



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{300}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 2) - x(13y - 27) + 44y - 94 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 16 раз больше площади треугольника DGF .
5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a , b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 17$, $XY = 31$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

$$3) x \in [a; -1):$$

$$x^3 + 4 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 + 5$$

$$2x^2 \leq 2$$

$$x^2 \leq 1$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$\text{и}$$
$$[a; -1)$$

$$4) x \in [-1; 1]:$$

$$x^3 + 4 + x^2 + 1 \leq x^3 - x^2 + 5$$

$$5 \leq 5$$

всегда

$$x \in [-1; 1]$$

$$5) x \in (1; \infty):$$

$$x^3 + 4 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 + 5$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$\text{и}$$
$$(1; \infty)$$

$$\text{Объ: } x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4}] \cup [1; 1]$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

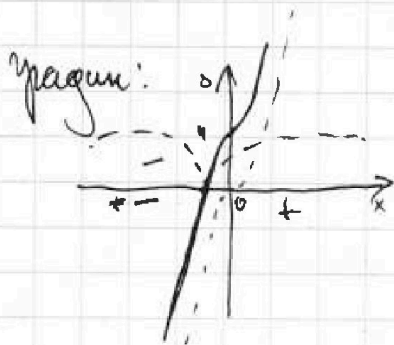
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

Решение:

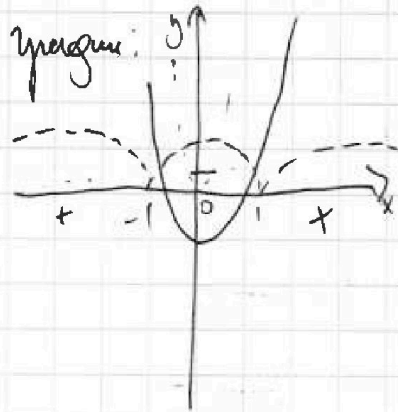
$$|x^3+4| + |x^2-1| \leq |x^3-x^2+5|$$

(1) (2) (3)

(1) $y = x^3 + 4$
 $y = 0$:
 $x^3 + 4 = 0$
 $x = -\sqrt[3]{4}$



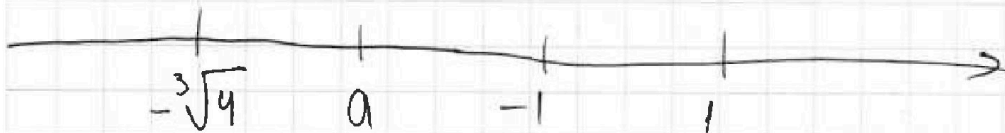
(2) $y = x^2 - 1$
 $y = 0$:
 $x = \pm 1$



(3) $y = x^3 - x^2 + 5$ график $y = x^3 - x^2$ со смещ. вверх на 5

$y = 0$:
 $x = a$

$x = -1$:
 $y = -1 + 1 + 5 = 3 > 0$
 $x = -\sqrt[3]{4}$:
 $y = -4 - (\sqrt[3]{4})^2 + 5 = 1 - (\sqrt[3]{4})^2 < 0$
 \Downarrow
 $a \in (-\sqrt[3]{4}, -1)$



1) $x \in (-\infty, -\sqrt[3]{4}]$

2) $x \in (-\sqrt[3]{4}, a)$

$-x^3 - 4 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 - 5$ $x^3 + 4 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 - 5$

$-5 \leq -5$
 \Downarrow верно

$x \in (-\infty, -\sqrt[3]{4}]$

$2x^3 \leq -8$

$x^3 \leq -4$

$x \leq -\sqrt[3]{4}$

решения по условию нет

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

Т.к. a, b, c - геом. прогрессия

$$a \cdot b \cdot c = b^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

$$b = 2^{50} \cdot 3^{100}$$

Если прогрессия возрастающая:

$$\text{Т.к. } a \in \mathbb{N} \Rightarrow a = \frac{b}{q} \Rightarrow b : q \quad \text{и т.к. } c \in \mathbb{N} \Rightarrow c = bq \Rightarrow q \in \mathbb{N}$$

