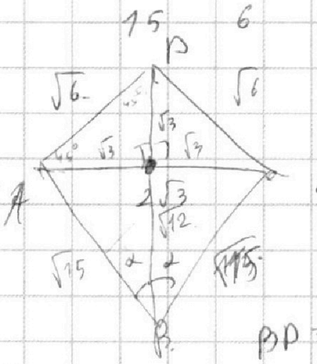
$15 \quad 6 \quad 12$

$$\frac{\sqrt3}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt3}{2\cdot\sqrt3}=\frac12$$

$\sin\alpha=\frac{\sqrt3}{\sqrt{15}}=\frac{1}{\sqrt5}$

$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt5}$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac12$



$SD=h$

$SA=\sqrt{h^2+6}$

$SB=\sqrt{h^2+27}$

$BD=\sqrt3+\sqrt{12}=\sqrt3+2\sqrt3=3\sqrt3$

$$\sqrt{\frac{h^2}{3}+2}+\sqrt{\frac{h^2}{3}+9}=2+\sqrt5$$

$$\sqrt{t+2}+\sqrt{t+9}$$

$$\sqrt{h^2+6}+\sqrt{h^2+27}=2\sqrt3+\sqrt{15}=\sqrt3\left(2+\sqrt5\right)$$

$$h^2+6+h^2+27+2\sqrt{(h^2+6)(h^2+27)}=3\cdot(4+5+4\sqrt5)=3(9+4\sqrt5)=27+12\sqrt5$$

$$2t+2\sqrt{(t+6)(t+27)}=12\sqrt5-6$$

$$(t+6)(t+27)=(6\sqrt5-3-t)^2$$

$$t^2+33t+27\cdot6=(6\sqrt5-3)^2+t^2-2t(6\sqrt5-3)$$

$$t(33+6\sqrt5-3)=(6\sqrt5-3)^2-27\cdot6=9(2\sqrt5-1)^2-9\cdot 18$$

$$t(30+6\sqrt5)=9\left((2\sqrt5-1)^2-18\right)=9(20+1-4\sqrt5-18)=9(3-4\sqrt5)$$

$$t=\frac{9(3-4\sqrt5)}{3(10+2\sqrt5)}=\frac{9-12\sqrt5}{10+2\sqrt5}=\frac{(9-12\sqrt5)(10-2\sqrt5)}{100-20}=\frac{90-120\sqrt5-18\sqrt5+24\cdot5}{80}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{t+2}+\sqrt{t+9}=2+\sqrt{5}$

$t+2+2\sqrt{(t+2)(t+9)}+t+9=4+4\sqrt5+5=9+4\sqrt5$

$2t+2\sqrt{(t+2)(t+9)}=4\sqrt5-2$

$\sqrt{(t+2)(t+9)}=2\sqrt5-1-t$

$t^2+11t+18=(t-(2\sqrt5-1))^2=t^2-2\cdot t\cdot(2\sqrt5-1)+(2\sqrt5-1)^2$

$11t+4t\sqrt5-2t=(20-4\sqrt5+1)-18=3-4\sqrt5$

$t(9+4\sqrt5)=3-4\sqrt5$ $\qquad \frac{h^2}{3}=\frac{3-4\sqrt5}{9+4\sqrt5}$

$16\cdot3=48$

$\begin{array}{r} \times 16 \\ 9 \\ \hline 144 \end{array}$ $\qquad \begin{array}{r} \times 41 \\ 3 \\ \hline 144 \end{array}$

$9\cdot 8\sqrt5$

$\frac{9-12\sqrt5}{9+4\sqrt5}=\frac{9+4\sqrt5-16\sqrt5}{9+4\sqrt5}=1-\frac{16\sqrt5}{9+4\sqrt5}$

$h^2=\frac{9-12\sqrt5}{9+4\sqrt5}=\frac{(9-12\sqrt5)(9-4\sqrt5)}{(9+4\sqrt5)(9-4\sqrt5)}=\frac{(9-12\sqrt5)(9-4\sqrt5)}{81-80}=(9-12\sqrt5)(9-4\sqrt5)$

$h^2=81-9(12\sqrt5+4\sqrt5)+48\cdot5=321-9\cdot16\cdot\sqrt5$ $\qquad 81-12\cdot9\sqrt5-4\sqrt5\cdot9+48\cdot5$

