МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12

1. [4 балла] Решите неравенство

$$\left|x^3-9\right|+\left|x^2-1\right| \leqslant \left|x^3-x^2-8\right|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a;b;c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $5^{360}\cdot 7^{90}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y-3)-x(11y-34)+32y-101=0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC. Прямые ED и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что площадь треугольника BCF в 25 раз больше площади треугольника DGF.

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y=-x^5+ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y=2x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a, b и c не все равны между собой, и при этом

$$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения abc.

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC $(AB=BC)$ вписан в окружность ω, а на дуге AC, не содержащей точку B, взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F. На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX=CF$ и $CY=AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF=19$, $XY=36$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1

Заметим, что неравенство имеет вид
$|a|+|b| \le |a-b|$, где $a = x^3-9$, $b = x^2-1$, а значит:

при $b>0, a>0$ нер-во равносильно

$$a+b \le |a-b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b \ge a+b \\ a-b \le -a-b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -b \ge b \\ -a \ge a \end{array}\right. \Leftrightarrow \varnothing$$ на выбр.-ной области

при $b<0, a<0$ нер-во равносильно

$$-a-b \le |a-b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b \ge -a-b \\ a-b \le a+b \end{array}\right. \Leftrightarrow \varnothing$$ на выбр.-ной обл.

при $b>0, a<0$ нер-во $\Leftrightarrow b-a \le |b-a|$ – верно

при $b<0, a>0$ нер-во $\Leftrightarrow a-b \le |a-b|$ – верно

при $b=0$ или $a=0$:

$|a|+0 \le |a-0|$ $\quad 0+|b| \le |0-b|$

$|a| \le |a|$ $\quad |b| \le |-b|$

– верно

т.е. исходное неравенство равносильно следующей системе:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-1>0 \\ x^3-9<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-1<0 \\ x^3-9>0 \end{cases} \\ x^2-1=0 \\ x^3-9=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2>1 \\ x^3<9 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2<1 \\ x^3>9 \end{cases} \\ x^2=1 \\ x^3=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x|>1 \\ x<\sqrt[3]{9} \end{cases} \quad (\sqrt[3]{9}>\sqrt[3]{1}) \\ \begin{cases} |x|<1 \\ x>\sqrt[3]{9} \end{cases} \\ x=\pm 1 \\ x=\sqrt[3]{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

прод. 1

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty; -1) \cup (1; \sqrt[3]{9}) \\ x \in \varnothing \\ x = \pm 1 \\ x = \sqrt[3]{9} \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

2

a, b, c – геом. прогр. Обозначим её знаменатель как q, $q \neq 0, |q| \neq 1$. Так как $abc = 5^{360} \cdot 7^{90}$, ~~$a, b, c \neq 0$~~ $a, b, c \in \mathbb{N}$, $b = aq$, $c = aq^2$, то

$$abc = a \cdot aq \cdot aq^2 = \underline{a^3q^3} = (5^{120} \cdot 7^{30})^3$$

$$\Rightarrow aq = 5^{120} \cdot 7^{30}.$$

Пара $(a; q)$ однозначно определяет всю геометрическую прогрессию $(a; b; c)$ и каждой прогрессии соотв.ет ~~различные~~ уникальная пара $(a; q)$ $\Rightarrow$ кол-во троек $(a; b; c)$ равно кол-ву пар $(a; q)$. Найдём его:

рассмотрим возможные значения q:

т.к. $aq = \cancel{const}\ (5^{120} \cdot 7^{30})$, „$a$" определяется однозначно как $\frac{5^{120} \cdot 7^{30}}{q}$;

из этого следует, что q является натуральным ($a \in \mathbb{N}$) делителем числа $5^{120} \cdot 7^{30}$,

таких делителей (не считая $q = 1$)

$121 \cdot 31 - 1$, т.к. число $5^{120} \cdot 7^{30}$ имеет в своем разложении на простые множители 120 пятёрок и 30 семёрок.

$$\begin{array}{r} 121 \\ \times\ 31 \\ \hline 121 \\ 363\ \ \\ \hline 3751 \end{array}$$

