



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 12

1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $5^{360} \cdot 7^{90}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 3) - x(11y - 34) + 32y - 101 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 25 раз больше площади треугольника DGF .

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 2x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a , b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXYF$, если $BF = 19$, $XY = 36$.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|$$

$$\text{Пусть } x^3 - 9 = a, x^2 - 1 = b \Rightarrow x^3 - x^2 - 8 = (x^3 - 9) - (x^2 - 1) = a - b.$$

Чтобы: $|a| + |b| \leq |a - b|$. Обозначим это выражение (*).

Рассмотрим возможные случаи расположения чисел a и b на числовой оси:

$$1) a > b > 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow a + b \leq a - b \Rightarrow 2b \leq 0 \Rightarrow b \leq 0 \Rightarrow b = 0, a > 0.$$

$$2) b > a \geq 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow a + b \leq b - a \Rightarrow a \leq 0 \Rightarrow a = 0, b > 0.$$

$$3) a \geq 0, b \leq 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow a - b \leq a + b \Rightarrow -b \leq b \Rightarrow b \geq 0, \text{ что верно при } a \geq 0, b \leq 0.$$

$$4) a \leq 0, b \geq 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow -a + b \leq a + b \Rightarrow -a \leq 2b \Rightarrow a \geq -2b \Rightarrow a \geq 0, b \geq 0.$$

$$5) a \leq b \leq 0 \Rightarrow -a - b \leq b - a \Rightarrow 2b \geq 0 \Rightarrow b = 0, a \leq 0.$$

$$6) b \leq a \leq 0 \Rightarrow -a - b \leq a - b \Rightarrow 2a \geq 0 \Rightarrow a = 0, b \leq 0.$$

Итак, разобрали все возможные случаи расположения чисел a , b на числовой оси.

$$a = 0 \Rightarrow x^3 - 9 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{9}$$

$$b = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x \in \{-1, 1\}.$$

$$a > 0 \Rightarrow x^3 - 9 > 0 \Rightarrow x^3 > 9 \Rightarrow x \in (\sqrt[3]{9}; +\infty)$$

$$a < 0 \Rightarrow x^3 - 9 < 0 \Rightarrow x^3 < 9 \Rightarrow x \in (-\infty, \sqrt[3]{9})$$

$$b > 0 \Rightarrow x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$b < 0 \Rightarrow x^2 - 1 < 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow x \in (-1, 1).$$

$$1) \begin{cases} b = 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x \in [\sqrt[3]{9}; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$2) \begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{9} \\ x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt[3]{9}.$$

$$3) \begin{cases} a > 0 \\ b \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [\sqrt[3]{9}; +\infty) \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ -1 \quad 1 \quad \sqrt[3]{9} \end{array} \Rightarrow x \in \emptyset.$$

$$4) \begin{cases} a \leq 0 \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, \sqrt[3]{9}] \\ x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ -1 \quad 1 \quad \sqrt[3]{9} \end{array} \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, \sqrt[3]{9}]$$

$$5) \begin{cases} b = 0 \\ a \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x \in (-\infty, \sqrt[3]{9}] \end{cases} \Rightarrow x \in \{-1, 1\}.$$

$$6) \begin{cases} a = 0 \\ b \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{9} \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset.$$

$$\text{Итак: } \begin{cases} x = \sqrt[3]{9} \\ x \in (-\infty, -1] \cup [1, \sqrt[3]{9}] \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, \sqrt[3]{9}]$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{ОТВЕТ: } x \in (-\infty, -1] \cup [1, \sqrt[3]{9}]$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$b = a \cdot q$$

$$c = a \cdot q^2$$

здесь $q \in \mathbb{N}$, т.к. $\frac{a \cdot q}{\mathbb{N}} = \frac{b}{\mathbb{N}}$.

$a \cdot b \cdot c = 5^{360} \cdot 7^{40}$ значит $a \cdot (a \cdot q) \cdot (a \cdot q^2) = (a \cdot q)^3 = 5^{360} \cdot 7^{40} \Rightarrow a \cdot q = 5^{120} \cdot 7^{30}$. Получается
также что рассмотреть все возможные a и q . Поскольку $a \cdot q = 5^{120} \cdot 7^{30}$, то
должны иметь вид $(5^d \cdot 7^e)$, где $0 \leq d \leq 120, 0 \leq e \leq 30$.

$$\text{Нельзя } a = 5^{d_1} \cdot 7^{e_1}; q = 5^{d_2} \cdot 7^{e_2} \Rightarrow \begin{cases} d_1 + d_2 = 120, & d_i, p_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ e_1 + e_2 = 30 & d_i \leq 120, p_j \leq 30 \end{cases}$$

$$d_2 = -d_1 + 120. \quad \text{При } d_1 \in [0; 120]: d_2 \in [0; 120]$$

$$e_2 = -e_1 + 30. \quad \text{При } e_1 \in [0; 30]: e_2 \in [0; 30].$$

$$j \in \{1, 2\}$$

$$g \in \{1, 2\}$$

Число вариантов d_1 равно 121, вариантов e_1 - 31.

