



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 6

1. [4 балла] Решите уравнение

$$4 \operatorname{tg} 2x + 1 + \operatorname{ctg} \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел  $(a; b; c)$  таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение  $abc$  равно  $3^{240} \cdot 7^{240}$ ?

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2(x+2) - (x+1) \ln(4x+8) + (\ln 4) \ln(x+2) \geq 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции  $y = -2x^3 - ax$ . Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой  $y = 5x$ , а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра  $a$  и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника  $ABC$  описана окружность  $\Omega$ . Точки  $D$  и  $E$  – середины сторон  $AC$  и  $AB$  соответственно,  $CF$  – биссектриса треугольника  $ABC$ . Лучи  $DE$  и  $CF$  пересекаются в точке  $G$ , принадлежащей  $\Omega$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что  $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{11}}$ .

6. [5 баллов] Числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} = z^3 + \frac{10}{x^3}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения  $xyz$ .

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит четырёхугольник  $ABCD$ , в котором  $AB = BC = \sqrt{10}$ ,  $AD = DC = 2$ ,  $AC = 2\sqrt{2}$ . Ребро  $SD$  – высота пирамиды. Известно, что  $SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10}$ . Найдите:

- а) объём пирамиды;
- б) радиус шара, касающегося граней  $ABCD$ ,  $SAB$ ,  $SBC$  и ребра  $SD$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$4 \cdot \operatorname{tg}^2 x + 1 + \operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$4 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4})} = 0$$

$$\frac{8 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 1 + \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = 0$$

$$\frac{8 \operatorname{tg} x + 1 - \operatorname{tg}^2 x + 1 - 2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 0$$

$$\frac{6 \operatorname{tg} x + 2}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 0$$

$$\begin{cases} 6 \operatorname{tg} x = -2 \\ \operatorname{tg}^2 x \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x = -\frac{1}{3} \\ \operatorname{tg} x \neq \pm 1 \end{cases} \Rightarrow x = \arctg(-\frac{1}{3}) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $x = \arctg(-\frac{1}{3}) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N<sub>2</sub>.

Пусть  $b = aq$ ;  $c = aq^2$ , тогда:

$$a^3 q^3 = 3^{240} \cdot 7^{240}$$

$$a^3 q^3 = 80 \cdot 80$$

$$a^3 q^3 = 3 \cdot 7$$

Тогда существует  $80 \cdot 80 = 6400$  вариантов выбрать  $a$ , но т.к.

$q \geq 1$ , то  $a$  можно выбрать ~~6398~~<sup>беско</sup> вариантов, которые  
не рассматривали, когда  $a=1$ , тогда всего вариантов  
выбрать  $a - \cancel{6398}$ , но ~~но~~-<sup>беско</sup> способов выбрать  $a$  и  
есть ~~но~~-<sup>беско</sup> способов выбрать  $(a; b | c)$ , т.к. при выборе  
 $a$  выбирается и  $q$ .

Ответ: ~~6398~~<sup>беско</sup>



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

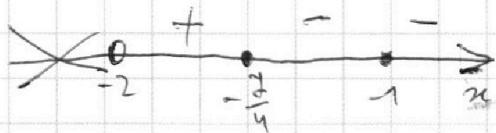
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3}$  (правильный)



При  $n=100$ :

$$\ln 100 > 0; \ln(10^2) - 101 < 0, \text{ т.к.} \\ \ln 100 < 2$$

При  $n = -1,5$ :

$$\ln 2 > 0; \ln 0,5 + 0,5 = 0,5 - \ln 2 < 0 \\ \ln 2 < 0,5$$

$$\ln(4 \cdot (-1,8) + 8) < 0; \ln 0,2 + 0,8 = 0,8 - \ln 5 < 0$$

Тогда с учетом ОДЗ

получаем  $x \in (-2; -\frac{1}{4}] \cup$

$$V\{-1\}$$

Ответ:  $(-2; -\frac{1}{4}] \cup V\{-1\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\ln^2(x+2) - (x+1) \ln(4x+8) + (\ln 4) \ln(x+2) \geq 0$$

ОДЗ:  $\begin{cases} x+2 > 0 \\ 4x+8 > 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x > -2$

$$\ln^2(x+2) - (x+1) \ln 4 - (x+1) \ln(x+2) + (\ln 4) \ln(x+2) \geq 0$$

$$\ln(x+2)(\ln(x+2) - (x+1)) + \ln 4(\ln(x+2) - (x+1)) \geq 0$$

$$(\ln(x+2) - (x+1)) \cdot (\ln(x+2) + \ln 4) \geq 0$$

$$\ln(4x+8)(\ln(x+2) - (x+1)) \geq 0$$

Введен  $f(x) = \ln(4x+8)(\ln(x+2) - (x+1))$

D(f):  $\begin{cases} 4x+8 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > -2$

Реш.:  $\begin{cases} \ln(4x+8) = 0 \\ \ln(x+2) - (x+1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x+8 = 1 \\ \ln(x+2) = (x+1) \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{7}{4} \\ \ln(x+2) = x+1 \end{cases}$

При решении ур-ия  $\ln(x+2) = x+1$ , заметим, что

$(\ln(x+2))' = \frac{1}{x+2}$ , тогда ур-ие находим в виде  $y = \ln(x+2)$  для

линейн. фнкн:  $y = \frac{1}{x_0+2}(x-x_0) + \ln(x_0+2)$ , где  $x_0$ -точка нахожд.

