



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $5^{360} \cdot 7^{90}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 3) - x(11y - 34) + 32y - 101 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 25 раз больше площади треугольника DGF .
5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 2x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a , b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 19$, $XY = 36$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4

Заметим, что неравенство имеет вид

$$|a| + |b| \leq |a - b|, \text{ где } a = x^3 - 9, b = x^2 - 1, \text{ а значит:}$$

при $v > 0, a > 0$ нер-во равносильно

$$a + v \leq |a - v| \Leftrightarrow \begin{cases} a - v \geq a + v \\ a - v \leq -a - v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v \geq v \\ -a \geq a \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset \text{ на выбор. ной обл.}$$

при $v < 0, a < 0$ нер-во равносильно

$$-a - v \leq |a - v| \Leftrightarrow \begin{cases} a - v \geq -a - v \\ a - v \leq a + v \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset \text{ на выбор. ной обл.}$$

при $v > 0, a < 0$ нер-во $\Leftrightarrow v - a \leq |v - a|$ - верно

при $v < 0, a > 0$ нер-во $\Leftrightarrow a - v \leq |a - v|$ - верно

при $v = 0$ или $a = 0$:

$$|a| + 0 \leq |a - 0| \quad 0 + |v| \leq |0 - v|$$

$$|a| \leq |a| \quad |v| \leq |-v|$$

- верно

т.е. исходное неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^3 - 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 1 \\ x^3 < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 1 \\ x < \sqrt[3]{9} \quad (\sqrt[3]{9} > \sqrt[3]{1}) \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ x^3 - 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 1 \\ x^3 > 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| < 1 \\ x > \sqrt[3]{9} \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x^3 - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \sqrt[3]{9} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

пр. 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup (1; \sqrt[3]{9}) \\ x \in \emptyset \\ x = \pm 1 \\ x = \sqrt[3]{9} \end{cases}$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2 a, b, c - геом. прогр. Обозначим её знаменатель как q , $q \neq 0, |q| \neq 1$. Так как $abc = 5^{120} \cdot 7^{30}$, $a, b, c \neq 0$

$a, b, c \in \mathbb{N}$, $b = aq, c = aq^2$, то

$$abc = a \cdot aq \cdot aq^2 = a^3 q^3 = (5^{120} \cdot 7^{30})^3$$

$$\Rightarrow aq = 5^{40} \cdot 7^{10}$$

Пара $(a; q)$ однозначно определяет всю геометрическую прогрессию $(a; b; c)$ и каждой прогрессии соотв. ~~есть~~

~~различна~~ уникальная пара $(a; q) \Rightarrow$ кол-во троек

$(a; b; c)$ равно кол-ву пар $(a; q)$. Найдем его:

рассмотрим возможные значения q :

т.к. $aq = \text{const}$, a определяется однозначно как $\frac{5^{120} \cdot 7^{30}}{q}$,
из этого следует, что q является делителем числа $5^{120} \cdot 7^{30}$,

таких делителей (не считая $q=1$)

$121 \cdot 31 - 1$, т.к. число $5^{120} \cdot 7^{30}$ имеет в своем разложении на простые множители 120 пятерок и 30 семерок.

$$121 \cdot 31 - 1 = 3750$$

Ответ: 3750

$$\begin{array}{r} 121 \\ \times 31 \\ \hline 121 \\ 363 \\ \hline 3751 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3

