



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Решите уравнение

$$4 \operatorname{tg} 2x + 1 + \operatorname{ctg} \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел  $(a; b; c)$  таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение  $abc$  равно  $3^{240} \cdot 7^{240}$ ?

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2(x+2) - (x+1) \ln(4x+8) + (\ln 4) \ln(x+2) \geq 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции  $y = -2x^3 - ax$ . Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой  $y = 5x$ , а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра  $a$  и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника  $ABC$  описана окружность  $\Omega$ . Точки  $D$  и  $E$  – середины сторон  $AC$  и  $AB$  соответственно,  $CF$  – биссектриса треугольника  $ABC$ . Лучи  $DE$  и  $CF$  пересекаются в точке  $G$ , принадлежащей  $\Omega$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что  $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{11}}$ .

6. [5 баллов] Числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} = z^3 + \frac{10}{x^3}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения  $x y z$ .

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит четырёхугольник  $ABCD$ , в котором  $AB = BC = \sqrt{10}$ ,  $AD = DC = 2$ ,  $AC = 2\sqrt{2}$ . Ребро  $SD$  – высота пирамиды. Известно, что  $SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10}$ . Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней  $ABCD$ ,  $SAB$ ,  $SBC$  и ребра  $SD$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1.

$$4 \operatorname{tg} 2x + 1 + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$4 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 0$$

$$\frac{8 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 1 + \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0$$

$$\frac{8 \operatorname{tg} x + 1 - \operatorname{tg}^2 x + 1 - 2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 0$$

$$\frac{6 \operatorname{tg} x + 2}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 0$$

$$\begin{cases} 6 \operatorname{tg} x = -2 \\ \operatorname{tg}^2 x \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x = -\frac{1}{3} \\ \operatorname{tg} x \neq \pm 1 \end{cases} \Rightarrow x = \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: ~~то~~  $x = \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2.

Пусть  $b = aq$ ;  $c = aq^2$ , тогда:

$$a^3 q^3 = 3^{240} \cdot 7^{240}$$

$$aq = 3^{80} \cdot 7^{80}$$

Тогда существует  $80 \cdot 80 = 6400$  вариантов выбрать  $a$ , но т.к.

$q \neq 1$ , то  $a$  можно выбрать  $6399$  вариантов, тем же

не рассматриваем случай, когда  $a = 1$ , тогда всего вариантов

выбрать  $a - 6399$ , но кол-во способов выбрать  $a$  и

есть кол-во способов выбрать  $(a; b; c)$ , т.к. при выборе

$a$  выбирается и  $q$ .

Ответ:  $6399 \cdot 6400$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

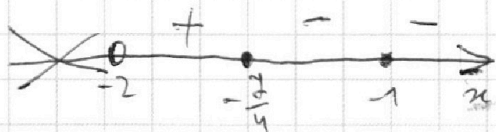
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{3}$  (градусы)



Тогда с учетом ОДЗ

получаем  $x \in (-2; -\frac{1}{4}] \cup$

$\cup \{-1\}$

Ответ:  $(-2; -\frac{1}{4}] \cup \{-1\}$

При  $x = 100$ :

$\ln \cos 100 > 0$ ;  $\ln(102) - 101 < 0$ , т.к.  
 $\ln 102 < 1$

При  $x = -1,5$ :

$\ln 2 > 0$ ;  $\ln 0,5 + 0,5 = 0,5 - \ln 2 < 0$

При  $x = -1,8$

$\ln(4 \cdot (-1,8) + 8) < 0$ ;  $\ln 0,2 + 0,8 = 0,8 - \ln 5 < 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ДЗ

$$\ln^2(x+2) - (x+1)\ln(4x+8) + (\ln 4)\ln(x+2) \geq 0$$

$$D(f): \begin{cases} x+2 > 0 \\ 4x+8 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > -2$$

$$\ln^2(x+2) - (x+1)\ln 4 - (x+1)\ln(x+2) + (\ln 4)\ln(x+2) \geq 0$$

$$\ln(x+2)(\ln(x+2) - (x+1)) + \ln 4(\ln(x+2) - (x+1)) \geq 0$$

$$(\ln(x+2) - (x+1)) \cdot (\ln(x+2) + \ln 4) \geq 0$$

$$\ln(4x+8)(\ln(x+2) - (x+1)) \geq 0$$

Рассмотрим  $f(x) = \ln(4x+8)(\ln(x+2) - (x+1))$

$$D(f): \begin{cases} 4x+8 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > -2$$

Нули:  $\begin{cases} \ln(4x+8) = 0 \\ \ln(x+2) - (x+1) = 0 \end{cases} \begin{cases} 4x+8 = 1 \\ \ln(x+2) = (x+1) \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{7}{4} \\ \ln(x+2) = x+1 \end{cases}$

При решении ур-ва  $\ln(x+2) = x+1$ , заметим, что

$$(\ln(x+2))' = \frac{1}{x+2}, \text{ тогда ур-е касает к } y = \ln(x+2) \text{ будет}$$

$$\text{иметь вид: } y = \frac{1}{x_0+2}(x-x_0) + \ln(x_0+2), \text{ где } x_0 - \text{ точка касания}$$

При  $x_0 = -1$ , касательная ур-ва касательной:  $y = x+1$ ,

тогда  $x+1 = \ln(x+2)$  только в одном случае, когда  $x = -1$

Нули:  $-\frac{7}{4} x = -\frac{7}{4}; x = -1$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4 (прег.)