При  $x_0 = -1$ , находим ур-ие линейн.  $y = x+1$ ,

тогда  $x+1 = \ln(x+2)$  можно в огран. сущес., т.к.  $x = -1$

Реш.:  $x = -\frac{7}{4}; x = -1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

ПД. АО и ОМ - параллельные горизонтали, то  $\Rightarrow AO = OM$

$$\frac{\sqrt{-\frac{5+q}{2}}}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{\frac{1-5q}{20}}}{\cos \alpha} \Rightarrow \sqrt{-\frac{5+q}{2}} = \tan \alpha \sqrt{\frac{1-5q}{20}}; \tan \alpha > 0, \text{ т.к. } \alpha - \text{ угол наклона}$$

$\Rightarrow$  можно взять квадрат

$$-\frac{5+q}{2} = \tan^2 \alpha \left( \frac{1-5q}{20} \right) \quad \Rightarrow \quad -\frac{5+q}{2} = \frac{1}{25} \cdot \frac{1-5q}{10} \quad \cancel{25(5+q)=1-5q}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{5}$$

$$-\frac{5+q}{2} = \frac{1}{25} \cdot \frac{1-5q}{10} \quad \cancel{25 \cancel{5+q}=1-5q} \quad \cancel{25q=-125}, q = -\frac{125}{25} = -5$$

$$-\frac{625}{50} = -625$$

$$-\frac{5+q}{2} = \frac{1}{25} \cdot \frac{1-5q}{10} \quad | \cdot 10$$

$$-25 + 5q = \frac{1}{25} (1-5q)$$

$$-625 + 125q = 1-5q \Rightarrow 120q = -626 \Rightarrow q = -\frac{626}{120} = -\frac{313}{60}$$

Площадь АО =  $\sqrt{-\frac{5-\frac{313}{60}}{2}} = \sqrt{-\frac{\frac{60-313}{60}}{2}} = \sqrt{\frac{13}{120}}$ ;  $q$  - длина горизонтальной стороны

=  $2\sqrt{\frac{13}{120}}$ , параллельные горизонтали можно считать по оп-ке

$$S = \frac{1}{2} d^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{13}{120} = \frac{13}{60}$$

Ответ:  $q = -\frac{313}{60}$ ;  $S = \frac{13}{60}$ .



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

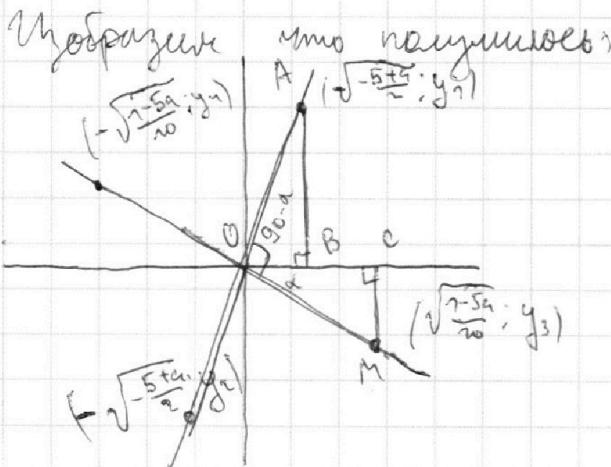
№4

III. n. одна из диагоналей квадрата проходит через  
начало координат и его центр не лежит на ней, то другая  
диагональ проходит через него же **перпендикулярно**  
первой диагонали; а её уравнение проходит сквозь

равен -  $\operatorname{tg}(90-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{5}$ , т.е. ур-ие:  $y = -\frac{1}{5}x$

III. n. вершины квадрата лежат на  $y = -2n^3 - \alpha n$ , то  
решив ур-ие  $-2n^3 - \alpha n = 5n$  и  $-2n^3 - \alpha n = -\frac{1}{5}n$ , мы полу-  
чили их абсциссы. Заметим, что  $x=0$  - не является  
абсциссой вершин, т.к. они лежат на другой  
стороне;

$$\begin{aligned} -2n^3 - \alpha n = 5n &\Rightarrow n = \pm \sqrt{\frac{-5+\alpha}{2}}; n = -2n^2 - \alpha n = -\frac{n}{5} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 10n^2 + 5\alpha = 5n \Rightarrow n = \pm \sqrt{\frac{5-\alpha}{20}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Угол } \angle AOB: AO &= \sqrt{\frac{5+\alpha}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{5+\alpha}}{\sin \alpha} \\ \text{Угол } \angle OCM: OM &= \frac{\sqrt{\frac{1-5\alpha}{20}}}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