Значит вариантов числа $a = (121 \cdot 31)$ штук, причем

каждому a соответствует единственное q , то есть

каждому a соответствует лишь одна пара (a, b, c) .

$$121 \cdot 31 = 3751.$$

Ответ: 3751

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x, y \in \mathbb{R}$.

$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0.$$

I) $y=3 \Rightarrow 0 + x + 36 - 101 = 0$

$$x=5.$$

II) $y \neq 3 \Rightarrow D = (11y-34)^2 - 4(32y-101)(y-3) =$

$$= (121y^2 - 748y + 1156) - (128y^2 - 788y + 1212) = -7y^2 + 40y - 56.$$

Надо существует такое x , meaning что $D \geq 0 \Rightarrow -7y^2 + 40y - 56 \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 7y^2 - 40y + 56 \leq 0.$$

$$7y^2 - 40y + 56 = 0 \Rightarrow D_1 = 20^2 - 7 \cdot 56 = 400 - 392 = 8$$

$$y_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{2}}{4}. \quad 1) \text{ Заметим, что } \frac{20 - 2\sqrt{2}}{4} > 2, \text{ т.к.}$$

$$20 - 2\sqrt{2} > 14$$

$$20 - 2\sqrt{2} > 2\sqrt{2}$$

$3 > 2\sqrt{2}$ — верно

$$8 > 8 - \text{верно} \Rightarrow \frac{20 - 2\sqrt{2}}{4} > 2.$$

2) $\frac{20 + 2\sqrt{2}}{4} < 4$, т.к. $20 + 2\sqrt{2} < 28$

$$2\sqrt{2} < 8$$

$$\sqrt{2} < 4$$

$$2 < 16 - \text{верно} \Rightarrow \frac{20 + 2\sqrt{2}}{4} < 4.$$

$7y^2 - 40y + 56 \leq 0 \Rightarrow y \in [\frac{20 - 2\sqrt{2}}{4}; \frac{20 + 2\sqrt{2}}{4}]$, причем по условию:

(II)

$2 < y < 4$. $y \notin \mathbb{Z} \Rightarrow y=3$, но вначале мы сказали, что $y \neq 3$.

Противоречие.

Ответ: $(5; 3)$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

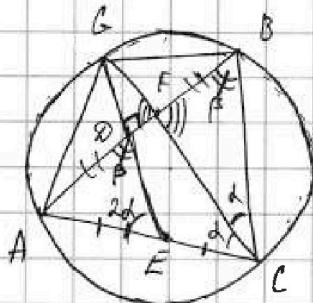
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\triangle ABC$

$\omega(O, R)$; $A, B, C \in \omega$.

$\angle CAB = \angle DBA$

$EA \perp AC$, $EA = EC$.

CF -бисс ~~угла~~ $\angle BCA$, $F \in AB$.

$\angle FCA = \angle G$.

$ED \cap \omega = G$.

$S_{BGF} = 25^\circ$. $S_{GFD} = ?$.

Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Решение:

$\angle ACG = \angle BCG$ - по уш. $\Rightarrow AG = BG \Rightarrow AG = BG$.
 $C, A, B, G \in \omega$ - по уш.

$\triangle AGB$: $AG = BG \Rightarrow \triangle AGB$ - равнобедр. $\Rightarrow GD$ - бисс $\angle AGB \Rightarrow \angle GDF = 90^\circ$.
 $AD = DB \Rightarrow GD$ - меж.член.

$\triangle ABC$: $DA = DB$ $\Rightarrow DE$ - среднее линии $\Rightarrow DE \parallel BC \Rightarrow \angle ABE = \angle ABC$ - вн.внгл.
 $EA = EC$ $\Rightarrow DE = \frac{1}{2}BC$.

$\angle ADE = \angle GDF$ - верт $\Rightarrow \angle ADE = 90^\circ \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$.

$\angle GDF \text{ и } \angle BCF$: $\angle BFC = \angle GDF$ - верт $\Rightarrow \angle GDF \sim \angle BCF$ - в.2-м \Rightarrow
 $\angle GDF = \angle BCF = 90^\circ$ - в.2-м \Rightarrow
 $\Rightarrow \left(\frac{GD}{BC}\right)^2 = \left(\frac{GF}{BF}\right)^2 = \left(\frac{FD}{BF}\right)^2 = \frac{S_{GDF}}{S_{BFC}} = \frac{1}{25} \Rightarrow \frac{BF}{FD} = 5 \Rightarrow BF = 5FD$, $\frac{GD}{FB} = \frac{1}{5} \Rightarrow S_{GD} = BC$.

Пусть $FD = x \Rightarrow FB = 5x$; $GD = y \Rightarrow BC = 5y$.