$121 \cdot 31 - 1 = 3750$

Ответ: 3750

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\boxed{3}$

$x^2(y-3)-x(11y-34)+32y-101=0$

$D=(11y-34)^2-4(y-3)(32y-101)=$

$=121y^2-748y+1156-128y^2+404y+384y-1212=$

$=-7y^2+40y-56\geq 0$

$x, y \in \mathbb{Z}$

$\Downarrow$

$y=3$, однако

при $y-3=0$
уравнение вырождается в линейное

$x^2\cdot 0-x(33-34)+32\cdot 3-101=0$

$x=101-96$

$x=5$

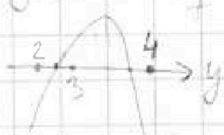
Ответ: $(5;3)$

Рассмотрим
$-7y^2+40y-56=0$

$7y^2-40y+56=0$

$\frac{D}{4}=400-56\cdot 7=8$

$y_{1,2}=\frac{20\pm 2\sqrt{2}}{7}$



$\frac{20-2\sqrt{2}}{7}>2$

$20-2\sqrt{2}>14$

$6>2\sqrt{2}$

$36>8$

$\frac{20-2\sqrt{2}}{7}<3$

$20-2\sqrt{2}<21$

$-1<2\sqrt{2}$

$\frac{20+2\sqrt{2}}{7}>3$

$20+2\sqrt{2}>21$

$2\sqrt{2}>1$

$\frac{20+2\sqrt{2}}{7}<4$

$20+2\sqrt{2}<28$

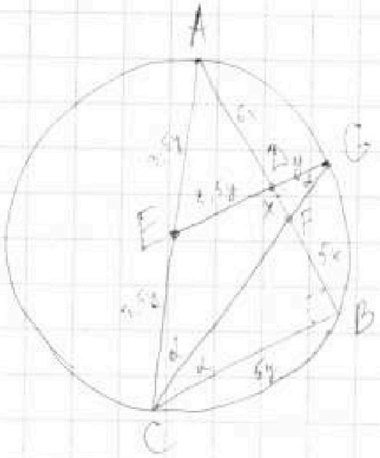
$2\sqrt{2}<8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\boxed{4}$



~~Т.к.~~

Пусть $\angle ACF = \angle BCF = \alpha$, тогда

т.к. E – сер. AC, D – сер. AB, ED – ср. линия, $ED \parallel BC$

$\angle EGC = \angle GCB = \alpha$ (накр. леж.)

$\Rightarrow \Delta GEC$ – р/б, $GE = EC = EA$

$\Rightarrow E$ – центр окр-ти, $\angle AGC = 90°$.

$\angle CBA = \angle AGC = 90°$, т.к. оп-ся на диаметр AC

~~$EG \parallel BC \Rightarrow \angle G$~~ $\left.\begin{array}{l}\angle DFG = \angle CFB \text{ (верт-ные)} \\ \angle DGF = \angle BCF = \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta DGF \sim \Delta BCF$

$$\Rightarrow \frac{DF}{BF} = \frac{DG}{BC} = \sqrt{\frac{S_{DGF}}{S_{BCF}}} = \frac{1}{5}$$

~~(Пусть $DF = x$, тогда $BF = 5x$, $AD = BD = 6x$)~~

Пусть $GD = y$, тогда $BC = 5y$, $ED = \frac{1}{2}BC = 2{,}5y$,

$EC = EG = 3{,}5y = EA$

$$\Rightarrow \sin\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{5y}{7y} = \frac{5}{7} \Rightarrow \angle BAC = \arcsin\left(\frac{5}{7}\right)$$

$$\sin\angle BCA = \underbrace{\sqrt{1-\frac{25}{49}}}_{\sqrt{1-\sin^2\angle BAC}} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7} \Rightarrow \angle BCA = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)$$

Ответ: $\angle ABC = 90°$; $\angle BAC = \arcsin\left(\frac{5}{7}\right)$; $\angle BCA = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

5 : Так как ~~у = −x⁵ + ax~~ диагонали квадрата перпендикулярны, вторая диагональ будет лежать на прямой $y=-\frac{1}{2}x$ $(k_1 \cdot k_2 = -1)$, $k_1 = 2$

две вершины в правой полуплоскости

Координаты вершин будут иметь вид (положим $x_0>0, x_1>0$)

$(x_0; 2x_0), (-x_0; -2x_0), (x_1; -\frac{1}{2}x_1), (-x_1; \frac{1}{2}x_1)$; т.к. точка пересечения диагоналей делит их пополам (в параллелограмме).