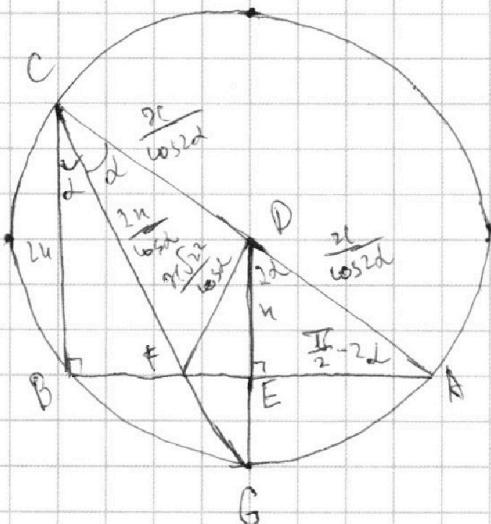
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



МБ

1) Доказать  $\angle BCG = \angle ACG = 2 \text{ (m.in. } CF\text{-еска)}$

2)  $\angle UBG = \angle UGA$  ( $m.in. \angle BCG = \angle ACG$

но  $U$   $\angle BCG$  и  $U$   $\angle ACG$  опираются на  $UG$ ,  
 $\angle ACG$  опирается на  $UGA$ ), тогда

$BG = GA$  (радиусы одинаковы, радиус  
хорды)  $\Rightarrow \triangle BGA$  — равнобедр.  $\Rightarrow$

$\Rightarrow GE$  — высота и биссектриса  $\Rightarrow$   
 $\angle DEA = \angle GEA = 90^\circ$

3)  $DE$  — средняя линия  $\triangle ABC \Rightarrow DE \parallel BC \Rightarrow \angle AED = \angle ABC = 90^\circ$

(комплементарные), а значит  $\angle BCA = \angle EDA = 2x$

4) Доказать  $BC = 2n$ , тогда  $DE = n$  (но  $CB$ -бис. средней линии)

5)  $U_3 \triangle BCF$  ( $\angle FBC = 90^\circ$ ) ;  $CF = \frac{2x}{\cos 2x}$ , аналогично  $\triangle DEA$ ;  $DA =$   
 $= \frac{2x}{\cos 2x}$

$$6) \frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{n}} \Rightarrow DF = \sqrt{\frac{n}{2}} CF = \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{2x}{\cos 2x} = \frac{x\sqrt{2x}}{\cos 2x}$$

7) Но  $m. \cos u_3 \neq FCD$ .

$$FP^2 = CF^2 + CD^2 - 2CF \cdot CD \cos 32^\circ$$

$$\frac{22x^2}{\cos^2 2x} = \frac{4n^2}{\cos^2 2x} + \frac{x^2}{\cos^2 2x} - 2 \cdot \frac{2x^2}{\cos 2x \cdot \cos 2x} \cos 32^\circ \mid : \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{22}{\cos^2 2x} = \frac{4}{\cos^2 2x} + \frac{1}{\cos^2 2x} - \frac{4}{\cos^2 2x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{18}{\cos^2 2\alpha} = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} - \frac{4}{\cos^2 2\alpha}$$

15 (правильн)

$$\frac{36}{1+\cos 2\alpha} - \frac{1}{\cos^2 2\alpha} + \frac{4}{\cos^2 2\alpha} = 0$$

$$\frac{36 \cos^3 2\alpha - \cos 2\alpha - \cos^2 2\alpha + 4 \cos^2 2\alpha + 4 \cos^3 2\alpha}{(1+\cos 2\alpha) \cos^3 2\alpha} = 0$$

$$\begin{cases} 40 \cos^3 2\alpha + 3 \cos^2 2\alpha - \cos 2\alpha = 0 \\ (1+\cos 2\alpha) \cos^3 2\alpha \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40 \cos^2 2\alpha + 3 \cos 2\alpha - 1 = 0 \\ \cos 2\alpha \neq -1 \\ \cos 2\alpha \neq 0 \end{cases}$$

$$t = \cos 2\alpha, |t| \leq 1$$

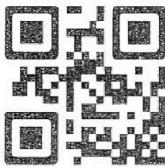
$$\begin{cases} 40t^2 + 3t - 1 = 0 \\ t \geq -1 \\ t \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{1}{8}; t = -\frac{1}{5} \\ t = -1 \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{1}{8}, t = -\frac{1}{5}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{8}$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{5}, \text{ но m.r. } 2\alpha - \text{ угол } \Delta, \text{ но } \cos 2\alpha = \frac{1}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\alpha = \arccos \frac{1}{8} = \frac{\pi}{2} - \angle ACB \Rightarrow \angle BAC = \frac{\pi}{2} - 2\angle ACB = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{8}$$

$$\text{Ответ: } \angle ABC = \frac{\pi}{2}, \angle ACB = \arccos \frac{1}{8}, \angle BAC = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{8}$$