$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$$

$$\Delta = (11y-34)^2 - 4(y-3)(32y-101) =$$

$$= 121y^2 - 748y + 1156 - 128y^2 + 404y + 384y - 1212 =$$

$$= -7y^2 + 40y - 56 \geq 0$$

$$x, y \in \mathbb{Z}$$



$$y = 3, \text{ однако}$$

$$\text{при } y-3=0$$

уравнение вырождается в линейное

$$x^2 \cdot 0 - x(33-34) + 32 \cdot 3 - 101 = 0$$

$$x = 101 - 96$$

$$x = 5$$

$$\text{Ответ: } (5; 3)$$

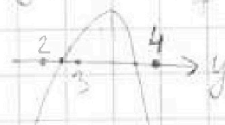
Рассмотрим

$$-7y^2 + 40y - 56 = 0$$

$$7y^2 - 40y + 56 = 0$$

$$\Delta = 400 - 96 \cdot 7 = 8$$

$$y_{1,2} = \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{7}$$



$$\frac{20 - 2\sqrt{2}}{7} > 2$$

$$\frac{20 - 2\sqrt{2}}{7} > 14$$

$$0 > 2\sqrt{2}$$

$$36 > 8$$

$$\frac{20 - 2\sqrt{2}}{7} < 3$$

$$\frac{20 - 2\sqrt{2}}{7} < 21$$

$$-1 < 2\sqrt{2}$$

$$\frac{20 + 2\sqrt{2}}{7} > 3$$

$$\frac{20 + 2\sqrt{2}}{7} > 21$$

$$2\sqrt{2} > 1$$

$$\frac{20 + 2\sqrt{2}}{7} < 4$$

$$\frac{20 + 2\sqrt{2}}{7} < 28$$

$$2\sqrt{2} < 8$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

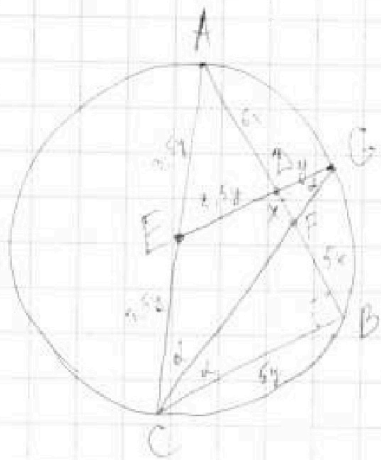
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4



~~Их.~~

Пусть $\angle ACF = \angle BCF = d$, тогда

т.к. E - с-р. AC, D - с-р. AB, ED - с-р. линии,
ED \parallel BC

$\angle EGC = \angle GCB = d$ (накр. пар.)

$\Rightarrow \triangle GEC$ - р/б, $GE = EC = EA$

\Rightarrow E - центр окр-ти, $\angle AGC = 90^\circ$.

$\angle CBA = \angle AGC = 90^\circ$, т.к. оп-ся на диаметр AC

~~EG \parallel BC \Rightarrow EG~~ $\angle DFG = \angle CFB$ (верт.-ные) $\Rightarrow \triangle DGF \sim \triangle BCF$
 $\angle DGF = \angle BCF = d$

$$\Rightarrow \frac{DF}{BF} = \frac{DG}{BC} = \sqrt{\frac{S_{DGF}}{S_{BCF}}} = \frac{1}{5}$$

(Пусть $DF = x$, тогда $BF = 5x$, $AD = BD = 6x$)

Пусть $GD = y$, тогда $BC = 5y$, $ED = \frac{1}{2}BC = 2,5y$,

$EC = EG = 3,5y = EA$

$$\Rightarrow \sin \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{5y}{7y} = \frac{5}{7} \Rightarrow \angle BAC = \arcsin\left(\frac{5}{7}\right)$$

$$\sin \angle BCA = \sqrt{1 - \frac{25}{49}} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7} \Rightarrow \angle BCA = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)$$

$\uparrow \sqrt{1 - \sin^2 \angle BAC}$

Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$; $\angle BAC = \arcsin\left(\frac{5}{7}\right)$; $\angle BCA = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5) Так как ~~$y = -x + a$~~ диагонали квадрата
перпендикулярны, вторая диагональ будет лежать
на прямой $y = -\frac{1}{2}x$ ($k_1 \cdot k_2 = -1$)
 $k_1 = 2$ обе вершины в первой полуплоскости

Координаты вершин будут иметь вид (положим $x_0 > 0, x_1 > 0$)

$(x_0; 2x_0), (-x_0; -2x_0), (x_1; -\frac{1}{2}x_1), (-x_1; \frac{1}{2}x_1)$; т.к.