$\Rightarrow$ Точки лежат на окр-ти с радиусом $\sqrt{5x_0^2} = x_0\sqrt{5}$

значит, $x_1^2 + \left(-\frac{1}{2}x_1\right)^2 = 5x_0^2$

$$\frac{5x_1^2}{4} = 5x_0^2$$

$$x_1^2 = 4x_0^2$$

$$x_1 = 2x_0$$

$\Rightarrow$ координаты $(x_0; 2x_0), (-x_0; -2x_0), (2x_0; -x_0), (-2x_0; x_0)$ удовлетворяют условию $y=-x^5+ax$:

$$\begin{cases} 2x_0 = -x_0^5 + ax_0 \\ -2x_0 = x_0^5 - ax_0 \\ -x_0 = -32x_0^5 + 2ax_0 \quad |\cdot 2 \\ x_0 = 32x_0^5 - 2ax_0 \quad |\cdot 2 \end{cases}$$

$$-x_0^5 + ax_0 = 64x_0^5 - 4ax_0$$

$$x_0^5 - ax_0 = -64x_0^5 + 4ax_0$$

$$\Updownarrow$$

$$64x_0^5 + x_0^5 - 5ax_0 = 0$$

$$\begin{cases} 65x_0^5 = 5ax_0 \\ 65x_0^5 = 5ax_0 \end{cases} \quad : 5x_0 \neq 0$$

$$13x_0^4 = a$$

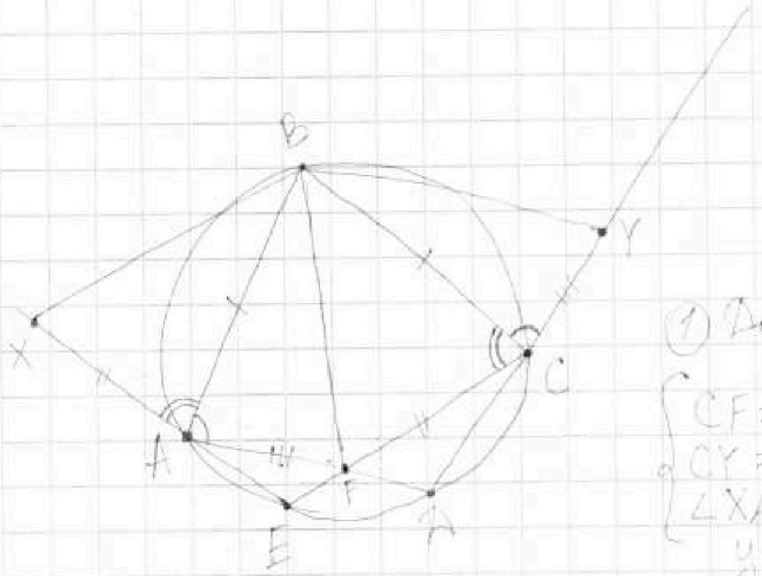
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

7



$AB = BC$
$AX = CF$
$CY = AF$
$BF = 19$
$XY = 36$

$S_{BXFY} - ?$

① Докажем, что $\Delta AFX = \Delta CYF$ и, сл-но, $FX = FY$:

$\begin{cases} CF = AX \\ CY = AF \\ \angle XAF = \angle FCY, \end{cases}$ т.к. смежные им углы EAD и DCE опи-ся на одну дугу DE, ⇒ равны