На одной странице можно оформлять **только** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

M6

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} \Rightarrow x = \sqrt[3]{y^3 + \frac{10}{z^3} - \frac{10}{y^3}}$$

Аналогично получаем:  $y = \sqrt[3]{z^3 + \frac{10}{x^3} - \frac{10}{z^3}}$ ;  $z = \sqrt[3]{x^3 + \frac{10}{y^3} - \frac{10}{x^3}}$

$$\text{Доказательство неравенства: } y \geq \sqrt[3]{z^3 + \frac{10}{x^3} - \frac{10}{z^3}}$$

Произведение будет максимальным, когда все множители

будут максимальными

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

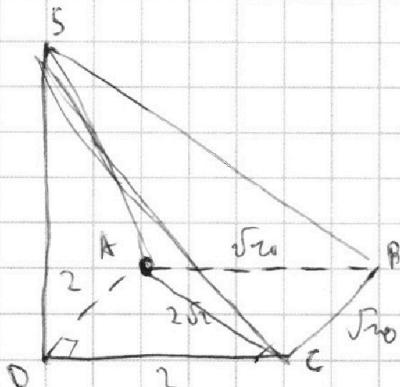
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1) AC^2 = 8 \Rightarrow AD^2 + CD^2 = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle ADC = 90^\circ$$

$$2) \text{ Имеем } \angle DCA = \angle DAC = \alpha / \text{м.н.}$$

$$\Rightarrow \angle ADC = \pi/2, \angle BAC = \angle ACB = \beta (\angle ABC - \pi/2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle DAB = \angle DCB = \alpha + \beta$$

$$3) AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8^2 = 20 - 20 \cos \angle ABC \Rightarrow \cos \angle ABC = 0,6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \angle ABC = 0,8$$

$$4) \angle DCB = \frac{3\pi}{2} - \angle ABC = \frac{3\pi}{2} - \angle ABC \Rightarrow \cos \angle DCB = -0,6$$

$$5) BD^2 = CD^2 + BC^2 - 2CD \cdot BC \cdot \cos \angle DCB$$

$$6) \angle DCB = \angle DAB = \frac{2\pi - \frac{\pi}{2} - \angle ABC}{2} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\angle ABC}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{3\pi}{2} - \angle ABC \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 \angle DCB = \cos^2 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{3\pi}{2} - \angle ABC \right) \right) = \frac{1 + \cos \left( \frac{3\pi}{2} - \angle ABC \right)^2}{2} = \frac{1 - \sin^2 \angle ABC}{2}$$

$$= 0,1 \Rightarrow \cos \angle DCB = -\frac{\sqrt{10}}{10} \quad (\angle DCB > 90^\circ)$$

$$7) BD^2 = DC^2 + BC^2 - 2DC \cdot BC \cdot \cos \angle DCB = 4 + 10 + 4 \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} =$$

$$= 14 + 4 = 18 \Rightarrow BD = 3\sqrt{2}$$

$$8) \begin{cases} SB^2 + BD^2 = BD^2 + SB^2 \\ AD^2 + SD^2 = AS^2 \\ SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10} \end{cases} \begin{cases} 18 + 50 = SB^2 \\ 4 + SD^2 = AS^2 \\ 5A + 5B = 2\sqrt{2} + \sqrt{10} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$14 = SB^2 - AS^2 \Rightarrow SA^2 - BB^2 = -104 \quad \text{найдем!}$$

$$(SA - SB)(SA + SB) = -104 \Rightarrow SA - SB = -\frac{104}{2\sqrt{2} + \sqrt{10}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} SA - SB = -\frac{104}{2\sqrt{2} + \sqrt{10}} \\ SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10} \end{array} \right.$$

$$2SA = 2\sqrt{2} + \sqrt{10} - \frac{104}{2\sqrt{2} + \sqrt{10}} = \frac{(2\sqrt{2} + \sqrt{10})^2 - 104}{2\sqrt{2} + \sqrt{10}} = \frac{8 + 8\sqrt{5} + 10 - 104}{2\sqrt{2} + \sqrt{10}} = \frac{8\sqrt{5} - 80}{2\sqrt{2} + \sqrt{10}} =$$

$$= \frac{4 + 4\sqrt{5} - 2}{2 + 2\sqrt{5} - 1} = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{1 + 2\sqrt{5}} = \frac{\cancel{2}(1 + \sqrt{5})}{\cancel{1}(1 + 2\sqrt{5})} =$$

$$SA = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{1 + 2\sqrt{5}} =$$

$$SD^2 = SA^2 - AD^2 = \frac{4 + 8\sqrt{5} + 20}{2 + 10\sqrt{2} + 25} = \frac{24 + 8\sqrt{5}}{2 + 10\sqrt{2} + 25} = \frac{24 + 8\sqrt{5}}{2 + 10\sqrt{2} + 25} = \frac{24 + 8\sqrt{5}}{2 + 10\sqrt{2} + 25} =$$