Дано.  $\triangle AOC$  и  $OM$  - медиана квадрата, то  $\Rightarrow AO = OM$

$$\frac{\sqrt{\frac{5+a}{2}}}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{\frac{1-5a}{20}}}{\cos \alpha} \Rightarrow \sqrt{\frac{5+a}{2}} = \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\frac{1-5a}{10}}; \operatorname{tg} \alpha > 0, \text{ м.н. } \alpha - \text{угл. } \alpha \text{ в } \triangle AOC$$

$\Rightarrow$  можно возвести в квадрат

$$\left. \begin{aligned} -\frac{5+a}{2} &= \operatorname{tg}^2 \alpha \left( \frac{1-5a}{20} \right) \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{1}{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\frac{5+a}{2} = \frac{1}{25} \cdot \frac{1-5a}{20} \Rightarrow 25(5+a) = 1-5a$$

$$\begin{aligned} -125 - 25a &= 1 - 5a; \quad 20a = -126; \quad a = -\frac{126}{20} \\ &= -\frac{63}{10} = -6,3 \end{aligned}$$

$$-\frac{5+a}{2} = \frac{1}{25} \cdot \frac{1-5a}{20} \quad | \cdot 20$$

$$-25(5+a) = 1-5a$$

$$-125 - 25a = 1 - 5a \Rightarrow 20a = -126 \Rightarrow a = -\frac{626}{20} = -\frac{313}{10}$$

Дано.  $AO = \sqrt{\frac{5-313}{2}} = \sqrt{\frac{60 \cdot 309 - 313}{2}} = \sqrt{\frac{13}{120}}$ ;  $a$  - диаметр квадрата -

$= 2\sqrt{\frac{13}{120}}$ , площадь квадрата можно найти по формуле

$$S = \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{13}{120} = \frac{13}{60}$$

Ответ.  $a = -\frac{313}{10}$ ;  $S = \frac{13}{60}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Мн

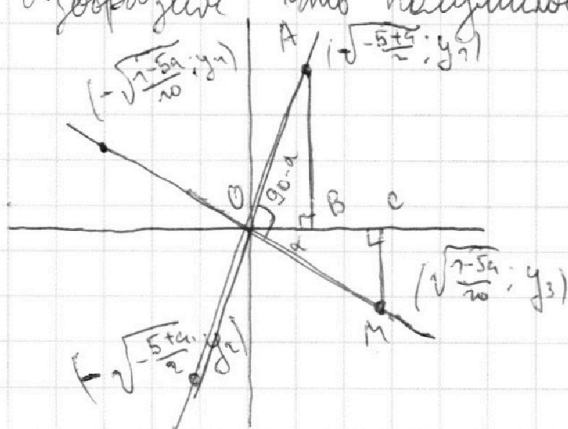
ТТ.ч. одна из диагоналей квадрата проходит через начало координат и его центр не совпадает, то вторая диагональ проходит через него же перпендикулярно первой диагонали, а её угловой коэффициент будет равен  $-\operatorname{tg}(90-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{5}$ , её ур-ие:  $y = -\frac{1}{5}x$

ТТ.ч. вершины квадрата лежат на  $y = -2x^2 - 9x$ , то решив ур-ие  $-2x^2 - 9x = 5x$  и  $-2x^2 - 9x = -\frac{1}{5}x$ , мы получим их абсциссы. Заметим, что  $x=0$  не является абсциссой вершины, т.к. она имеет центр квадрата, тогда;

$$-2x^2 + 9x - 2x^2 - 9x = 5 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5+9}{2}}; \quad x - 2x^2 - 9x = -\frac{x}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10x^2 + 5x = 9 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{7-5a}{20}}$$

Изобразим что получилось:



$$\text{Из } \triangle AOB: AO = \frac{\sqrt{\frac{5+9}{2}}}{\cos(90-\alpha)}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{5+9}{2}}}{\sin \alpha}$$

$$\text{Из } \triangle OCM: OM = \frac{\sqrt{\frac{7-5a}{20}}}{\cos \alpha}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

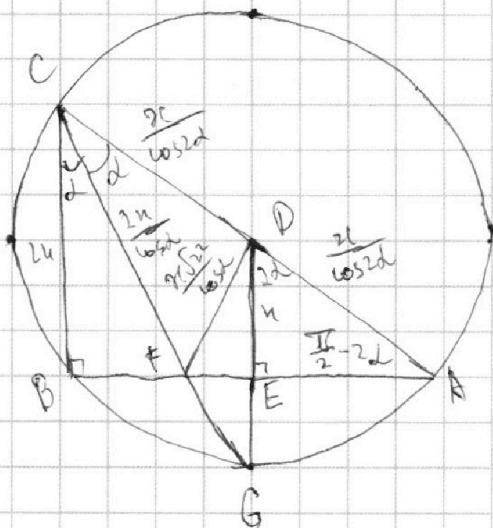
1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5



1) Пусть  $\angle BCG = \angle ACG = \alpha$  (м.и. CF-  
вис-ца)