точка пересечения диагоналей делит их пополам
(в параллелограмме).

\Rightarrow Точки лежат на окр-ти с радиусом $\sqrt{5x_0^2} = x_0\sqrt{5}$

значит, $x_1^2 + (-\frac{1}{2}x_1)^2 = 5x_0^2$

$$\frac{5x_1^2}{4} = 5x_0^2$$

$$x_1^2 = 4x_0^2$$

$$x_1 = 2x_0$$

\Rightarrow координаты $(x_0; 2x_0), (-x_0; -2x_0), (2x_0; -x_0), (-2x_0; x_0)$
удовлетворяют условию $y = -x^5 + ax$:

$$\begin{cases} 2x_0 = -x_0^5 + ax_0 \\ -2x_0 = x_0^5 + ax_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x_0^5 + ax_0 = 64x_0^5 - 4ax_0 \\ x_0^5 - ax_0 = -64x_0^5 + 4ax_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_0 = -32x_0^5 + 2ax_0 \quad | \cdot 2 \\ x_0 = 32x_0^5 - 2ax_0 \quad | \cdot 2 \end{cases}$$

$$64x_0^5 + x_0^5 - 5ax_0 = 0$$

$$\begin{cases} 65x_0^5 = 5ax_0 & | : 5x_0 \neq 0 \\ 65x_0^5 = 5ax_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 13x_0^4 = a$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

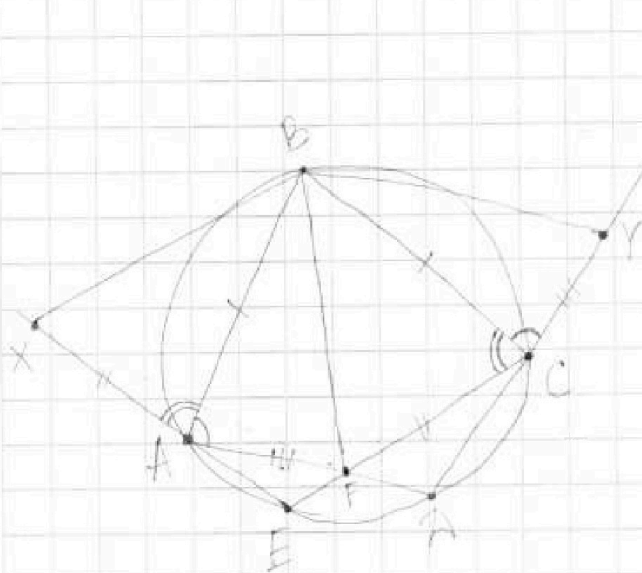
1 2 3 4 5 6 7

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



7



$$AB = BC$$

$$AX = CF$$

$$CY = AF$$

$$BF = 19$$

$$XY = 36$$

$S_{\triangle XYC} = ?$

① Докажем, что $\triangle AFX = \triangle CYF$
и, следовательно, $FX = FY$:

$\begin{cases} CF = AX \\ CY = AF \\ \angle XAF = \angle FCY, \text{ т.к. смежные ил} \\ \text{углы } \angle EAD \text{ и } \angle BCE \text{ оп-ся на одну} \\ \text{дугу } DE, \Rightarrow \text{ равны} \end{cases}$

② Докажем, что $BX = BY$:

$\begin{cases} \angle BCY = 180^\circ - \angle BCD = \angle BAF \\ AB = BC \\ AF = CY \end{cases} \Rightarrow \triangle ABF = \triangle CBY$
 $\Rightarrow BF = BY$

$\begin{cases} \angle BCF = 180^\circ - \angle BAE = \angle BAX \\ AB = BC \\ AX = FC \end{cases} \Rightarrow \triangle BAX = \triangle BCF$
 $\Rightarrow \underline{BX} = BF = \underline{BY}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