$$= \frac{4 + 8\sqrt{5}}{2\sqrt{2} + \sqrt{10}}$$

$$SD^2 = SA^2 - AD^2 = \frac{26 + 64\sqrt{5} + 320}{28 + 8\sqrt{5} + 10} = \frac{32 + 32\sqrt{5} + 40}{8 + 8\sqrt{5} + 10} =$$

$$= \frac{336 + 64\sqrt{5} - 42 - 32\sqrt{5}}{8(2\sqrt{2} + \sqrt{10})^2} = \frac{264 + 32\sqrt{5}}{(2\sqrt{2} + \sqrt{10})^2}$$

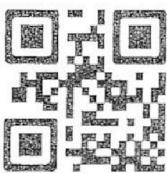
$$SD = \frac{\sqrt{264 + 32\sqrt{5}}}{2\sqrt{2} + \sqrt{10}}$$

$$8) S_{\text{общ}} = S_{\triangle ADC} + S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot CD + \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} (4 + 10 \cdot 8) =$$

$$= 42$$

$$9) V = \frac{S_{\text{общ}} \cdot SD}{3} = 42 \cdot \frac{\sqrt{264 + 32\sqrt{5}}}{2\sqrt{2} + \sqrt{10}}$$

$$\text{Ответ: } 9) \frac{14\sqrt{264 + 32\sqrt{5}}}{2\sqrt{2} + \sqrt{10}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

*МФТИ*

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\ln^2(n+2) - (n+1)\ln(n+1) + (\ln n)\ln(n+1) \geq 0.$$

$$\text{OДЗ: } \begin{cases} n \geq 2 \\ n+1 > 0 \Rightarrow n > -1 \end{cases}$$

$$\ln^2(n+2) - (n+1)\ln(n+1) + (\ln n)\ln(n+1) \geq 0$$

$$\ln^2(n+2) - (n+1)\ln n - (n+1)\ln(n+2) + (\ln n)\ln(n+1) \geq 0$$

$$n(n+1)(\ln(n+1) - (n+1)) + \ln n(\ln(n+2) - (n+1)) \geq 0$$

$$(\ln(n+2) - (n+1))(\ln(n+2) + \ln n) \geq 0$$

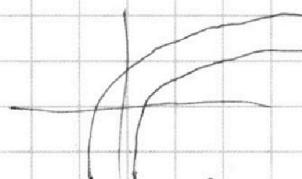
$$\ln(n+2) > \ln e^{(n+1)}$$

$$\ln(n+2) = n+1$$

$$(\ln(n+2))^2 - \frac{1}{n+2}$$

$$n+2 = t$$

$$n+1 = t-1$$



$$\ln(n+2) - \ln e^{n+1} = 0$$

$$\ln\left(\frac{n+2}{e^{n+1}}\right) = \ln e$$

$$\ln t = t-1 \quad n+2 = e^{n+1}$$

$$et = t^t$$

$$\ln t + \ln e = t \ln t$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4 \operatorname{tg} 2n + 1 + \operatorname{ctg}(n + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$2n = \frac{\pi}{3}$$

$$4 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} n}{1 - \operatorname{tg}^2 n} + \frac{1 - \operatorname{tg} n}{1 + \operatorname{tg} n} + 1 = 0 \quad n \neq \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{ctg}(n + \frac{\pi}{4}) =$$

$$4 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} n}{1 - \operatorname{tg}^2 n} + \frac{(1 - \operatorname{tg}^2 n)}{1 - \operatorname{tg}^2 n} = 0$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}(n + \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{\operatorname{tg} n + 1} = \frac{1 - \operatorname{tg} n}{1 + \operatorname{tg} n}$$

$$\frac{8 \operatorname{tg} n + 1 - 2 \operatorname{tg} n + \operatorname{tg}^2 n}{1 - \operatorname{tg}^2 n} = 0$$

$$\frac{4 \operatorname{tg}^2 n + 6 \operatorname{tg} n + 1}{1 - \operatorname{tg}^2 n} = 0 \quad (3 + 2\sqrt{2})^2 + 18 + 12\sqrt{2} + 1$$

$$3 + 2\sqrt{2} \quad \operatorname{tg} n = -\frac{1}{3}$$

$$3 \pm 2\sqrt{2}$$

$$\frac{t^2 + 6t + 1}{1 - t^2} = 0$$

$$9 - 1 = 8$$

$$80 \cdot 80 = 6400$$

$$\begin{cases} t^2 + 6t + 1 = 0 \\ t = \pm 1 \end{cases} \quad \begin{cases} t = -3 \pm 2\sqrt{2} \rightarrow 3 \pm 2\sqrt{2} \\ t = \pm 1 \end{cases} \quad 80 \quad 80$$

$$a = b = 99; c = aq^2$$

$$1 + 80 \cdot 80$$

$$9^3 \cdot 9^3 = 3^{240} \cdot 3^{240}$$

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 2$$

$$\frac{4 \cdot (-\frac{1}{3})}{1 - \frac{4}{9}} + 1 + \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{4}{9}}$$

$$\frac{4}{3} - \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{8}$$

$$= -\frac{1}{3} = -\frac{24}{8} + 1 + 2 =$$

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО** одну задачу.