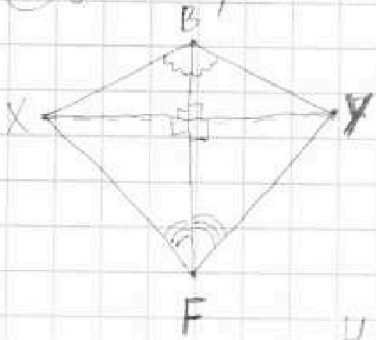
② Докажем, что $BX = BY$:

$\begin{cases} \angle BCY = 180° - \angle BCD = \angle BAF \\ AB = BC \\ AF = CY \end{cases} \Rightarrow \Delta ABF = \Delta CBY$
$\Rightarrow BF = BY$

$\begin{cases} \angle BCF = 180° - \angle BAE = \angle BAX \\ AB = BC \\ AX = FC \end{cases} \Rightarrow \Delta BAX = \Delta BCF$
$\Rightarrow BX = BF = BY$

прод. 7

③ Рассмотрим четырёхугольник BXFY:



т.к. $BX = BY$, $FX = FY$, BF – общая сторона

$\Delta BTX = \Delta BTY \Rightarrow \angle XBT = \angle YBT$, $\angle XTB = \angle YTB$

$\Rightarrow BT$ – бисс., мед., высота ΔBXY и ΔFXY

т.е. $\angle(BT; XY) = 90^\circ$

Найдем площадь четырёхугольника BXFY

по формуле $\frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\angle(d_1; d_2)$:

$$S_{BXFY} = \frac{1}{2} \cdot BF \cdot XY \cdot \sin 90^\circ = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 19 \cdot \cancel{36}^{18} \cdot 1 = 342$$

$\times\begin{array}{r}19\\18\\\hline 152\\19\\\hline 342\end{array}$

Ответ: 342

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$x^2(y-3)-x(11y-34)+32y-101=0$$

$$D=(11y-34)^2-4(y-3)(32y-101)=$$

$$=121y^2-748y+1156-128y^2+404y+384y-1212=$$

$$=-7y^2+40y-56\geq 0$$

$x, y \in \mathbb{Z}$

$\Downarrow$

$y=3$

$\cancel{D=-7\cdot 9+40\cdot 3-56=1}$

$\cancel{x=\dfrac{11y-34\pm\sqrt{D}}{2(y-3)}}$

уравнение ~~вы~~ вырождается в линейное:

$x^2\cdot 0-x(33-34)+32\cdot 3-101$

$x-5=0$

$x=5$

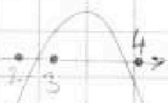
Ответ: $(5;3)$

$-7y^2+40y-56=0$

$7y^2-40y+56=0$

$\frac{D}{4}=400-7\cdot 56=8$

$y_{1,2}=\dfrac{20\pm 2\sqrt{2}}{7}$



$\dfrac{20-2\sqrt{2}}{7}<3$

$20-2\sqrt{2}<21$

$-1<2\sqrt{2}$

$\dfrac{20-2\sqrt{2}}{7}>2$

$20-2\sqrt{2}>14$

$6>2\sqrt{2}$

$36>8$

$\dfrac{20+2\sqrt{2}}{7}>3$

$20+2\sqrt{2}>21$

$2\sqrt{2}>1$

$\dfrac{20-2\sqrt{2}}{7}<4$

$20+2\sqrt{2}<28$

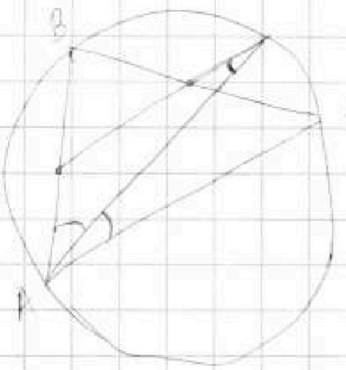
$2\sqrt{2}<8$

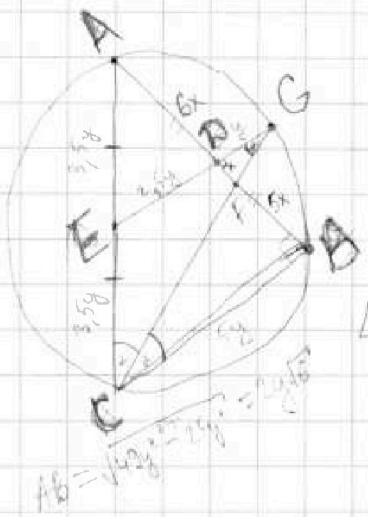
$8<64$

⑤

т.к. центр делит диагонали пополам (и эти диагонали равны)