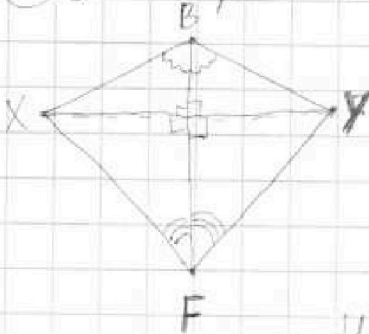
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

проб. 7

3) Рассмотрим четырехугольник $BXYF$:



т.к. $BX = BY$, $FX = FY$, BF — общая сторона

$$\Delta BTX = \Delta BTY \Rightarrow \angle XBT = \angle YBT, \angle XTB = \angle YTB$$

$\Rightarrow BT$ — бисс., мед., высота ΔBXY и ΔFXY

$$\text{т.е. } \angle(BT; XY) = 90^\circ$$

Найдем площадь четырехугольника $BXYF$

по формуле $\frac{1}{2}d_1 d_2 \sin \angle(d_1, d_2)$:

$$S_{BXYF} = \frac{1}{2} \cdot BF \cdot XY \cdot \sin 90^\circ = \frac{1}{2} \cdot 19 \cdot \overset{18}{36} \cdot 1 = 342$$

Ответ: 342

19
18
342
19
342

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$$

$$\Delta = (11y-34)^2 - 4(y-3)(32y-101) =$$

$$= 121y^2 - 748y + 1156 - 128y^2 + 404y + 384y - 1212 =$$

$$= -7y^2 + 40y - 56 \geq 0$$

$$x, y \in \mathbb{Z}$$

$$y = 3$$

$$\Delta = 7 \cdot 9 + 40 \cdot 3 - 56 = 119$$

$$x = \frac{11y + 34 \pm \sqrt{\Delta}}{2(y-3)}$$

значения Δ должны быть квадратами в линейном:

$$x^2 - x(33-34) + 32 \cdot 3 - 101 = 0 \Rightarrow x^2 - x + 56 = 0$$

центры дуг окружности перпендикулярны хордам

$$x - 5 = 0$$

$$x = 5$$

$$\text{Ответ: } (5; 3)$$

или $(x_2; -\frac{1}{2}x_2), (x_4; -\frac{1}{2}x_4)$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 12 \\ \hline 64 \\ 320 \\ \hline 384 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 12 \\ \hline 202 \\ 1010 \\ \hline 1212 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -7y^2 + 40y - 56 = 0 \\ 7y^2 - 40y + 56 = 0 \end{array}$$

$$\frac{D}{4} = 400 - 7 \cdot 56 = 8$$

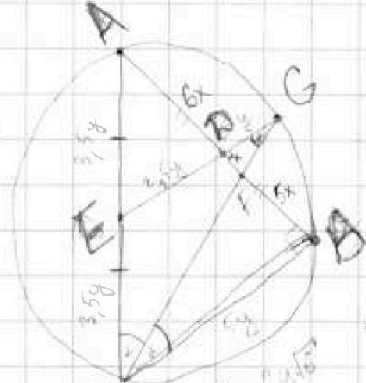
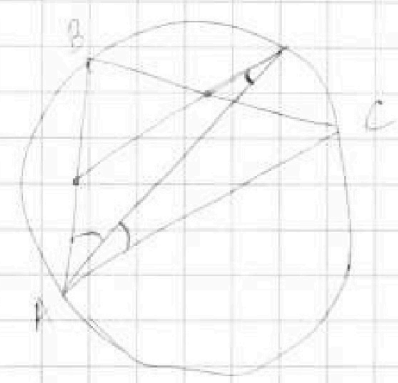
$$y_{1,2} = \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{7}$$