получается, что q - делитель b

$$\text{ка-то делитель } b = 51 \cdot 101 = 5151$$

Отв: 5151 Если прогрессия убывающая:

$$\text{Т.к. } c \in \mathbb{N} \Rightarrow b : q ; a \in \mathbb{N} \Rightarrow q \in \mathbb{N}$$

получается, что q - делитель b

$$\text{ка-то делитель } 5151.$$

Тогда всего 1 вариант:

$$5151 \cdot 2 - 3 = 10301$$

Итак, т.к. для обеих случаев есть значение $a = b = c$

$$\text{Отв: } 10301$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$x^2(y-2) - x(13(y-2)-1) + 44(y-2) - 6 = 0$$

$$x^2(y-2) - 13x(y-2) + x + 44(y-2) - 6 = 0$$

$$(y-2)(x^2 - 13x + 44) = 6 - x$$

$$x^2 - 13x + 44 =$$

$$D = 169 - 176 < 0$$

$$\downarrow$$

$$x^2 - 13x + 44 > 0$$

$$(y-2) = \frac{6-x}{(x^2-13x+44)}$$



Т.к. $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y-2 \in \mathbb{Z}$

$$(6-x) \downarrow : (x^2-13x+44)$$

$$\downarrow$$

$$|6-x| \geq x^2 - 13x + 44$$

$$1) 6-x \geq x^2 - 13x + 44$$

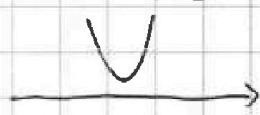
$$2) x-6 \geq x^2 - 13x + 44$$

$$0 \geq x^2 - 12x + 38$$

решений нет

$$x^2 - 12x + 38$$

$$D = 144 - 152 < 0$$



$$x^2 - 12x + 38 > 0$$

$$x^2 - 14x + 50 \leq 0$$

решений нет

$$x^2 - 14x + 50$$

$$D = 196 - 200 < 0$$



$$x^2 - 14x + 50 > 0$$

$$\text{Т.к. } |6-x| < x^2 - 13x + 44$$

\downarrow

$$y-2 \notin \mathbb{Z}$$

\downarrow ур-ня

уравнения нет решений в \mathbb{Z}

Ответ: решений нет

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

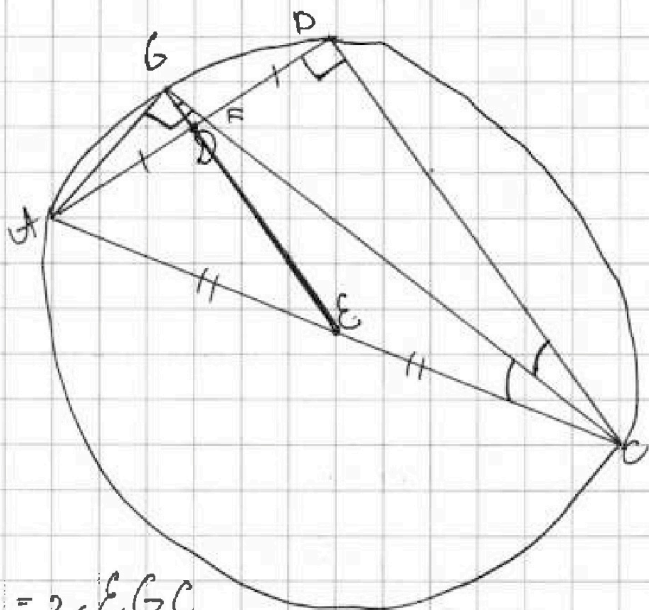
1) Т.к. DE - ср линия $\triangle ABC \Rightarrow$