2)  $\angle BCG = \angle ACG$  (м.и.  $\angle BCG = \angle ACG$   
по т.и. и м.и.  $\angle BCG$  опир на  $\angle BCG$ ,  
а  $\angle ACG$  опир на  $\angle ACG$ ), тогда

$BC = CA$  (равные дуги стрит. равны

хорды)  $\Rightarrow \triangle BGA$  - равност.  $\Rightarrow$

$\Rightarrow GE$  - медиана и висота  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle DEA = \angle GEA = 90^\circ$

3)  $DE$  - средняя линия  $\triangle ABC \Rightarrow DE \parallel BC \Rightarrow \angle AED = \angle ABC = 90^\circ$

(соответственно), а также  $\angle BCA = \angle EDA = 2\alpha$

4) Пусть  $BC = 2n$ , тогда  $DE = n$  (по с.б.-ву средней линии)

5) Из  $\triangle BCF$  ( $\angle FBC = 90^\circ$ );  $CF = \frac{2n}{\cos 2\alpha}$ , аналог из  $\triangle DEA$ ;  $DA =$   
 $= \frac{2n}{\cos 2\alpha}$

6)  $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{1}} \Rightarrow DF = \sqrt{\frac{1}{2}} CF = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2n}{\cos 2\alpha} = \frac{2n\sqrt{2}}{\cos 2\alpha}$

7) По м. кос уг  $\triangle FCD$ :

$$FD^2 = CF^2 + CD^2 - 2CF \cdot CD \cdot \cos 2\alpha$$

$$\frac{22n^2}{\cos^2 2\alpha} = \frac{4n^2}{\cos^2 2\alpha} + \frac{n^2}{\cos^2 2\alpha} - 2 \cdot \frac{2n^2}{\cos 2\alpha} \cdot \cos 2\alpha \quad | \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{22}{\cos^2 2\alpha} = \frac{4}{\cos^2 2\alpha} + \frac{1}{\cos^2 2\alpha} - \frac{4}{\cos 2\alpha}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{-18}{\cos^2 2\alpha} = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} - \frac{4}{\cos 2\alpha}$$

Уб (преобраз.)

$$\frac{36}{1+\cos 2\alpha} - \frac{1}{\cos^2 2\alpha} + \frac{4}{\cos 2\alpha} = 0$$

$$\frac{36 \cos^3 2\alpha - \cos 2\alpha - \cos^2 2\alpha + 4 \cos^2 2\alpha + 4 \cos^3 2\alpha}{(1+\cos 2\alpha) \cos^3 2\alpha} = 0$$

$$\begin{cases} 40 \cos^3 2\alpha + 3 \cos^2 2\alpha - \cos 2\alpha = 0 \\ (1+\cos 2\alpha) \cos^3 2\alpha \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40 \cos^2 2\alpha + 3 \cos 2\alpha - 1 = 0 \\ \cos 2\alpha \neq -1 \\ \cos 2\alpha \neq 0 \end{cases}$$

$$t = \cos 2\alpha, \quad |t| \leq 1$$

$$\begin{cases} 40t^2 + 3t - 1 = 0 \\ \begin{cases} t \neq -1 \\ t \neq 0 \end{cases} \end{cases} \begin{cases} t = \frac{1}{8}; t = -\frac{1}{5} \\ \begin{cases} t \neq -1 \\ t \neq 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow t = \frac{1}{8}; t = -\frac{1}{5}$$

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = \frac{1}{8} \\ \cos 2\alpha = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

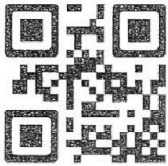
но м.в.  $2\alpha$  - угол  $\Pi$  и  $\Delta$ , но  $\cos 2\alpha = \frac{1}{8} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\alpha = \arccos \frac{1}{8} = \angle ACB \Rightarrow \angle BAC = \frac{\pi}{2} - \angle ACB = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{8}$$

$$\text{Ответ: } \angle ABC = \frac{\pi}{2}; \angle ACB = \arccos \frac{1}{8}; \angle BAC = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{8}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} \Rightarrow x = \sqrt[3]{y^3 + \frac{10}{z^3} - \frac{10}{y^3}}$$

Аналогично получаем:  $y = \sqrt[3]{z^3 + \frac{10}{x^3} - \frac{10}{z^3}}$ ;  $z = \sqrt[3]{x^3 + \frac{10}{y^3} - \frac{10}{x^3}}$

$$\text{или } z = \sqrt[3]{\left(y^3 + \frac{10}{z^3} - \frac{10}{y^3}\right) \left(z^3 + \frac{10}{x^3} - \frac{10}{z^3}\right) \left(x^3 + \frac{10}{y^3} - \frac{10}{x^3}\right)}$$