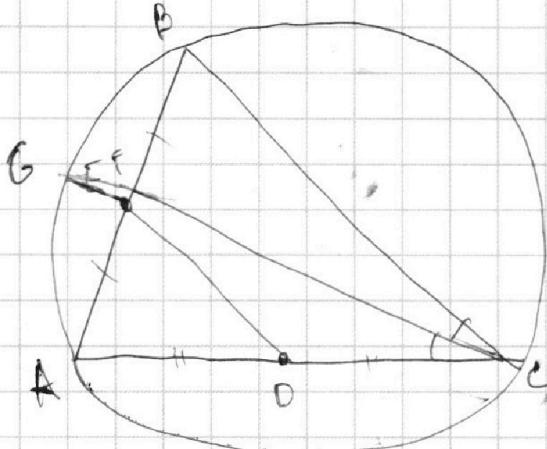
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



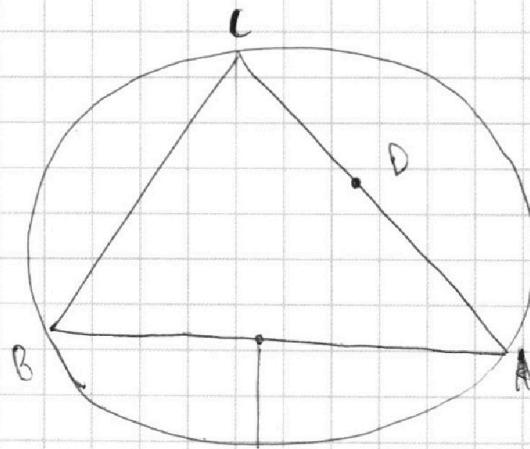
- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

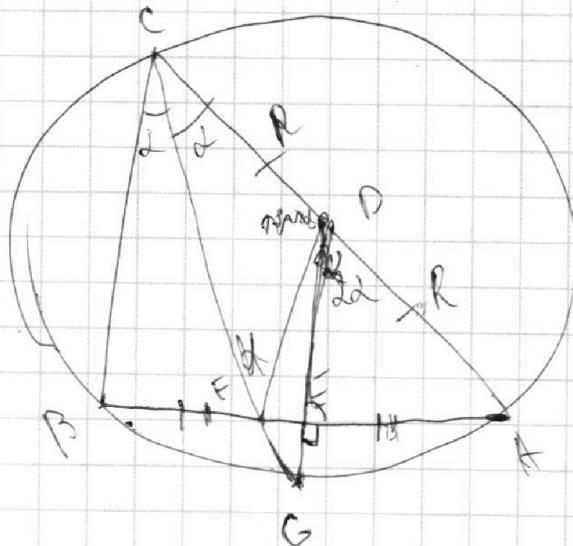
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$



$$\frac{CF}{DF^2} = \frac{2}{7}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