$$\begin{array}{l} \frac{20-2\sqrt{2}}{7} > 3 \\ 20-2\sqrt{2} > 21 \\ 6 > 2\sqrt{2} \\ 3 > \sqrt{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{20+2\sqrt{2}}{7} > 3 \\ 20+2\sqrt{2} > 21 \\ 2\sqrt{2} > 1 \\ \sqrt{2} > 0.5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ -56 \\ \hline 44 \\ -88 \\ \hline 1 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} \angle AGC = 90^\circ \\ \angle ABC = 90^\circ \\ \sin \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}$$

$$AB = \sqrt{40y^2 - 20y} = 2\sqrt{10y}$$



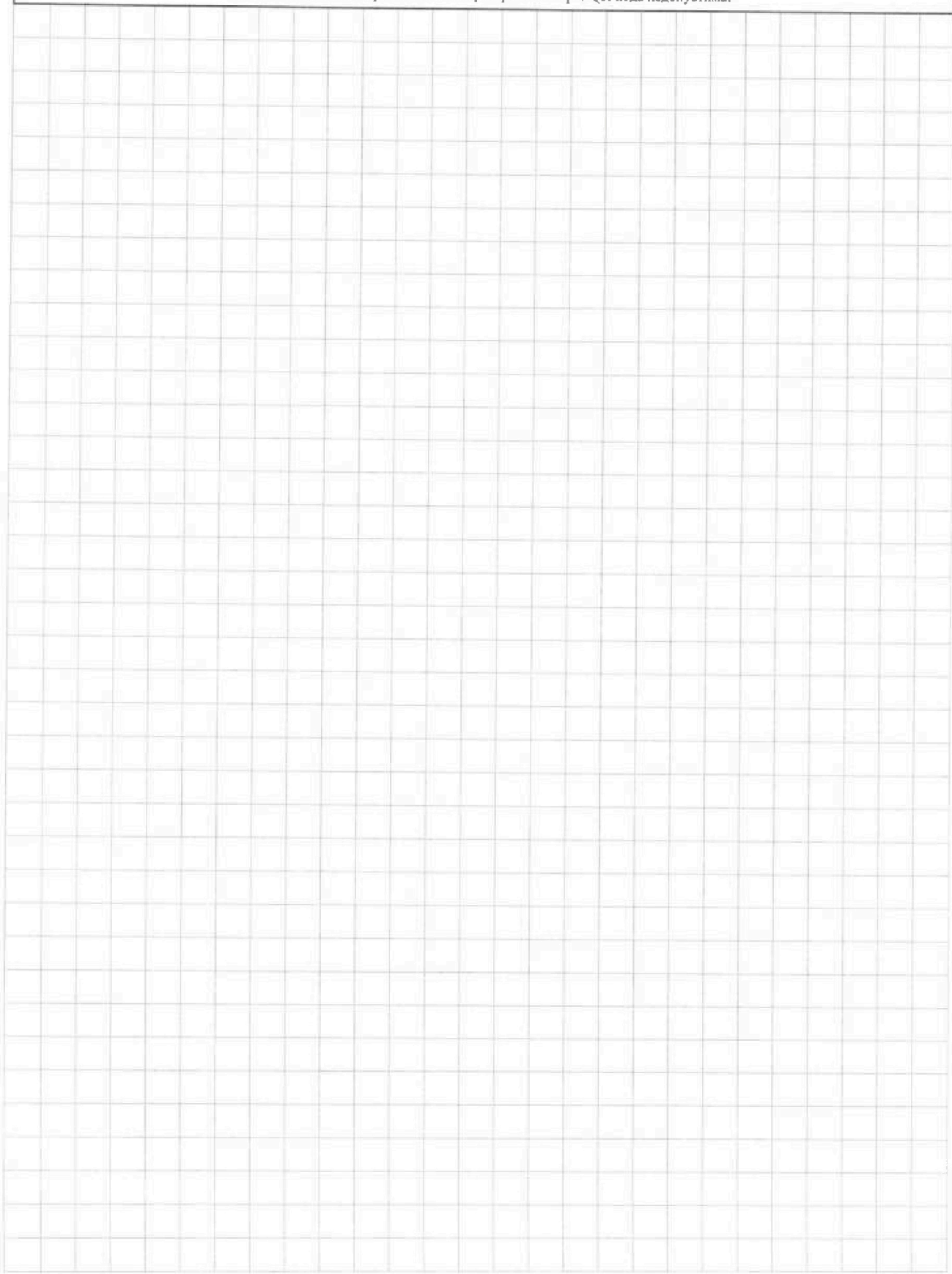
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$x^2 + y^2 = 36$~~
(?)