Произведение будет наименьшим, когда все множители  
будут наименьшими

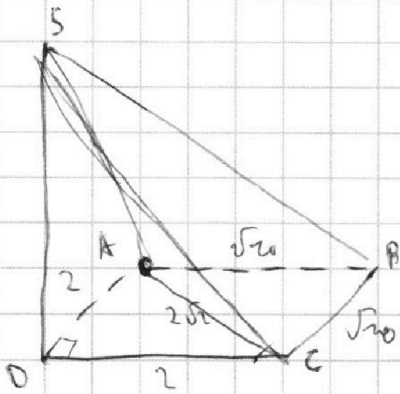
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1) AC^2 = 8 = AD^2 + CD^2 = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle ADC = 90^\circ$$

$$2) \text{ Пусть } \angle DCA = \angle DAC = \alpha \text{ / м.ч.}$$

$$\triangle ADC - \text{р/б}), \angle BAC = \angle ACB = \beta (\triangle ABC - \text{р/б})$$

$$\Rightarrow \angle DAB = \angle DCB = \alpha + \beta$$

$$3) AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 = 20 - 20 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = 0,6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \angle ABC = 0,8$$

$$4) \angle DCB = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \angle ABC = \frac{3\pi}{2} - \angle ABC \Rightarrow \cos \angle DCB = \sin \angle ABC$$

$$\Rightarrow \cos \left( \frac{3\pi}{2} - \angle ABC \right) = -\sin \angle ABC = -0,8$$

$$5) BD^2 = CD^2 + BC^2 - 2CD \cdot BC \cdot \cos \angle DCB$$

$$6) \angle DCB = \angle DAB = \frac{2\pi - \frac{\pi}{2} - \angle ABC}{2} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\angle ABC}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{3\pi}{2} - \angle ABC \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 \angle DCB = \cos^2 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{3\pi}{2} - \angle ABC \right) \right) = \frac{1 + \cos \left( \frac{3\pi}{2} - \angle ABC \right)}{2} = \frac{1 - \sin \angle ABC}{2}$$

$$= 0,1 \Rightarrow \cos \angle DCB = -\frac{\sqrt{10}}{10} (\angle DCB > 90^\circ)$$

$$5) BD^2 = CD^2 + BC^2 - 2CD \cdot BC \cdot \cos \angle DCB = 4 + 10 + 4 \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} =$$

$$= 14 + 4 = 18 \Rightarrow BD = 3\sqrt{2}$$

$$e) \begin{cases} SB^2 + BD^2 = BD^2 + SB^2 \\ AD^2 + SD^2 = AS^2 \\ SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10} \end{cases} \begin{cases} 18 + SD^2 = SB^2 \\ 4 + SD^2 = AS^2 \\ SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$14 = 5B^2 - AS^2 \Rightarrow SA^2 - BB^2 = -14M$$

$$(SA - SB)(SA + SB) = -14M \Rightarrow SA - SB = -\frac{14M}{2\sqrt{2} + \sqrt{10}}$$

$$\begin{cases} SA - SB = -\frac{14M}{2\sqrt{2} + \sqrt{10}} \\ SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10} \end{cases}$$

$$2SA = 2\sqrt{2} + \sqrt{10} - \frac{14M}{2\sqrt{2} + \sqrt{10}} = \frac{(2\sqrt{2} + \sqrt{10})^2 - 14M}{2\sqrt{2} + \sqrt{10}} = \frac{8 + 8\sqrt{5} + 10 - 14M}{2\sqrt{2} + \sqrt{10}} = \frac{18 + 8\sqrt{5} - 14M}{2\sqrt{2} + \sqrt{10}}$$

$$SA = \frac{4 + 4\sqrt{5} - 7M}{\sqrt{2} + \sqrt{5}}$$

$$SD^2 = SA^2 - AD^2 = \frac{16 + 16\sqrt{5} - 28M + 20\sqrt{5}M - 49M^2}{2 + 10\sqrt{2} + 25} - 4 = \frac{16 + 16\sqrt{5} - 28M + 20\sqrt{5}M - 49M^2 - 4(2 + 10\sqrt{2} + 25)}{2 + 10\sqrt{2} + 25}$$

$$SD^2 = SA^2 - AD^2 = \frac{4 + 8\sqrt{5} - 7M}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} - 4 = \frac{4 + 8\sqrt{5} - 7M - 4(\sqrt{2} + \sqrt{5})}{\sqrt{2} + \sqrt{5}}$$

$$SD^2 = SA^2 - AD^2 = \frac{4 + 8\sqrt{5} - 7M}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} - 4 = \frac{4 + 8\sqrt{5} - 7M - 4\sqrt{2} - 4\sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} = \frac{4 + 4\sqrt{5} - 7M - 4\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}}$$

$$SD = \frac{4 + 8\sqrt{5}}{2\sqrt{2} + \sqrt{10}}$$

$$SD^2 = SA^2 - AD^2 = \frac{16 + 64\sqrt{5} + 320}{28 + 8\sqrt{5} + 10} - \frac{32 + 32\sqrt{5} + 40}{8 + 8\sqrt{5} + 10} = \frac{336 + 64\sqrt{5} - 72 - 32\sqrt{5}}{(2\sqrt{2} + \sqrt{10})^2} = \frac{264 + 32\sqrt{5}}{(2\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}$$

$$SD = \frac{\sqrt{264 + 32\sqrt{5}}}{2\sqrt{2} + \sqrt{10}}$$

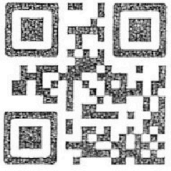
$$S_{очн} = S_{AADC} + S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot CD + \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} (4 + 10 \cdot 8) = 42$$

$$V = \frac{S_{очн} \cdot SD}{3} = \frac{42 \cdot \sqrt{264 + 32\sqrt{5}}}{3(2\sqrt{2} + \sqrt{10})} = \frac{14\sqrt{264 + 32\sqrt{5}}}{2\sqrt{2} + \sqrt{10}}$$