$DB = FD + FB = 6x$; $DB + DA = 2DB = AB \Rightarrow AB = 12x$, $FA = FD + DK$
 $DE = \frac{1}{2}BC = \frac{5y}{2} \Rightarrow GE = GD + DE = \frac{7y}{2}$.

$\triangle ABC$: $\frac{BC}{AC} = \frac{BF}{FA}$ - по ч-бг бисс. $(CF) \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$.

$AC = \frac{7}{5}BC \Rightarrow AC = \frac{7}{5} \cdot 5y = 7y$.

По $\cos \angle BCA = \frac{BC}{CA} = \frac{5}{7} \Rightarrow \angle BCA = \arccos\left(\frac{5}{7}\right)$.

$\angle BAC = 180^\circ - \angle BCA - \angle BCA = 90^\circ - \arccos\left(\frac{5}{7}\right) \Rightarrow \angle BAC = \arcsin\left(\frac{5}{7}\right)$.

Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$; $\angle BAC = \arcsin\left(\frac{5}{7}\right)$; $\angle BCA = \arccos\left(\frac{5}{7}\right)$.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}y &= -x^5 + ax \\y &= 2x.\end{aligned}$$

Значит, что диагонали «бисектрисы» перпендикулярны \Rightarrow

\Rightarrow прямая, содержащая в себе II диагональ должна быть $y = 2x$

\Rightarrow эта прямая задается функцией $y = -\frac{1}{2}x$, т.к. она по условию проходит через $O(0;0)$.

Также $ABCD$ - искомый квадрат $\Rightarrow A, B, C, D \in y = -x^5 + ax$,

$$A, C \in y = 2x; B, D \in y = -\frac{1}{2}x.$$

$$1) -x^5 + ax = 2x \Rightarrow x^5 + x(2-a) = 0 \\ x(x^4 + 2-a) = 0.$$

x имеет корни для 2 значений $\Rightarrow 2-a \leq 0 \Rightarrow a \geq 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \in \{0; \sqrt[4]{a-2}; -\sqrt[4]{a-2}\}, \text{ но } x \neq 0, \text{ т.к. } A \neq C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{a-2}.$$

$$2) -x^5 + ax = -\frac{1}{2}x \Rightarrow 2x^5 - 2ax - x = 0 \\ 2x(x^4 - (a + \frac{1}{2})) = 0$$

x имеет корни для 2 значений $\Rightarrow a + \frac{1}{2} \geq 0 \Rightarrow a \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \in \{0; \sqrt[4]{a+\frac{1}{2}}; -\sqrt[4]{a+\frac{1}{2}}\}, \text{ но } x \neq 0, \text{ т.к. } B \neq D.$$

Итого: ~~или~~ $a \in [2; +\infty)$

$$\text{Также } A(\sqrt[4]{a-2}; y_A) \Rightarrow AB = \sqrt{(\sqrt[4]{a-2} - \sqrt[4]{a+\frac{1}{2}})^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

$$y_A = 2\sqrt[4]{a-2} \\ y_B = -\frac{1}{2}\sqrt[4]{a+\frac{1}{2}} \Rightarrow \text{также } \sqrt[4]{a-2} = t; \sqrt[4]{a+\frac{1}{2}} = d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(t-d)^2 + (2t - \frac{1}{2}d)^2} = \sqrt{5t^2 - 3td + \frac{5}{4}d^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{5\sqrt[4]{a-2} - 3\sqrt[4]{a^2 - \frac{3}{4}a - 1} + \frac{5}{4}\sqrt{a + \frac{1}{2}}} \Rightarrow$$

Ответ: длина стороны $\sqrt{5\sqrt[4]{a-2} - 3\sqrt[4]{a^2 - \frac{3}{4}a - 1} + \frac{5}{4}\sqrt{a + \frac{1}{2}}}$; при $a \in [2; +\infty)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a} \Rightarrow a, b, c \neq 0$$

$$\begin{cases} a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} & | \cdot bc \\ a + \frac{7}{b} = c + \frac{7}{a} & | \cdot ab \\ b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a} & | \cdot ac \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} abc + 7bc = b^2c + 7b \\ a^2bc + 7ac = abc + 7b \\ abc + 7a = ac^2 + 7c \end{cases} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

$$(1) - (2) + (3) : 3abc + 7a + 7b + 7c = a^2b + b^2c + c^2a + 7a + 7b + 7c$$

$$3abc = a^2b + b^2c + c^2a$$

таким образом $a > 0, b > 0, c > 0$, то $a^2b + b^2c + c^2a \geq 3abc$. Равенства достигается, когда $a = b = c$, но это противоречит условию.

Значит Э число, которое ~~меньше~~ ^{небольшое} 0, но $a, b, c \neq 0 \Rightarrow$ Э число меньше 0.