$9^2-2\cdot9\cdot8\sqrt5+48\cdot5$

$-1+1=0$

$\sin 2x=0$

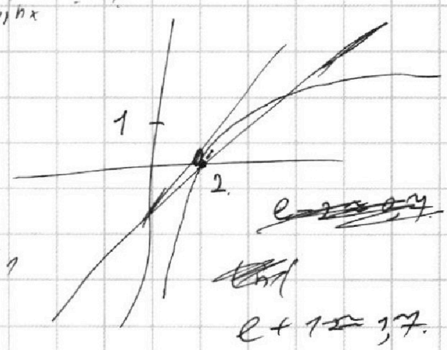
$tg\, 2x=0$

$ctg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin x}{\sin x}=1$

$\begin{array}{r} \times 121 \\ 121 \\ \hline 121 \\ 242 \\ 121 \\ \hline 14641 \end{array}$ $\qquad \frac{x-2}{x-1}$ $\qquad \begin{array}{r} \times 14641 \\ 2 \\ \hline 29282 \end{array}$

$\ln(2-1)=0.$

$(x-2)=1$



$\ln(x-1)+2-x\geq0.$

$\ln(x-1)\geq x-2$

$(\ln(x-1))'=\frac{1}{x-1}$

$e+1\approx3{,}7.$

$\ln e\approx1.$

$y(2).$ $\qquad y=f(x_0)+(x-x_0)\cdot f'(x)=$

$y=0+(x-2)\cdot\frac{1}{1}.$

$(\ln(x-1))'=\frac{1}{x-1}$ $\qquad \frac{x-2}{x-1}$

$x-2\geq\ln(x-1)$

$\ln(x-1)+2-x\leq0$

$10x_1^2=\frac{10}{9}x_3^2$

$9x_1^2=x_3^2$

$9\cdot\frac{3}{2}(a-3)=\frac{3}{2}\left(a+\frac{1}{3}\right)$

$9a-27=a+\frac13$

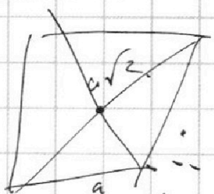
$8a=27+\frac13=\frac{27\cdot3+1}{3}=\frac{82}{3}$

$a=\frac{82}{3\cdot8}=\frac{41}{3\cdot4}=$

$x_1^2=\frac32\left(\frac{41}{12}-\frac{36}{12}\right)=\frac32\cdot\frac{5}{12}$

$x_3^2=\frac32\left(\frac{41}{12}+\frac{4}{12}\right)=\frac{3\cdot45}{2\cdot12}$

$\sqrt{\frac{15\cdot5}{12}}=\sqrt{\frac{5\cdot5}{4}}=\frac52$



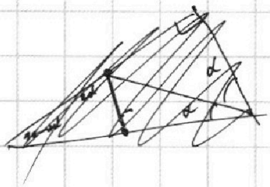
$S=a^2=\left(\frac{d}{\sqrt2}\right)^2=\frac{d^2}{2}.$ $\qquad d=a\sqrt2,$ $\quad a=\frac{d}{\sqrt2}.$

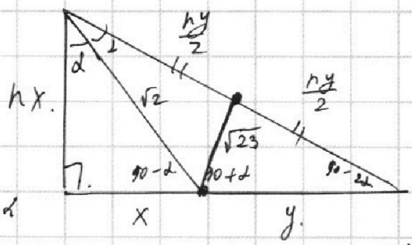
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ





$x^2 = n^2x^2 + 2 - 2\sqrt{2}\cdot nx\cdot\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{n^2x^2+2-x^2}{2\sqrt{2}\,nx}$

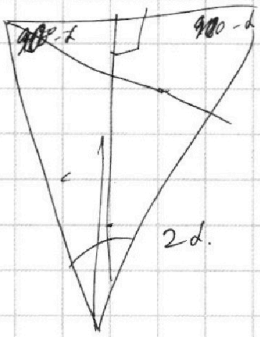
$23 = \frac{n^2y^2}{4} + 2 - \cancel{2}\cdot\frac{ny}{\cancel{2}}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{\frac{n^2y^2}{4} - 21}{ny\sqrt{2}}$