$\angle EFLD = 2\alpha$

$(S_{BXFY} = ?)$
 $(BF = 19, XY = 36)$

$3 \cdot 18$
 $\times 19$

 162
 18

 $2 \cdot 342$
 19

 18
 152
 19

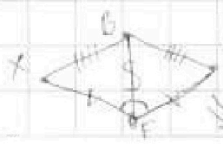
 342



$S_{BXFY} = \frac{19 \cdot 36}{2} = 18 \cdot 19 = 342$

Ответ: 342

$FX = FY$
т.к. $\angle BCY = \angle BAF$,
 $BF = BY$,
и $\angle BCF = \angle BAX$
 $\Rightarrow BF = BX$
 \Rightarrow бисс. пер. и вкр.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(ЧЕРНОВИК)

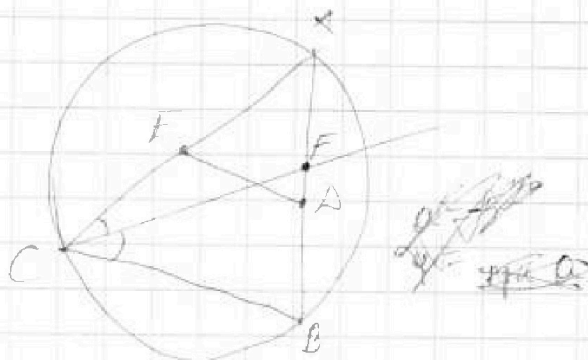
$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|$$

$$x^2 - 9 = 0 \quad x^2 - 1 = 0$$

$$|a| + |b| \leq |a - b|$$

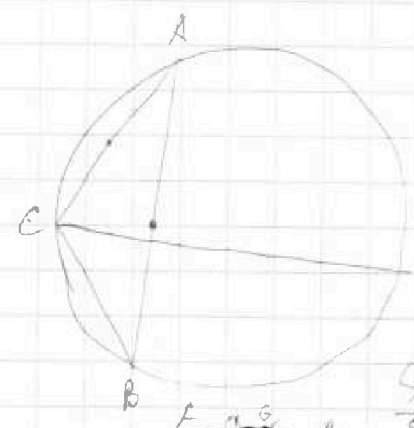
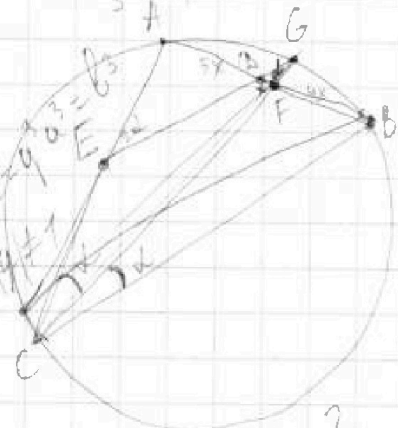
просто раскрыть модули.