Поскольку мы хотим, чтобы abc было максимальным, нужно, чтобы: 2 числа были < 0 и одно > 0 .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



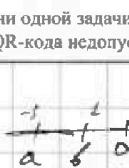
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) |x^3 - 8| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|$$

$$x^3 - x^2 - 8 = -3 + 1 = -2$$



$$|-2| + |0| \leq |-2|$$

$$|a| + |b| \leq |a - b|$$

1) ~~a > b > 0~~ $\Rightarrow a + b \leq a - b \Rightarrow 2a \leq 0 \Rightarrow a \leq 0$

$$2b \leq 0$$

2) ~~b > a > 0~~ $\Rightarrow a + b \leq b - a \Rightarrow 2a \leq 0 \Rightarrow a \leq 0$

$$a \geq 0$$

3) ~~a > 0, b < 0~~ $\Rightarrow a - b \leq a - b \Rightarrow 0 \leq 0$ - верно

$$x = 2$$

4) ~~a < 0, b > 0~~ $\Rightarrow -a + b \leq b - a \Rightarrow 0 \leq 0$ - верно

$$|-8| + |4 - 1| \leq |8 - 4 - 8|$$

5) ~~a < 0, b < 0~~ $\Rightarrow -a - b \leq b - a \Rightarrow -2b \leq 0 \Rightarrow b \geq 0$

$$\leq |8 - 4 - 8|$$

6) ~~b \leq a \leq 0~~ $\Rightarrow -a + b \leq a - b \Rightarrow -2a \leq 0 \Rightarrow a \geq 0$

$$+17 + 3 \leq 20$$

- верно.

Уточнение: $x^3 - 8 \geq 0 \Rightarrow x \geq \sqrt[3]{8} \geq 2$

$|x^2 - 1| \leq 0 \Rightarrow x \in [-1; 1]$

$x^3 - 9 \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, \sqrt[3]{9}]$

$x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Итого: $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \sqrt[3]{9}]$.

a, b, c $\in \mathbb{N}$.

a; ab, ~~abc~~

$$abc = a^3 b^3 = 5^{360} \cdot 7^{90} \Rightarrow abc = 5^{120} \cdot 7^{30}$$

$b \geq 1$

$$27 + 8 \leq 77 + 9 + 8$$

для a: $5^{120} \cdot 7^{30}$ возможностей.

$5^0, 5^1, 5^2, \dots, 5^{120}$

$$\begin{array}{r} 121 \\ \times 31 \\ \hline 363 \\ 3951 \end{array}$$

Пример: $5^{120} \cdot 7^{30} \Rightarrow abc = 5^{120} \cdot 7^{30}$

$$\begin{array}{r} a \\ \times 5^{120} \\ \hline 5^0 7^0 \\ 5^1 7^0 \\ 5^2 7^0 \\ 5^3 7^0 \\ \hline 5^0 7^1 \\ 5^1 7^1 \\ 5^2 7^1 \\ 5^3 7^1 \\ \hline 5^0 7^2 \\ 5^1 7^2 \\ 5^2 7^2 \\ 5^3 7^2 \\ \hline 5^0 7^3 \\ 5^1 7^3 \\ 5^2 7^3 \\ 5^3 7^3 \\ \hline 5^0 7^4 \\ 5^1 7^4 \\ 5^2 7^4 \\ 5^3 7^4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} q \\ \times 5^{30} \\ \hline 5^0 7^0 \\ 5^1 7^0 \\ 5^2 7^0 \\ 5^3 7^0 \\ \hline 5^0 7^1 \\ 5^1 7^1 \\ 5^2 7^1 \\ 5^3 7^1 \\ \hline 5^0 7^2 \\ 5^1 7^2 \\ 5^2 7^2 \\ 5^3 7^2 \\ \hline 5^0 7^3 \\ 5^1 7^3 \\ 5^2 7^3 \\ 5^3 7^3 \\ \hline 5^0 7^4 \\ 5^1 7^4 \\ 5^2 7^4 \\ 5^3 7^4 \\ \hline \end{array}$$