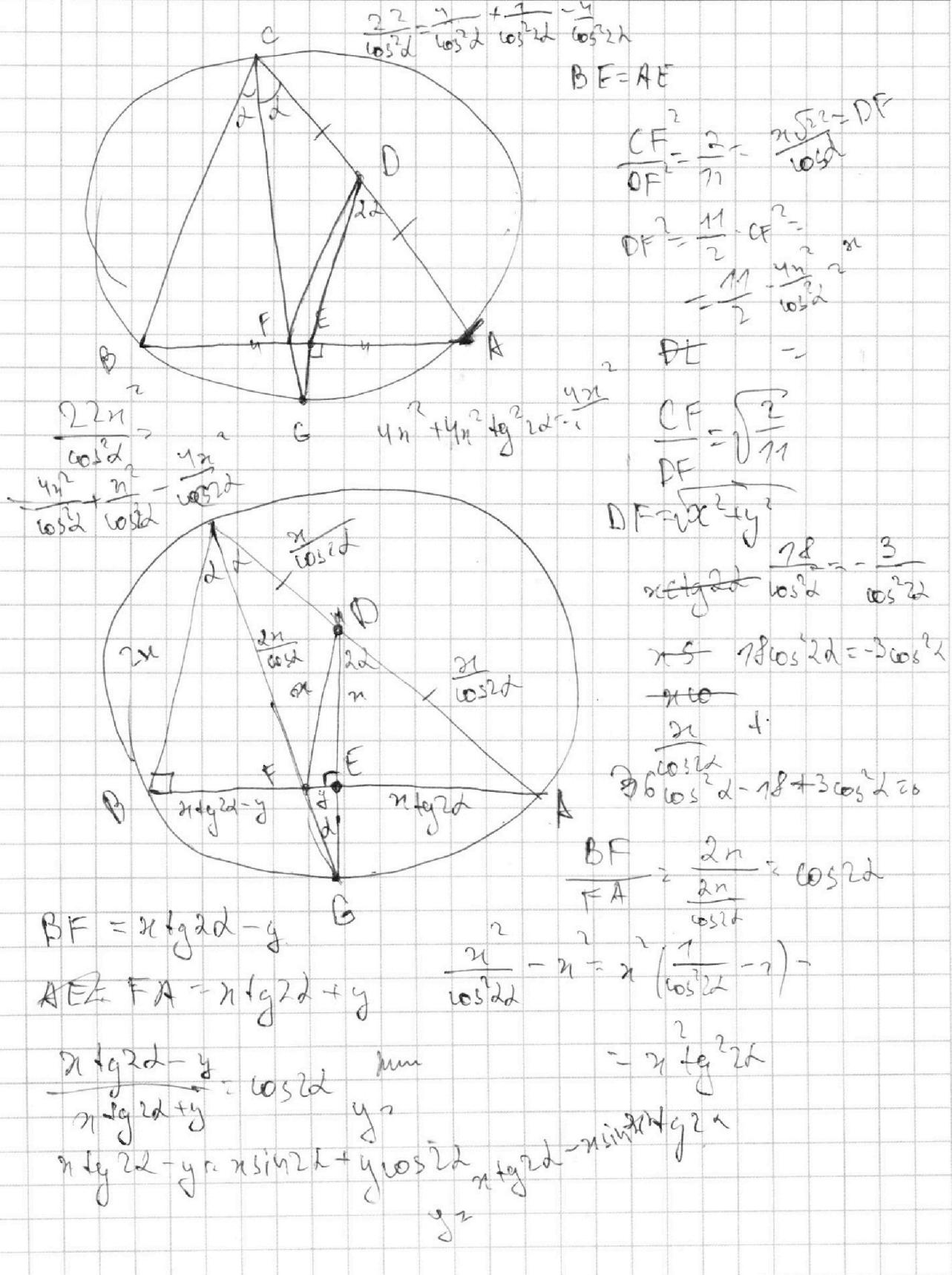
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

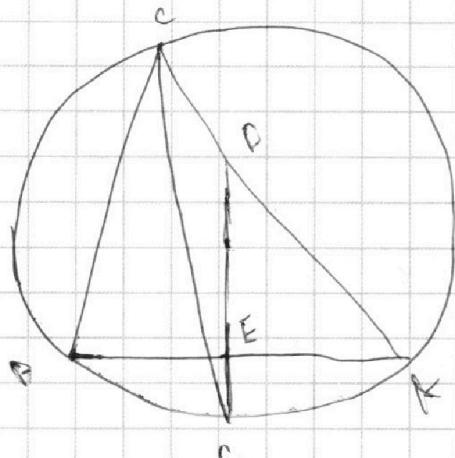
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$9 + 160 - 1,15$$

$$160 - \frac{1}{5}$$

$$\frac{-3 + 13}{80} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{78}{\cos^2 2\alpha} = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} - \frac{1}{\cos^2 2\alpha} - 1,25$$

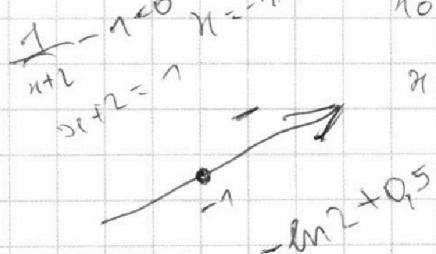
$$\frac{36}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} - \frac{1}{\cos^2 2\alpha} - 1,8$$

$$36 \cos^3 2\alpha - \cos 2\alpha - \cos^2 2\alpha + 4 \cos^2 2\alpha + 4 \cos^3 2\alpha$$

$$40 \cos^3 2\alpha \quad (\ln(n+2))' = \frac{1}{n+2}$$

$$n_0 \approx 3 \quad \frac{1}{n_0+2} (n - n_0) - \ln(n_0+2)$$

$$n_0 = -1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



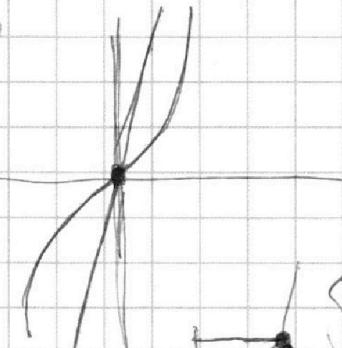
- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$-2n^3 - 9n = \pi - n(2n^2 + 9)$$