Ответ:  $\frac{14\sqrt{264 + 32\sqrt{5}}}{2\sqrt{2} + \sqrt{10}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

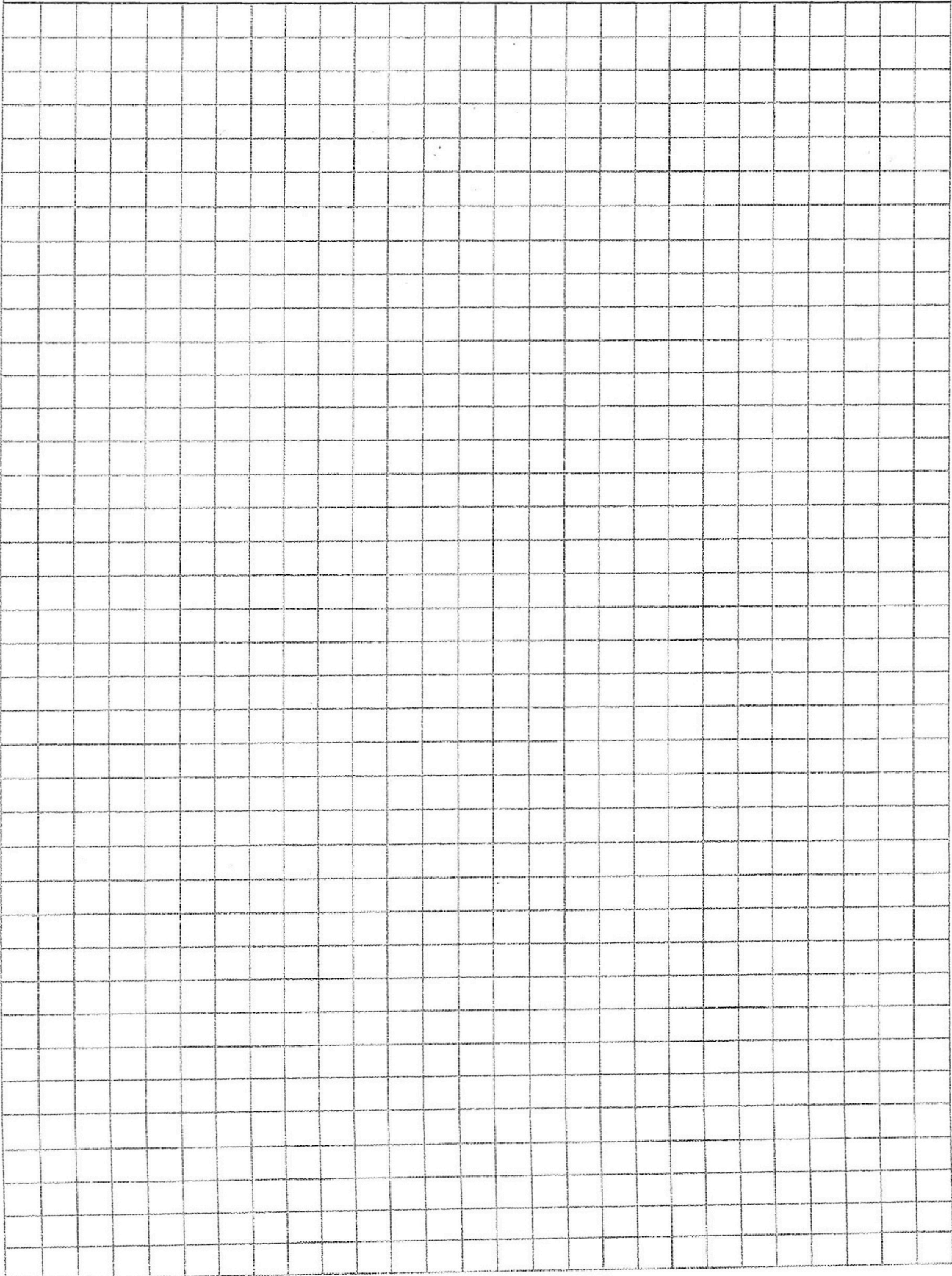
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\ln^2(x+2) - (x+1)\ln(4x+8) + (\ln 4)\ln(x+2) > 0$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > -2 \\ 4x+8 > 0 \Rightarrow x > -2 \\ x > -2 \end{cases}$$