*

$$\begin{array}{r} 5^0 7^0 \\ 5^1 7^0 \\ 5^2 7^0 \\ 5^3 7^0 \\ \hline 5^0 7^1 \\ 5^1 7^1 \\ 5^2 7^1 \\ 5^3 7^1 \\ \hline 5^0 7^2 \\ 5^1 7^2 \\ 5^2 7^2 \\ 5^3 7^2 \\ \hline 5^0 7^3 \\ 5^1 7^3 \\ 5^2 7^3 \\ 5^3 7^3 \\ \hline 5^0 7^4 \\ 5^1 7^4 \\ 5^2 7^4 \\ 5^3 7^4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a \\ \times 5^{120} \\ \hline 5^0 7^0 \\ 5^1 7^0 \\ 5^2 7^0 \\ 5^3 7^0 \\ \hline 5^0 7^1 \\ 5^1 7^1 \\ 5^2 7^1 \\ 5^3 7^1 \\ \hline 5^0 7^2 \\ 5^1 7^2 \\ 5^2 7^2 \\ 5^3 7^2 \\ \hline 5^0 7^3 \\ 5^1 7^3 \\ 5^2 7^3 \\ 5^3 7^3 \\ \hline 5^0 7^4 \\ 5^1 7^4 \\ 5^2 7^4 \\ 5^3 7^4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} q \\ \times 7^{30} \\ \hline 7^0 5^0 \\ 7^1 5^0 \\ 7^2 5^0 \\ 7^3 5^0 \\ \hline 7^0 5^1 \\ 7^1 5^1 \\ 7^2 5^1 \\ 7^3 5^1 \\ \hline 7^0 5^2 \\ 7^1 5^2 \\ 7^2 5^2 \\ 7^3 5^2 \\ \hline 7^0 5^3 \\ 7^1 5^3 \\ 7^2 5^3 \\ 7^3 5^3 \\ \hline 7^0 5^4 \\ 7^1 5^4 \\ 7^2 5^4 \\ 7^3 5^4 \\ \hline \end{array}$$

$$ab = 5^{120} \cdot 5^{30} \cdot 5^{120} = 5^{360}$$

$$5^{120} \cdot 5^{30} \cdot 5^{120} = 5^{370}$$

$$5^{120} \cdot 5^{30} \cdot 5^{120} = 5^{370}$$

$$5^{120} \cdot 5^{30} \cdot 5^{120} = 5^{370}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a + \frac{4}{b} = b + \frac{4}{c} = c + \frac{4}{a}$$

или a не все равны между собой. значит $\max(a, b, c)$

$$\begin{cases} a + \frac{4}{b} = b + \frac{4}{c} \\ b + \frac{4}{c} = c + \frac{4}{a} \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow ab + 4c = bc + 4b \\ ac + 4b = cb + 4a \end{array} \right\} \Rightarrow 4(b-a) = 4(b-c) + 4(c-a)$$

$$4(2c-a-b) = 4(b^2-ac).$$

$$\frac{ab+4}{b} = \frac{bc+4}{c} = \frac{ac+4}{a}$$

$$a^2bc + 4abc = ab^2c + 4abc = abc^2 + 4bc^2. \quad - ab + 4c = bc + 4b. \\ ab(a-b) = 4a(b-c) \quad a^2b + 4a = ab + 4b. \\ ab(a-b) = 4c(a-b) \quad ab + 4c - 4a = ab + 4b. \\ ab(a-b) = 4(b-a) \quad 2abc = 4(a-b) + b^2c + a^2b. \\ ab(a-b) = 4(b-a) \quad 1 + \frac{4}{b} = b + \frac{4}{c} = c + \frac{4}{a}.$$

$$ab(a-b) = 4(ab - bc + ac - bc) = 4b(a-b). \quad \text{если } a=b \Rightarrow ab(a-b) = 4b(a-b).$$

$$ab(a-b) = 4b(a-b) \quad a = \frac{4}{b} \Rightarrow b = \frac{4}{a}$$

$$\begin{aligned} & \text{1. } ab + 4c = b^2c + 4b \Rightarrow abc = (b^2 + a^2b)(b^2 + c^2a) = \\ & \text{2. } ab + 4a = c^2a + 4b \quad = b(b^2 + ab) + c(b^2 + ac) + a(b^2 + bc) \\ & \text{3. } ab + 4b = a^2b + 4a \quad = b(a^2 + b^2 - 2ab) + c(b^2 + ac - 2ab) + a(c^2 + ab - 2bc) \\ & 3abc + 4(a+b+c) = 4ab + 4c + b^2c + a^2b + c^2a. \\ & 3abc = b^3c + a^2b + c^2a. \Rightarrow b^2c - ab + (a^2b - ab) + c^2a - bc = 0. \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\text{Более удобно видеть } (b^2c - ab) + (a^2b - ab) + (c^2a - bc) = 0.$$

Более значим $a^2b + b^2c + c^2a - \max \Rightarrow$ если $a \neq 0 \Rightarrow$ не макс.

$$a = \frac{abc}{ab} = \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{9}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$$

$$a, b, c > 0$$

$$a^2b + b^2c + c^2a \geq 3 \sqrt[3]{a^2b \cdot b^2c \cdot c^2a} = 3 \cdot abc$$

но они равны $\Rightarrow a = b = c$, значит:

$$a + \frac{4}{a} = a + \frac{4}{c} = c + \frac{4}{a}$$

$$3abc = a^2b + b^2c + c^2a$$

$$a^2b + b^2c + c^2a = 2ab + 2bc + 2ca \geq 2ab + 2bc + 2ca \geq 2a + 2b + 2c = \frac{2a + 2b + 2c}{2a + 2b + 2c}$$

$$\frac{2a + 2b + 2c}{2a + 2b + 2c} = \frac{2}{2} = 1$$

также

$$a > 0, b > 0, c > 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2(y-3) + y(11y^2 - 34) + 32y - 101 = 0.$$