две другие — $(x_2; -\frac{1}{2}x_2), (x_4; -\frac{1}{2}x_4)$





$\angle AGC=90^\circ$

$\Downarrow$

$\angle ABC=90^\circ$

$\sin A=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{5}{7}$

$AB=\sqrt{49y^2-24y^2}=$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

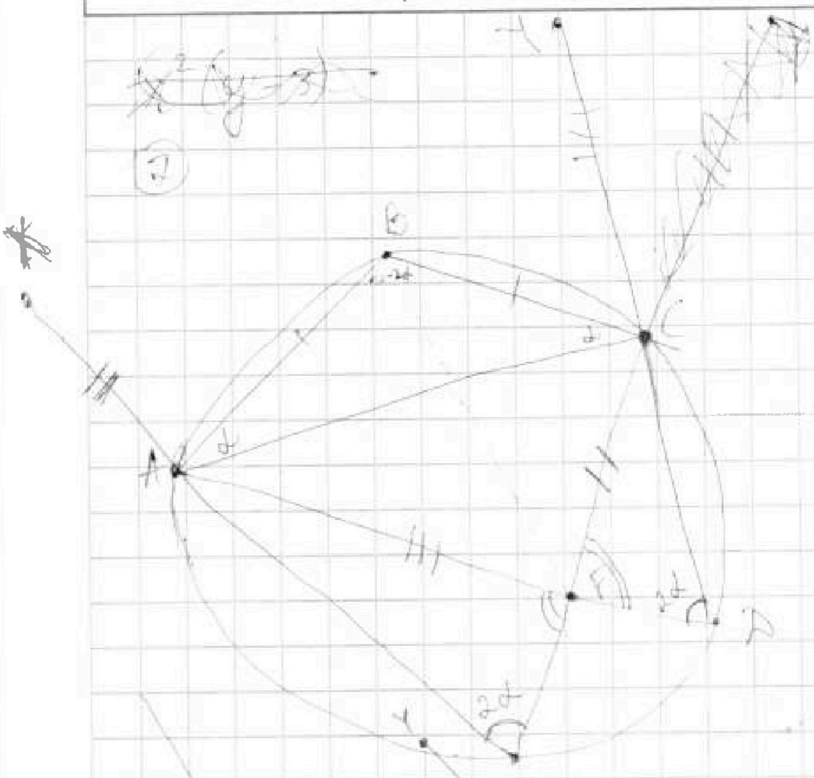
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