$$\ln^2(x+2) - (x+1)\ln(4(x+2)) + (\ln 4)\ln(x+2) > 0$$

$$\ln^2(x+2) - (x+1)\ln 4 - (x+1)\ln(x+2) + (\ln 4)\ln(x+2) > 0$$

$$\ln(x+2)(\ln(x+2) - (x+1)) + \ln 4(\ln(x+2) - (x+1)) > 0$$

$$(\ln(x+2) - (x+1))(\ln(x+2) + \ln 4) > 0$$

$$\ln(x+2) > \ln e^{(x+1)}$$

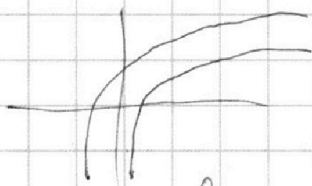
$$\ln(x+2) = x+1$$

$$(\ln(x+2))' = \frac{1}{x+2}$$

$$\begin{aligned} x+2 &= t \\ x+1 &= t-1 \end{aligned}$$

$$x+2 > e$$

$$y = -2x^3 + x$$



$$\ln \ln(x+2) - \ln e^x = 0$$

$$\ln \left( \frac{x+2}{e^x} \right) = \ln e$$

$$\begin{aligned} \ln t &= t-1 & x+2 &= e^{t-1} \\ \ln t + \ln e &= \ln e & e t &= \frac{1}{2} e^t \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4 \operatorname{ctg} 2x + 1 + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$$2x = \frac{\pi}{2}$$

$$4 \cdot \frac{2 \operatorname{ctg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{ctg} x \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} + 1 = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\frac{2 \operatorname{ctg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x}} = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$$

$$\frac{2 \operatorname{ctg} x + 1 - 2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 0$$

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x + 6 \operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 0$$

$$\frac{(3 + 2\sqrt{2})^2 + 18 + 12\sqrt{2} + 1}{1 -}$$

$$3 + \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}$$

$$3 \pm 2\sqrt{2}$$

$$= 9$$

$$\frac{t^2 + 6t + 1}{1 - t^2} = 0$$

$$9 - 1 = 8$$

$$80 \cdot 80 = 6400$$

$$\begin{cases} t^2 + 6t + 1 = 0 \\ t \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 3 + 2\sqrt{2} \rightarrow 3 + 2\sqrt{2} \\ t = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$a_1 = 3 \cdot 80$$

$$a = b = a_1; c = a_1^2$$

$$1 + 80 \cdot 80$$

$$a_1^3 = 3^3 \cdot 80^3 = 27 \cdot 512000 = 13824000$$

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 2$$

$$4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) + 1 + \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$\frac{4}{3} - \frac{4}{9} - \frac{9}{9}$$

$$= \frac{12}{9} - \frac{4}{9} - \frac{9}{9} = \frac{24}{9} - \frac{4}{9} - \frac{9}{9} = \frac{11}{9} + 1 = \frac{20}{9}$$



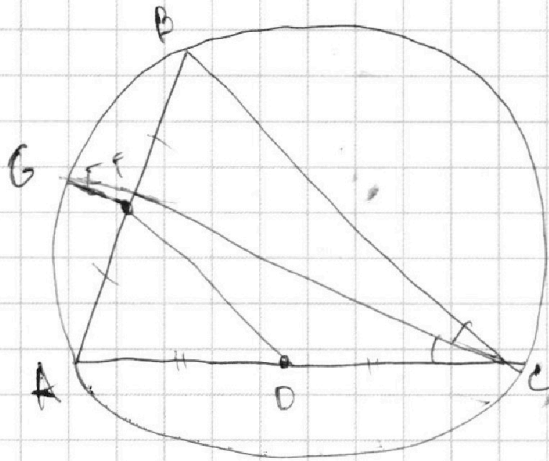
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

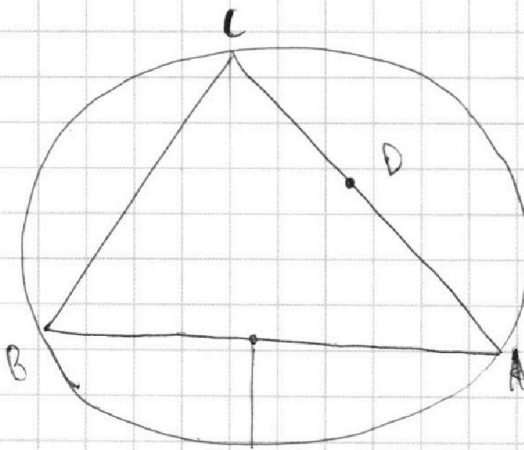
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



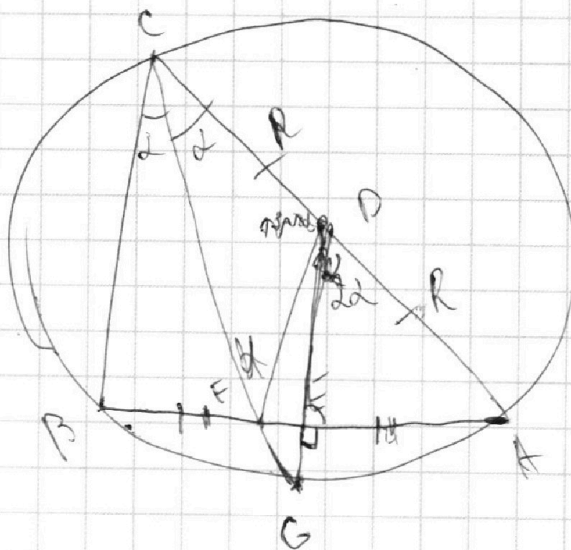
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{11}}$$