$$\begin{matrix} x^2 \\ y \\ \sim \end{matrix} \quad \begin{matrix} 11y^2 \\ xy \\ \sim \end{matrix} \quad \begin{matrix} -34 \\ 32y \\ \sim \end{matrix} \quad \begin{matrix} y-3 \\ 11y^2 - 34 \\ \sim \end{matrix} \quad \begin{matrix} 32y \\ -101 \\ \sim \end{matrix}$$

$$11y^2 - 34 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow$$

$$x = -101 \quad \cancel{x = -101}$$

$$\textcircled{4} \quad y-3=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow 0-x+32 \cdot 3-101=0.$$

$$\boxed{x = -5}$$

$$(2y+3)^2 = (11y-34)^2 - 4(32y-101)(y-3) = 0.$$

$$\begin{matrix} 11y-34 \\ 2y+3 \\ \sim \end{matrix} \quad \begin{matrix} 32y-101 \\ y-3 \\ \sim \end{matrix}$$

$$121y^2 - 34 \cdot 11 \cdot 2y - 4(32y^2 - 32 \cdot 3y - 101y + 303) =$$

$$= 121y^2 - 34 \cdot 11 \cdot 2y - 128y^2 + 366xy - 4 \cdot 197y - 303 \cdot 4 = -2y^2 + 748y + 988y + 1156 - 1212 =$$

$$2004 - 344 = 788$$

$$= -7y^2 + 40y = 56y$$

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} 22 \\ 34 \\ 88 \\ 66 \\ 248 \end{array} & \begin{array}{r} 34 \\ 88 \\ 156 \\ 902 \\ 1156 \end{array} & \begin{array}{r} 34 \\ 156 \\ 1212 \\ 1156 \\ 56 \end{array} \end{array}$$

$$7y^2 - 40y + 56 \leq 0$$

$$y_1 = \frac{20 - 2\sqrt{86}}{7}, \quad y_2 = \frac{20 + 2\sqrt{86}}{7}$$

$$y_1 = \frac{20 - 2\sqrt{86}}{7} \approx -4.14, \quad y_2 = \frac{20 + 2\sqrt{86}}{7} \approx 6.14$$

$$2 < \frac{20 - 2\sqrt{86}}{7} < 20/7$$

$$2 < \frac{20 + 2\sqrt{86}}{7} < 20/7$$

$$0 < \frac{20 - 2\sqrt{86}}{7} < 1 \quad 0 < \frac{20 + 2\sqrt{86}}{7} < 1$$

$$y \in [1; 5]$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 89 \\ \hline 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ 20 \\ \hline 40 \end{array} \quad \begin{array}{r} 20 \\ 20 \\ \hline 40 \end{array} \quad \begin{array}{r} 20 \\ 20 \\ \hline 40 \end{array}$$

$$32 \cdot 5 + 50 + 10$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 24 \\ \hline 128 \end{array} \quad \begin{array}{r} 32 \\ 24 \\ \hline 96 \end{array}$$

$$y=1 \Rightarrow -2x^2 + x(34-11) + 32 - 101 = 0.$$

$$-2x^2 + 23x - 68 = 0.$$

$$2x^2 - 23x + 68 = 0.$$

$$\Delta = 23^2 - 68 \cdot 2 \cdot 4 = 23/23 - 3 \cdot 2 \cdot 4 = -23 \quad \emptyset$$

$$y=2 \Rightarrow -x^2 + x(34-22) + 68 - 101 = 0.$$

$$-x^2 + 12x - 33 = 0$$

$$x^2 - 12x + 37 = 0 \quad (x-6)^2 + 1 \geq 0$$

$$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 37 = -120 \quad \emptyset$$

$$y=4 \Rightarrow x^2 - 10x + 128 - 101 = 0$$

$$x^2 - 10x + 27 = 0$$

$$(x-5)^2 + 2 = 0$$

$$y=5 \Rightarrow 2x^2 - 24x + 160 - 101 = 0$$

$$2x^2 - 24x + 59 = 0$$

$$\Delta = 24^2 - 4 \cdot 2 \cdot 59 =$$

$$= 441 - 472 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\mathcal{D} = (11y - 34)^2 - 4(y - 3)(32y - 101)$$