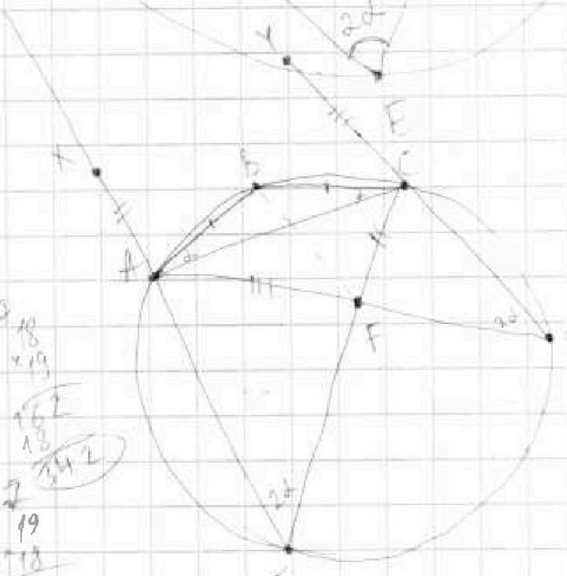
~~$x^2(y-3)$~~

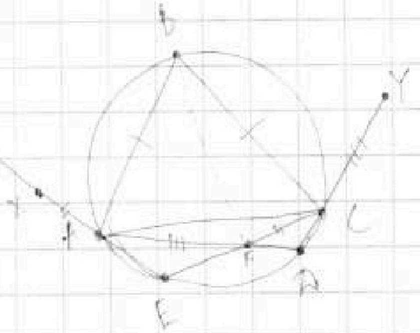
7



$\angle EF\angle D = 2\alpha$

$S_{BXFY} - ?$
$BF = 19,\ XY = 36$

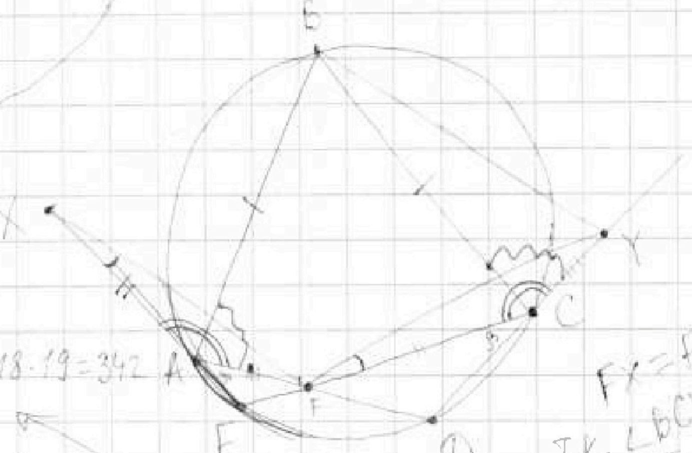




$\begin{array}{r} 18 \\ \times 19 \\ \hline 162 \\ 18 \\ \hline 342 \end{array}$

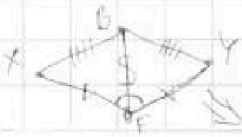
$\begin{array}{r} 19 \\ \times 18 \\ \hline 152 \\ 19 \\ \hline 342 \end{array}$


– ромб



$S_{BXFY} = \frac{19 \cdot 36}{2} = 18 \cdot 19 = 342$

$FX = FY$
т.к. $\angle BCY = \angle BAF$,
$BF = BY$
аналогично $\angle BCF = \angle BAX$
$\Rightarrow BF = BX$


⇒ биссектр., мед. и выс.

Ответ: 342

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

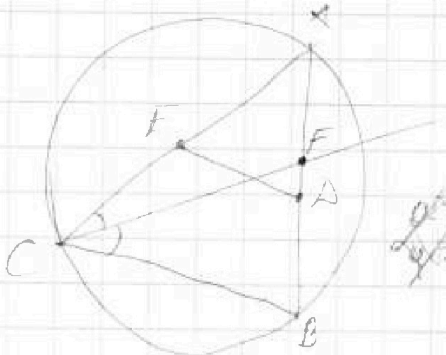
(ЧЕРНОВИК)

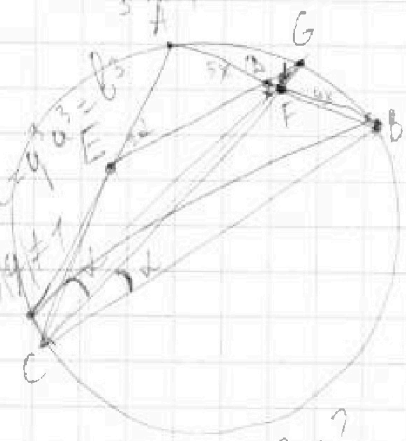
$|x^3-9|+|x^2-1| \leq |x^3-x^2-8|$

$x^3-9=a \quad x^2-1=b$

$|a|+|b| \leq |a-b|$

просто раскрыть модули.