$$\frac{CF^2}{DF^2} = \frac{2}{11}$$





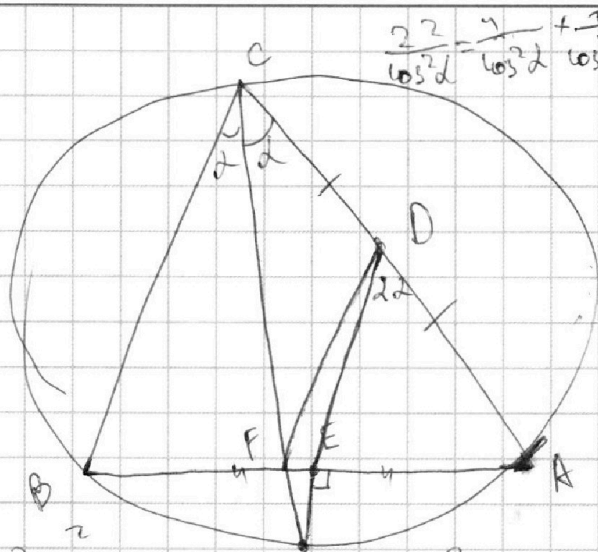
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{22}{\cos^2 d} = \frac{y}{\cos^2 d} + \frac{1}{\cos^2 d} - \frac{y}{\cos^2 d}$$

$$BE = AE$$

$$\frac{CF^2}{OF^2} = \frac{2}{11} = \frac{\pi \sqrt{2} - DF}{\cos d}$$

$$DF^2 = \frac{11}{2} \cdot CF^2 = \frac{11}{2} \cdot \frac{4n^2}{\cos^2 d} = \frac{11 \cdot 4n^2}{2 \cos^2 d}$$

$$DF = \frac{2n \sqrt{11}}{\cos d}$$

$$\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{11}}$$

$$DF = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x \cdot \frac{1}{\cos d} = \frac{3}{\cos^2 d}$$

$$x \cdot \cos d = 3 \cos^2 d$$

$$x = 3 \cos d$$

$$\frac{2n}{\cos d} = 4$$

$$6 \cos^2 d = 18 + 3 \cos^2 d = 20$$

$$\frac{BF}{FA} = \frac{2n}{\frac{2n}{\cos d}} = \cos^2 d$$

$$\frac{2n}{\cos^2 d} - n = n \left( \frac{1}{\cos^2 d} - 1 \right) = n \tan^2 d$$

$$= n \tan^2 d$$

$$BF = n \tan^2 d - y$$

$$AE = FA = n \tan^2 d + y$$

$$\frac{n \tan^2 d - y}{n \tan^2 d + y} = \cos^2 d$$

$$n \tan^2 d - y = n \sin^2 d + y \cos^2 d$$

$$n \tan^2 d - n \sin^2 d = y \cos^2 d + y$$

$$y = \frac{n \tan^2 d - n \sin^2 d}{\cos^2 d + 1}$$

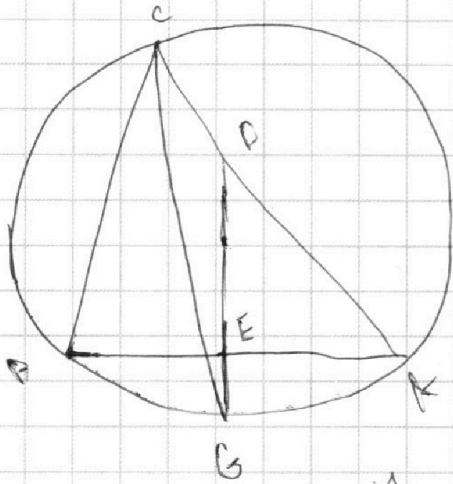
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos^2 \alpha = \frac{7 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$9 + 160 = -1.75$$

$$169 = -\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{3+13}{80} = \frac{1}{8}$$

$$7 \frac{78}{\cos^2 \alpha} = \frac{9}{\cos^2 \alpha} - \frac{4}{\cos^2 \alpha} - 1.75$$

$$\frac{36}{7 + \cos 2\alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{4}{\cos^2 \alpha} - 1.8$$

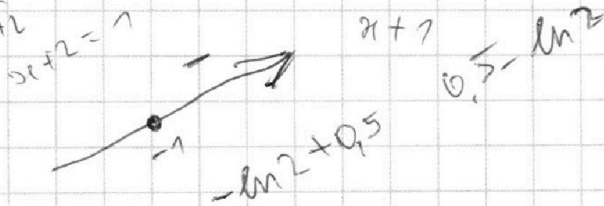
$$36 \cos^3 2\alpha - \cos 2\alpha - \cos^2 2\alpha + 4 \cos^2 2\alpha + 4 \cos^3 2\alpha$$

$$40 \cos^3 2\alpha \quad (\ln(n+2))' = \frac{1}{n+2}$$

лог 0.5 = -1  
-1.5

$$\frac{1}{n+2} (n - n_0) - \ln(n_0 + 2)$$

$$\frac{1}{n+2} - 1 = 0 \quad n = -1 \quad n_0 = -1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$-2x^3 - ax = x(2x^2 + a)$