~~$$(11y - 34)^2 = 121y^2 - 22 \cdot 34y + 34^2 = 121y^2 - 748y + 1156$$~~

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 11 \\ \hline 34 \\ 22 \\ \hline 56 \\ 68 \\ \hline 1156 \end{array}$$

$$4(y - 3)(32y - 101) = 4(32y^2 - 101y - 96y + 303) = 4(32y^2 - 197y + 303) =$$

$$= 128y^2 - 788y + 1212$$

$$\text{Уточнение: } \mathcal{D} = 121y^2 - 748y + 1156 - 128y^2 + 788y - 1212 = -7y^2 + 40y - 56 \leq 0$$

$$\begin{array}{r} 156 \\ -2 \\ \hline 56 \end{array}$$

$$-7y^2 + 40y - 56 \leq 0$$

$$\Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow 2 < 2\sqrt{2} < 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 22 < 20 + (2\sqrt{2}) < 24 \Rightarrow 21 < \frac{20+2\sqrt{2}}{2} < \frac{28}{2} = 4$$

$$\mathcal{D}_1 = 20^2 - 56 \cdot 4 = 400 - 392 = 8.$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ -4 \\ \hline 392 \end{array}$$

$$y = \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{7} \quad \text{или} \quad y = 2\sqrt{2} < 2$$

Уточнение ≤ 4

$$16 < 20 + 2\sqrt{2} < 18$$

$$14 < \frac{20+2\sqrt{2}}{7} < \frac{21}{7}$$

Уточнение: $y = 3$

~~График~~ $y = -x^5 + 2x$ — координаты вершин.

$y = 2x$ — диагональ \Rightarrow общее решение: $y = -\frac{1}{2}x$

Пересечение: $2x = -x^5 + 2x \quad \text{и} \quad -\frac{1}{2}x = -x^5 + 2x$.

~~График~~ $x^5 \approx x$

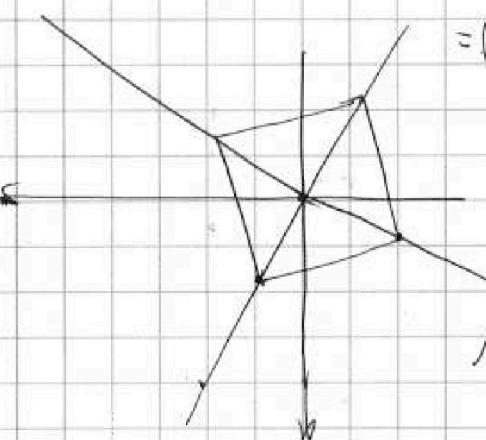
~~График~~ $\Rightarrow 0, 30 \approx 2$

$$= a_2^2 + 2a_2 - 1 = a_2^2 - a_2 - 1$$

$$0 = (a_2 - 2 + 1)x$$

$$= (\frac{3}{2} + a_2)(\frac{3}{2} - a_2)$$

$$0 = x(a_2 - 2 + 1)$$



$$2\sqrt{2} + p$$

$$x_1 + x_2 = -\lambda \frac{3}{2} -$$

$$x_1 + x_2 = x_2$$

$$p_1 - p_2 -$$

\Rightarrow



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

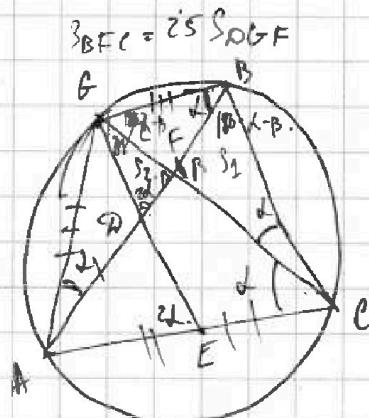
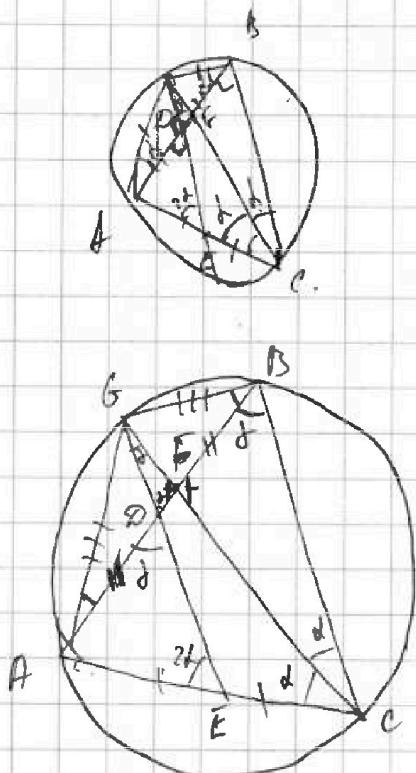
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

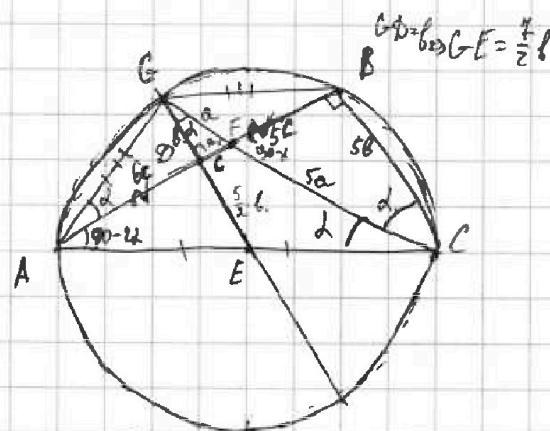
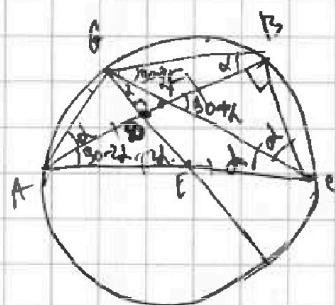
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порчи QR-кода недопустимы!