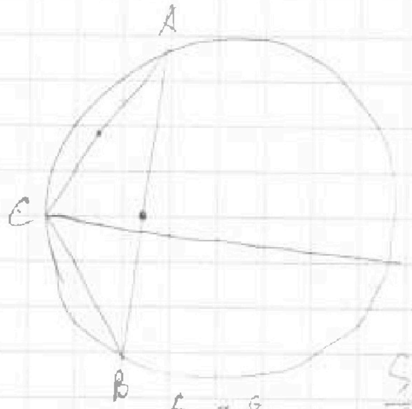
a, b, c – г. прогр.

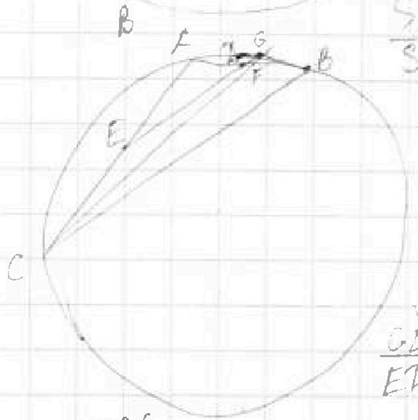
$b=qa$

$c=q^2a$

$abc=a\cdot qa\cdot q^2a=q^3a^3=b^3$

$|q|\neq 0, q\neq 1$





$\frac{S_{BCF}}{S_{BGF}}=25$

$\frac{GD}{BC}=\frac{1}{5}$

(коэфф. проп-ти)

$\frac{GD}{ED}=\frac{2}{5}$

$a, b, c \in \mathbb{N}$

a, b, c – геом. прогр.

$abc=5^{360}\cdot 7^{90}$

$b^3=5^{360}\cdot 7^{90}$

$b^3=(5^{120}\cdot 7^{30})^3$

$b=5^{120}\cdot 7^{30}$

$a=\frac{b}{q}$ $aq=5^{120}\cdot 7^{30}$

a и q однозначно определяют ск. все члены геом. прогрессии, сл-но задача – найти кол-во возможных сочетаний a и q

при $a>0$ (по зн. как есть), $a^3q^3>0$, $q>0$

$\angle A, \angle B, \angle C$ – ?

CF-бисс.

$\frac{AC}{BC}=\frac{AF}{BF}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

$CE=EG$ $(\alpha=\alpha)$

$\frac{2CE}{BC}=\frac{3}{2}$

$CE=\frac{1}{2}BC+\frac{1}{5}BC=\frac{7}{10}BC$

$\frac{3}{4}BC=\frac{7}{10}BC$, как?

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a}$; не все равны между собой; $a, b, c \neq 0$

$\max(abc)$ — ?

$$\begin{cases} a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c} & |\cdot bc\neq 0 \\ b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a} & |\cdot ac\neq 0 \end{cases}$$

$abc+7c=b^2c+7b$

$\Updownarrow$

$bc(a-b)=7(b-c)$

$abc+7a=ac^2+7c$

$\Updownarrow$

$ac(b-c)=7(c-a)$

$\left(a+\frac{7}{b}\right)\cdot\frac{b}{a}=b+\frac{7}{a}$

$c-\frac{7}{c}=b-\frac{7}{a}\to\frac{c^2-7}{c}=\frac{ab-7}{a}$

$$\begin{cases} a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c} \\ b=c+\frac{7}{a}-\frac{7}{c} \end{cases}$$

$abc=ac^2-7a+7c$

$a+\frac{7}{c+\frac{7}{a}-\frac{7}{c}}=c+\frac{7}{a}-\frac{7}{c}+\frac{7}{c}$

$\frac{a\left(c+\frac{7}{a}-\frac{7}{c}\right)+7}{c+\frac{7}{a}-\frac{7}{c}}=c+\frac{7}{a}$

$c^2+\frac{14c}{a}-7+\frac{49}{a^2}-\frac{49}{ac}$

$ac+7-\frac{7a}{c}+7=\left(c+\frac{7}{a}\right)\left(c+\frac{7}{a}-\frac{7}{c}\right) \quad |\cdot a^2c$