$$a > 0$$



$$a < 0 : 2n^2 = 9$$

$$\sqrt{1-5a} = \sqrt{\frac{5-a}{2}}$$

$$1-5a = 5-a$$

$$4a = -4$$

$$a = -1$$

$$\cos^2 \sqrt{1+\frac{1}{25}} =$$

$$f_y = \frac{1}{5} = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

$$\sin = \sqrt{\frac{26-25}{26}}$$

$$fgx = 5$$

$$fg(90-\alpha) = \operatorname{ctgh} = \frac{1}{5} = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$g = \frac{1}{5}$$

$$\cos = \sqrt{\frac{2}{1+25}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \sqrt{5}$$

$$2n^3 + 9n = \frac{1}{5}n$$

$$5n = -2n^3 - 9n \quad | : 3$$

$$-\frac{1}{5}n = -2n^3 - 9n$$

$$2n^3 + 9n - 5n = 0$$

$$\begin{cases} 2n = 0 \\ 2n^2 = 5-a \\ 2n^2 + 9n - 5 = 0 \end{cases} \quad a \leq 5$$

$$10n^2 + 5a - 140$$

$$n = \pm \sqrt{\frac{5a-140}{10}} + \sqrt{\frac{5-a}{10}}$$

$$5a \leq 140 \quad a \leq \frac{140}{5} = 28$$

$$\sqrt{1+\frac{3n^2}{12}} = \sqrt{\frac{325}{24}}$$

$$10n^3 + 5an - n$$

$$1-5a \geq 0$$

$$5a \leq 1 \quad a \leq \frac{1}{5}$$

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 - \frac{10}{z^3} = y^3 - \frac{10}{y^3}$$
$$(x^3 - \frac{10}{x^3}) = y^6 - 20 + \frac{100}{y^6}$$

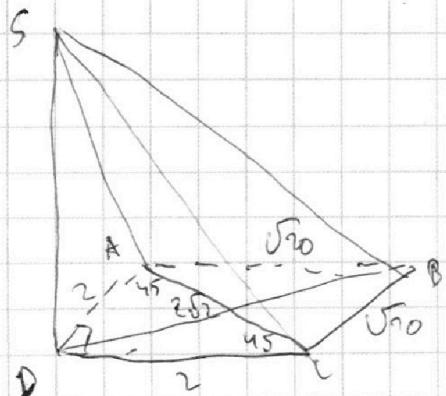
$$a^3 q^3 = 3^{20} \cdot y^{20}$$
$$aq = 3 \cdot y^{\frac{10}{3}}$$
$$q = 3, q = 3$$

$$80 \cdot 79$$

$$80 \cdot 80$$
$$6400 - 2 \quad 6399$$

$$5 \quad 6398 +$$

$$x^3 - y^3 = \frac{10}{z^3} - \frac{10}{y^3}$$



$$SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{50}$$

$$SB^2 + BD^2 = AD^2 + SA^2$$

$$8 = 20 - 20 \cos 2$$

$$20 \cos 2 = 12$$

$$\cos 2 = 0.6$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} = z^3 + \frac{10}{x^3}$$

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3}$$

$$y^3 - \frac{10}{y^3} = x^3 - \frac{10}{z^3}$$

$$x^3 - \frac{10}{x^3} = z^3 - \frac{10}{y^3}$$

$$y^3 - \frac{10}{y^3} = z^3 - \frac{10}{x^3}$$

$$y^3 + z^3 - \frac{10}{z^3} - \frac{10}{y^3} = y^3 - \frac{10}{x^3}$$

$$x^3 y^3 z^3 + 10 x^3 y^3 z^3 = x^3$$

$$x^3 - z^3 = \frac{10}{x^3} - \frac{10}{y^3} = 10 \frac{y^3 - z^3}{x^3 y^3}$$

$$y^3 - \frac{10}{y^3} + 1$$

$$\frac{3}{y^3}$$

$$(y^3)^{1/3}$$

$$x^3 + \frac{10}{x^3} =$$

$$(x-2)(x^2+2x+4) > 10$$

$$\frac{10}{x^3} > \frac{10}{y^3 + \frac{10}{z^3} - \frac{10}{y^3}} = \frac{10 y^3 z^3}{y^6 z^3}$$

$$x^3 - \frac{3}{x^3} - \frac{3}{y^3} - \frac{3}{z^3} - \frac{1}{y^3}$$

$$x^6 y^3 - y^3 z^3 x^3 = 10 y^3 - 10 z^3$$

$$x^3 y^3 (x^3 - z^3) = 10 \sqrt[3]{y^3 + \frac{10}{z^3} - \frac{10}{y^3}}$$

$$y^2 \sqrt[3]{z^3 + \frac{10}{x^3} - \frac{10}{z^3}}$$

$$xy^2 = \sqrt[3]{y^3 + \frac{10}{z^3} - \frac{10}{y^3}}$$

$$y^3 - \frac{10}{y^3}$$

$$y^3 - \frac{10}{y^3} \rightarrow \text{ment}$$

$$y^2 \neq \frac{10}{y^3}$$

$$3y^6 = 30$$

$$y^6 = 10$$