$$\triangle GFD \sim \triangle BCF$$

$$\frac{GF}{AC} = \frac{DF}{CF} = \frac{DG}{BF} = \frac{GF}{BC} = \frac{1}{5}$$

$$F\hat{A} = D\hat{B} = \gamma = 90^\circ$$



$$\frac{BF}{FA} = \frac{BL}{AC} = \frac{5}{7} \Rightarrow BL = 56 \Rightarrow AC = 84$$

$$\omega \angle C = \frac{5}{7}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

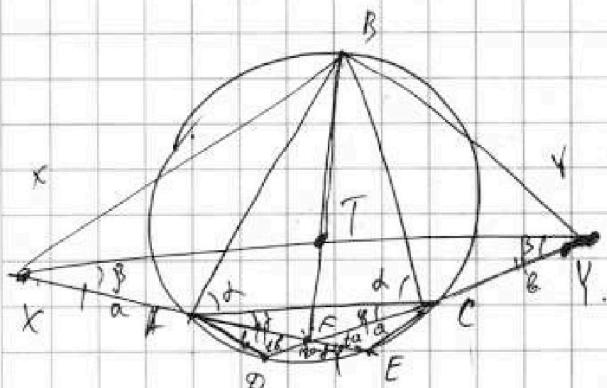
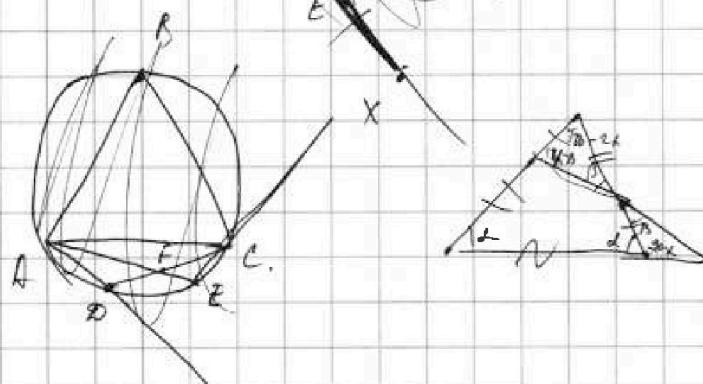
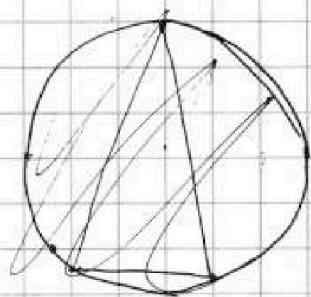
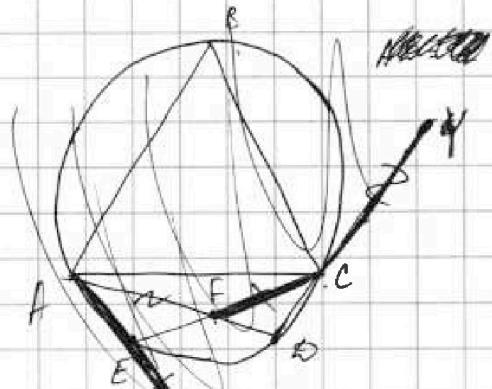
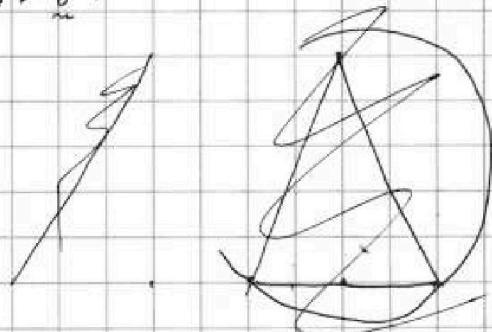


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1 2 3 4 5 6 7



$$\begin{cases} BxFY = ? \\ XY = 3G \\ XF = FY \\ BF = 14 \end{cases}$$

$$\angle AFC = \frac{\widehat{DE} - \widehat{AC}}{2}$$

$$\begin{aligned} \widehat{DE} &= \widehat{AC} - \widehat{AE} - \widehat{EC} \\ &= 180^\circ - \alpha \end{aligned}$$

$$\angle AFC = \frac{180^\circ - 2\alpha - \beta + \gamma + 180^\circ}{2} = 180^\circ - \alpha - \beta + \gamma$$

$$FEC \sim \Delta FDA \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{FD}{FE} = \frac{1}{a}$$