$a^3c^2+14a^2c-7a^3=a^2c^3+14ac^2-7a^2c+49c-49a$

$a+\frac{7}{b}=c+\frac{7}{a}$; $a^2+\frac{7a}{b}=ac+7$; $abc=7b$

$a^2bc+7ac=ab^2c+7ab=abc^2+7bc$

$\left(a+\frac{7}{b}\right)^3=\left(a+\frac{7}{b}\right)\left(b+\frac{7}{c}\right)\left(c+\frac{7}{a}\right)=$

$=abc+7b+7a+\frac{49}{c}+$

$+7c+\frac{49}{a}+\frac{49}{b}+\frac{343}{abc}+$

$=abc+7(a+b+c)+49\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{343}{abc}$

$=a^3+3\cdot a^2\cdot\frac{7}{b}+3\cdot a\cdot\frac{49}{b^2}+\frac{343}{b^3}$

$\Downarrow$

$abc=a^3+7\left(\frac{3a^2}{b}-a-b-c\right)+49\left(\frac{3a}{b^2}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)$

$b\neq c$

$c+\frac{7}{a}-\frac{7}{c}\neq c$

$\frac{7}{a}-\frac{7}{c}\neq 0$

$\frac{7}{a}\neq\frac{7}{c}$

тогда $a\neq c$ тогда если

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} abc = a^2b + 7a - 7b \\ abc = b^2c + 7b - 7c \\ abc = ac^2 + 7c - 7a \end{cases}$$

$\cancel{3abc = b^2c + ac^2 + 7b - 7a}$

$3abc = a^2b + b^2c + ac^2 \rightarrow abc = \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{3}$

$6abc = a^2b + b^2c + b^2c + ac^2 + ac^2 + a^2b$

$b(a^2 + bc) + c(b^2 + ac) + a(c^2 + ab)$

$bc + 7 = c^2 + \frac{7c}{a}$

$b = c + \frac{7}{a} - \frac{7}{c}$

$bc + 7 = ac + \frac{7c}{b}$

$34 \cdot 22 = 68 + 68 = 748$

$34 \cdot 34 = 136 + 102 = 1156$

$-7a^3 + a^3c^2 + 21a^2c - a^2c^3 - 14ac^2 + 49a - 49c = 0$

~~допустим,~~

~~$a > 0$, c~~

$\cancel{\frac{ab+7}{b} > a}$ $\quad \cancel{c + \frac{7}{a} > c}$

$\frac{ab+7}{b} = \frac{bc+7}{c} = \frac{ac+7}{a}$

$\frac{b}{ab+7} = \frac{c}{bc+7} = \frac{a}{ac+7}$

Положим $a > b > c$:

Предположим $a > 7$, $c > 7$, тогда

$b = c + \underbrace{\frac{7}{a}}_{<1} - \underbrace{\frac{7}{c}}_{<1}$

$|a| + |b| \le |a - b|$

при $b > 0$, $a > 0$

$\Downarrow$

$a + b \le |a - b| \iff \left[\begin{array}{l} a + b \le a - b \\ a \ge b \\ a + b \le b - a \\ a < b \end{array}\right. \iff \varnothing$

при $\left[\begin{array}{l} b > 0, a < 0 \Rightarrow b - a \le |b - a| \text{ — верно} \\ a > 0, b < 0 \Rightarrow a - b \le |a - b| \text{ — верно} \end{array}\right.$

при $b < 0$, $a < 0$:

$|a - b| \ge -a - b$

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l} a - b \ge -a - b \\ a - b \le a + b \end{array}\right. \iff \varnothing$

$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \le |x^3 - x^2 - 9 + 1|$

$|x^3 - 9 - (x^2 - 1)|$

$x^2 - 1 \ge 0$ или $x^2 - 1 < 0$:

$(x^2 \ge 1)$ $\quad (x^2 < 1)$

$x^3 - 9 \ge 0$ или $x^3 - 9 < 0$ $\quad x^3 - 9 \ge 0$ или $x^3 - 9 < 0$

$(x^3 \ge 9)$ $\quad (x^3 < 9)$ $\quad (x^3 \ge 9)$ $\quad (x^3 < 9)$

$\varnothing$