$90-2\alpha \quad \alpha$

$(n^2x^2+2-x^2)y = \frac{n^2y^2}{2} - 42.$

$-4 \quad -4 - 5.$



$4+4+5+4+2+2=$

$\cancel{\ }:21 \,/\, 34.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$4+4+5+4+6+5+6=$

$17+17=34.$

$6\,tg\,2x-1+ctg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$ctg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\cos x\cdot\frac{\sqrt2}{2}+\sin x\cdot\frac{\sqrt2}{2}}{\sin x\cdot\frac{\sqrt2}{2}-\cos x\cdot\frac{\sqrt2}{2}}=\frac{\cos x+\sin x}{\sin x-\cos x}$

$tg\,2x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\frac{2\sin x\cdot\cos x}{\cos^2x-\sin^2x}=\frac{2\sin x\cdot\cos x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}$

$\frac{12\sin x\cdot\cos x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}+\frac{\cos x+\sin x}{\sin x-\cos x}=1.$

a b c
+ + +
− + −

$5\log_2 2=5$

$\log_2 32=\log_2 4\cdot 8=$

$\log_2 4+\log_2 8=$

$\log_c(a\cdot b)=\log_c a+\log_c b$

$\log_c\left(a\cdot\frac{1}{b}\right)=\log_c a+\log_c\frac{1}{b}=$

$\log_c a-\log_c b$

$12\sin x\cdot\cos x-(\cos x+\sin x)^2=\cos 2x$

$12\sin x\cdot\cos x-\cos^2x-2\cos x\cdot\sin x-\sin^2x=\cos^2x-\sin^2x$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi n$

$-2\cos^2x+10\cos x\cdot\sin x=0$

1) $\cos x=0$

$\cos 2x=2\cos^2x-1=-1.$

$\sin 2x=2\cdot\sin x\cdot\cos x=0.$

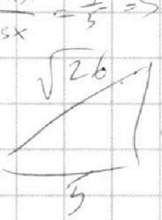
$tg\,2x=0$

$\cos x(\cos x-5\sin x)=0.$

2) $\cos x=5\sin x.$

$ctg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=ctg\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=1.$

$\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{5}\Rightarrow tg\,x=\frac{1}{5}\Rightarrow tg\,2x=\frac{2\cdot\frac15}{1-\frac{1}{25}}=\frac{\frac{2\cdot5}{25}}{\frac{24}{25}}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}.$

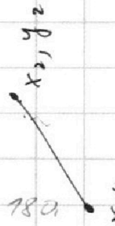


$\sin x=\frac{1}{\sqrt{26}}$

$\cos x=\frac{5}{\sqrt{26}}$

$ctg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5+1}{1-5}=-\frac{3}{2}$

$\frac{5}{2}-1-\frac{3}{2}=0$ ✓



$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

$a\cdot b\cdot c=13^{180}\cdot 17^{180}$

№2 $(a;b;c)\in\mathbb{Z}.$

$a=b_0$

$b=b_0\cdot q\Rightarrow b^2=a\cdot c$

$c=b_0\cdot q^2$

$b^2=ac.$

$b^3=13^{180}\cdot17^{180}$

$b=13^{60}\cdot17^{60}$

$\ln^2(x-1)-(x-2)\ln(3x-3)+(\ln 3)\cdot\ln(x-1)\geq 0$

$\ln(x-1)=t.$

$e^{\ln(x-1)}=x-1=e^t$

$\ln(3x-3)=\ln(3(x-1))=(\ln 3+\ln(x-1))$

$\ln^2(x-1)-(x-2)(\ln 3+\ln(x-1))+(\ln 3)(\ln(x-1))\geq 0$

$t^2-(e^t-1)(\ln 3+t)+(\ln 3)\cdot t\geq 0$

$\ln^2(x-1)-(x-1)\cdot(\ln 3+\ln(x-1))+\ln 3+\ln(x-1)+\ln 3\cdot\ln(x-1)\geq 0$

~~$(\ln(x-1)+1)(\ln 3+1)$~~

$\ln(x-1)(\ln(x-1)+1)-(x-1)(\ln 3+\ln(x-1))+\ln 3(\ln(x-1)+1)\geq 0.$

$(\ln(x-1)+1)(\ln(x-1)+\ln 3)-(x-1)(\ln 3+\ln(x-1))\geq 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\ln^2(x-1)+(1-x)(\ln 3+\ln(x-1))+\ln 3+\ln(x-1)+(\ln 3)\cdot\ln(x-1)\geq 0$