1/3;
1
2/3



$$\begin{array}{r} 121 \\ - 421 \\ \hline 303 \\ - 3751 \\ \hline \end{array}$$

a, b, c - г. прогр. \Rightarrow
 $b = 9a$
 $c = 9^2 a$
 $abc = a \cdot 9a \cdot 9^2 a = 81a^3 = b^3$
 $|r| \neq 0, r \neq 1$



a, b, c, \sin
 a, b, c - геом. прогр.
 $abc = 5^3 \cdot 7^3$
 > 0

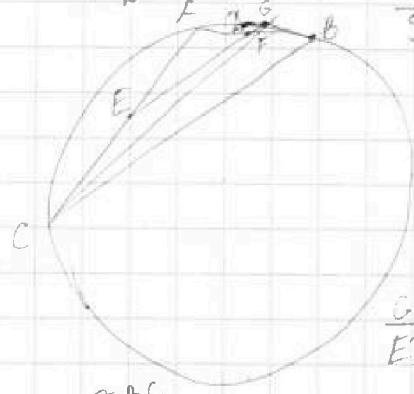
$\angle A, \angle B, \angle C - ?$
 CF - бисс.

$$b^3 = 5^3 \cdot 7^3$$

$$b^3 = (5^{120} \cdot 7^{30})^3$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AF}{BF} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$CE = EG (x = 1)$$



$$\frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle BGF}} = 25$$

$$\downarrow$$

$$\frac{GA}{BC} = \frac{1}{5}$$

по формуле прот-ти

$$\downarrow$$

$$\frac{GD}{EA} = \frac{2}{5}$$

$$b = 5^{120} \cdot 7^{30}$$

$$a = \frac{b}{9} = 5^{120} \cdot 7^{30} / 9$$

$$c = 9^2 a = 5^{120} \cdot 7^{30} \cdot 9$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{2CE}{BC} = \frac{3}{2}$$

$$CE = \frac{1}{2} BC + \frac{1}{5} BC = \frac{7}{10} BC$$

$$\frac{3}{4} BC = \frac{7}{10} BC \text{ huh?}$$

используются ст. геометрии, свойства задачи -

МФТИ кол-во возможных сочетаний a и b при $a > 0$ (по условиям задачи), $a^3 b^3 > 0 \Rightarrow a > 0$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}$; ~~$a \neq b \neq c, a \neq c, b \neq c$~~
 не все равны между собой
 $a, b, c \neq 0$

max(abc) - ?

$$\begin{cases} a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} & | \cdot bc \neq 0 \\ b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a} & | \cdot a \neq 0 \end{cases}$$

~~$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} \Rightarrow abc = b^2c + 7b$~~
 $c + \frac{7}{a} = a + \frac{7}{b} \Rightarrow abc = a^2c + 7a$
 $a^2bc + 7ac = ab^2c + 7ab = abc^2 + 7bc$

$$abc + 7c = b^2c + 7b$$

$$bc(a - b) = 7(b - c)$$

$$abc + 7a = ac^2 + 7c$$

$$ac(b - c) = 7(c - a)$$

$$\left(a - \frac{7}{b}\right)^3 = \left(a - \frac{7}{b}\right) \left(b + \frac{7}{c}\right) \left(c + \frac{7}{a}\right) =$$

$$= abc + 7b + 7a + \frac{49}{c} +$$

$$+ 7c + \frac{49}{a} + \frac{49}{b} + \frac{343}{abc} +$$

$$= abc + 7(a-b+c) + 49\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{343}{abc}$$

$$\left(a + \frac{7}{b}\right) \cdot \frac{ab}{a} = b + \frac{7}{a}$$

$$abc = a^3 + 7\left(\frac{3a^2}{b} - a - b - c\right) + 49\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$$

$$c - \frac{7}{c} = b - \frac{7}{a} \Rightarrow \frac{c^2 - 7}{c} = \frac{ab - 7}{a}$$

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c}$$

$$abc = ac^2 - 7a + 7c$$

$$\begin{aligned} a + \frac{7}{b} &= c + \frac{7}{a} & | \cdot a \\ ab + 7 &= bc + \frac{7a}{b} \\ a^2 + \frac{7a}{b} &= ac + 7 \end{aligned}$$