$a > 0$

$a < 0$   $2x^2 = -a$

$\sqrt{\frac{1-5a}{2}} = \sqrt{\frac{5-a}{2}}$

$1-5a = 5-a$   
 $4a = -4$   
 $a = -1$

$\cos 2 = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{25}}{2}}$

$\text{tg } \alpha = \frac{1}{5} = \frac{5}{\sqrt{26}}$

$\sin \alpha = \sqrt{\frac{26-25}{26}}$

$\text{tg}(90^\circ - \alpha) = \text{ctg } \alpha = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$

$\text{tg } \alpha = \frac{1}{5}$

$\cos = \sqrt{\frac{1}{1+25}}$

$= \frac{1}{\sqrt{26}}$

$y = -\frac{1}{5}x$

$2x^3 + ax - \frac{1}{5}x = 0$

$5x = -2x^3 - ax$   $x=0$

$-\frac{1}{5}x = -2x^3 - ax$

$2x^3 + ax - 5x = 0$

$2x^2 = 5-a$

$x = \pm \sqrt{\frac{5-a}{2}}$   $5-a \geq 0$   
 $a \leq 5$

$10x^2 + 5a - 1 \leq 0$

$x = \pm \sqrt{\frac{5a-1}{10}} = \pm \sqrt{\frac{5-5a}{10}}$

$\sqrt{\frac{1+\frac{243}{12}}{2}} = \sqrt{\frac{325}{24}}$

$x = 0$

$x = 10x^3 + 5ax$

$\text{or } 10x^3 + 5ax - 1 = 0$

$1-5a \geq 0$

$5a \leq 1 \quad a \leq \frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^3 - \frac{10}{z^3} = y^3 - \frac{10}{y^3}$$

$$(x^3 - \frac{10}{x^3}) = y^6 - 20 + \frac{100}{y^6}$$

$$a^3 q^3 = 3^{200} \cdot 2^{200} \quad 80.79$$

$$a q = 3^{10} \cdot 2^{10} \quad a \neq$$

$$q = 2; q = 3$$

80.79

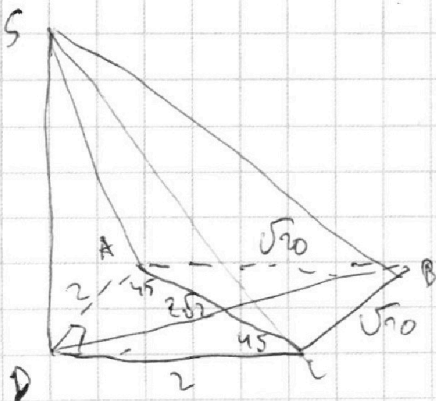
80-80

6400-2 6399

b

6398 +

$$x^3 - y^3 = \frac{10}{z^3} - \frac{10}{y^3}$$



$$SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{20}$$

$$SB^2 + BD^2 = AD^2 + SA^2$$

$$8 = 20 - 20 \cos 2$$

$$20 \cos 2 = 12$$

$$\cos 2 = 0.6$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} = z^3 + \frac{10}{x^3}$$

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3}$$

$$y^3 - \frac{10}{y^3} = x^3 - \frac{10}{z^3}$$

$$x^3 - \frac{10}{x^3} = z^3 - \frac{10}{y^3}$$

$$y^3 - \frac{10}{x^3} = z^3 - \frac{10}{z^3} = y^3 - \frac{10}{x^3}$$

$$y^3 + z^3 - \frac{10}{z^3} - \frac{10}{y^3} = x^3 + y^3 - \frac{10}{x^3} - \frac{10}{z^3}$$

$$x^3 y^3 z^3 + 10 x^3 y^3 = x^6$$

$$x^3 - z^3 = \frac{10}{x^3} - \frac{10}{y^3} = 10 \frac{y^3 - x^3}{x^3 y^3} \quad x^3 + \frac{10}{x^3} =$$

$$(x-2)(x^2+2x+x^2) = 10$$

$$x - \frac{3}{x^3} - \frac{3}{x^3} - \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x^3}$$

$$x^6 y^3 - y^3 z^3 x^3 = 10 y^3 - 10 x^3$$

$$x^3 y^3 (x^3 - y^3) = 10 y^3 - 10 x^3$$

$$x = \sqrt[3]{y^3 + \frac{10}{z^3} - \frac{10}{y^3}}$$

$$x y z = \sqrt[3]{\left(y^3 + \frac{10}{z^3} - \frac{10}{y^3}\right) y^3 z^3} = \sqrt[3]{y^3 + \frac{10}{z^3} - \frac{10}{y^3}}$$

$$x^3 + \frac{10}{y^3}$$

$$x^3 + \frac{10}{x^3} = x + \frac{10}{z^3}$$

$$y^3 - \frac{10}{y^3} + 1$$

$$(y^3 - \frac{10}{y^3}) = z^3 - \frac{10}{z^3}$$

$$\frac{10}{x^3} = \frac{10}{y^3 + \frac{10}{z^3} - \frac{10}{y^3}} = \frac{10 y^3 z^3}{y^6 z^3}$$

$$y^3 - \frac{10}{y^3} = 1$$

$$y^3 - \frac{10}{y^3} = 1 \rightarrow \text{мет}$$

$$3y^6 = 20$$

$$y = \sqrt[6]{\frac{20}{3}}$$