$(\ln(x-1)+\cancel{1})(\ln(x-1)+\ln 3)+(\ln 3+\ln(x-1))\cdot(1-x)\geq 0$

$(\ln 3+\ln(x-1))(\ln(x-1)+1+1-x)\geq 0$

$(\ln(3x-3)\cdot(\ln(x-1)+2-x)\geq 0)$

$(90-2\alpha)+(90-\alpha)+\varphi=180$

$\varphi=3\alpha$

$\ln(x-1)+2-x\geq 0$

$\ln(x-1)\geq x-2$

$2=\log_e e^2$

$x=\log_e e^x$

$e>2$

$\ln(x-1)+\ln e^2-\ln e^x\geq 0$

$\ln(e^2\cdot(x-1))\geq\ln e^x$

(1) (4) (3 I)

$\frac{1}{x}=x$

$x=1$

$e^2\cdot(x-1)\geq e^x$

$(x-1)\geq\frac{e^x}{e^2}=e^{x-2}$

$x>1$

$36\cdot 4=144$

$\ln(x-1)=x-2=(x-1)-1$

$\ln a=a-1$

$\ln a\cdot e=a$

$e\approx 3$

$f(x)=\ln(x-1)$

$g(x)=x-2$ $\approx 3{,}7$

x	2	3	$e+1$
$f(x)$	1	0,7	1
$g(x)$	0	1	1,7

$\ln' x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{x-\Delta x}=\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{x-\Delta x}$

$\frac{1}{x}$?

$y=-\frac{2x^3}{3}+ax=x\left(-\frac{2x^2}{3}+a\right)$

$y(0)=0$

$x\left(a-\frac{2x^2}{3}\right)$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}a}$

есть 2 корня ($x\neq 0$)

$x_1, x_2\in y=3x$

$-\frac{2x^3}{3}+ax=3x$

$a>3$

2-ая диагональ на прямой

$-\frac{2x^2}{3}+a=3$

$x_4^2+y_4^2=$

$y=\cancel{2x}-\frac{1}{3}x$

$a-3=\frac{2x^2}{3}$

$x_4^2+\frac{1}{9}x_4^2=$

$\frac{-2x^3}{3}+ax=-\frac{1}{3}x$

$\cancel{d(x_1,0)=d(x_2,0)}=\ldots$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{2(a-3)}{3}}$

$\frac{10}{9}x_4^2$

$x_1=-\sqrt{\frac{2(a-3)}{3}}$

$-\frac{2}{3}x^2+a=-\frac{1}{3}$

$x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}}$

$y_1=3x_1=-\sqrt{6(a-3)}$

$x_3, x_4\in y=-\frac{1}{3}x$

$a+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}x^2$

$x_2=-\sqrt{\frac{2(a-3)}{3}}$

$\sin x=\frac{1}{\sqrt{26}}$

$x_3=-\sqrt{\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}}$

$x_4^2+y_4^2=x_1^2+y_1^2$

$y_2=\sqrt{6(a-3)}$

$\cos x=\frac{5}{\sqrt{26}}$

$y_3=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}}$

$\frac{10}{9}\cdot\left(\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}\right)=10\left(\frac{2(a-3)}{3}\right)$

$x_4=\sqrt{\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}}$

$\cos 2x=2\cdot\frac{25}{26}-\frac{26}{26}$

$y_4=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}}$

$\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}=2\cdot 3(a-3)=6a-18$

$\sin 2x=\frac{10}{26}=\frac{5}{13}$

$\frac{24}{26}=\frac{12}{13}$

$3a+1=12a-36$

$37=9a$

$\operatorname{tg} x=$

$\operatorname{tg} 2x=\frac{5}{12}$

$a=\frac{37}{9}$

$\frac{\frac{5}{12}-1}{2}=\frac{3}{2}=\frac{\frac{5}{3}}{-\frac{5}{7}}$

$\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5+1}{1-5}=-\frac{3}{2}$