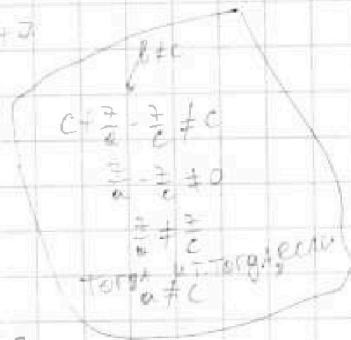
$$a + \frac{7}{c + \frac{7}{a} - \frac{7}{c}} = c + \frac{7}{a} - \frac{7}{c} + \frac{7}{c}$$

$$a \left(c + \frac{7}{a} - \frac{7}{c} \right) + 7$$

$$c + \frac{7}{a} - \frac{7}{c}$$

$$ac + 7 - \frac{7a}{c} + 7 = \left(c + \frac{7}{a}\right) \left(c + \frac{7}{a} - \frac{7}{c}\right) \quad | \cdot a^2 c$$

$$a^3 c^2 + 14a^2 c - 7a^3 = a^2 c^3 + 14a^2 c^2 - 7a^2 c + 49c - 49a$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} abc = a^2b + 7a - 7b \\ abc = b^2c + 7b - 7c \\ abc = ac^2 + 7c - 7a \end{cases}$$

$$3abc = b^2c + ac^2 + 7b - 7a \rightarrow abc = \frac{b^2c + ac^2 + 7b - 7a}{3}$$

$$3abc = a^2b + b^2c + ac^2$$

$$3abc = a^2b + b^2c + b^2c + ac^2 + ac^2 + a^2b$$

$$b(a^2 + bc) + c(b^2 + ac) + a(c^2 + ab)$$

$$bc + 7 = c^2 + \frac{7c}{a}$$

$$bc + 7 = ac + \frac{7c}{b}$$

$$b = c + \frac{7}{a} - \frac{7}{c}$$

$$-7a^3 + a^3c^2 + 21a^2c - a^2c^3 - 14ac^2 + 49a - 49c = 0$$

~~при a=1, c=1~~

~~при a=7, c=7~~

положим $a > b > c$:

прогрессивно $a > 7, c > 7$, тогда

$$b = c + \frac{7}{a} - \frac{7}{c}$$

34	122	68	248
122	68	248	
68	248		
248			

$$\frac{ab+7}{b} = \frac{bc+7}{c} = \frac{ac+7}{a}$$

$$\frac{b}{ab+7} = \frac{c}{bc+7} = \frac{a}{ac+7}$$

$$|a+b| \leq |a-b|$$

или $b > 0, a > 0$

$$a+b \leq |a-b| \Leftrightarrow \begin{cases} a-b \leq a-b \\ a+b \leq b-a \\ a < b \end{cases}$$

или $\begin{cases} a > 0, a < 0 \Rightarrow b-a \leq b-a - \text{верно} \\ a > 0, b < 0 \Rightarrow a-b \leq |a+b| - \text{верно} \end{cases}$

или $b < 0, a < 0$:

$$|a-b| \geq -a-b$$

$$\begin{cases} a-b \geq -a-b \\ a-b \leq a+b \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$$

$$\left| \frac{x^3 - 9}{x^2 - 1} \right| \leq \left| \frac{x^3 - x^2 - 9 + 1}{x^3 - 9 - (x^2 - 1)} \right|$$

~~при a=1~~

$$x^2 - 1 \geq 0 \quad \text{или} \quad x^2 - 1 < 0$$

$$\begin{matrix} (x^2 \geq 1) & (x^2 < 1) \\ x^3 - 9 \geq 0 \text{ или } x^3 - 9 < 0 & x^3 - 9 \geq 0 \text{ или } x^3 - 9 < 0 \\ (x^3 \geq 9) & (x^3 < 9) \end{matrix}$$

~~или~~