$DE \parallel BC \Rightarrow \angle EGC = \angle GCB$

как напротив лежащие при
 $DE \parallel BC$ и сек GC

$\angle EGC = \angle GCB = \angle GCE$
+ к CF - диа

$\triangle GEC - \text{р/б} \Rightarrow GE = EC = AE$
по условию



2) $\angle A = \angle EGC + \angle ECG = 2\angle EGC$

Т.к. $AE = BE \Rightarrow \triangle ABE - \text{р/б} \Rightarrow \angle AGE = \frac{180 - \angle AEB}{2} = 90 - \angle EGC$

3) $\angle AGE + \angle EGC = 90^\circ = \angle AGC$

$\angle AGC = \angle ABC$ т.к. они опираются на одну хорду $\Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$

4) $\triangle FDC \sim \triangle DGF$ ($\angle EGC = \angle GCB$; $\angle GFA = \angle BFC$ как верш.)

$\frac{BC}{GD} = k = \sqrt{\frac{S_{FDC}}{S_{DGF}}} = 4 \Rightarrow GD = \frac{BC}{4}$

5) $AE = 2EC = 2GE = 2 \cdot (GD + DE) = 2 \left(\frac{BC}{4} + \frac{BC}{2} \right) = 1,5BC$

$\triangle ABC$:
6) $\cos \angle ACB = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{3}$

$\sin \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{3}$

$\angle ACB = \arccos \frac{2}{3}$

$\angle BAC = \arcsin \frac{2}{3}$

Отв: $\angle ABC = 90^\circ$; $\angle ACB = \arccos \frac{2}{3}$; $\angle BAC = \arcsin \frac{2}{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c}$$

$$b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

$$c + \frac{5}{a} = a + \frac{5}{b}$$

$$a - b = \frac{5}{c} - \frac{5}{b}$$

$$b - c = \frac{5}{a} - \frac{5}{c}$$

$$c - a = \frac{5}{b} - \frac{5}{a}$$

$$a - b = \frac{5(b-c)}{bc}$$

$$b - c = \frac{5(c-a)}{ac}$$

$$c - a = \frac{5(a-b)}{ab}$$

$$a - b = \frac{25(c-a)}{abc^2}$$

$$b - c = \frac{25(a-b)}{a^2bc}$$

$$c - a = \frac{25(b-c)}{ab^2c}$$

$$a - b = \frac{125(a-b)}{a^2b^2c^2}$$

$$b - c = \frac{125(b-c)}{a^2b^2c^2}$$

$$c - a = \frac{125(c-a)}{a^2b^2c^2}$$

Т.к. очевидно не все числа равны и/или совпадают \Rightarrow
минимум одно из чисел: $(a-b)$; $(b-c)$; $(c-a) \neq 0$

$$\frac{125}{a^2b^2c^2} = 1$$

$$125 = (abc)^2$$

$$abc = \pm 5\sqrt{5}$$

$$abc = -5\sqrt{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



a, b, c
 $\frac{b^a}{a}, b, b^c$

$abc = b^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$

$b = 2^{50} \cdot 3^{100}$

$\exists k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\frac{b}{a} \in \mathbb{N} \Rightarrow b : a$

$a = 51 \cdot 100$

$2(22y - 47)$

$3 \cdot 2$

$2^2 \cdot 3$

1
3
4
6
12

$\times 38$
 $\times 4$
 $\hline 152$

$\times 51$
 $\times 101$
 $\hline 5151$

$\times 13$
 $\times 8$
 $\hline 104$

$2x + 27$
 $11 \cdot 2^2$

$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$

$x^2y - 2x^2 - 13xy + 27x + 44y - 94 = 0$

$D = y^2 - 4y + 4 - 4(13y - 27) +$

$16y^2 - 2 \cdot 2 \cdot 13y + 27^2 + (y-2)(44y-94) =$

$= 16y^2 - 2 \cdot 13y^2 - 2 \cdot 3 \cdot 13y + 3^6 + 2 \cdot 11y^2 - 2^5 \cdot 11y - 2 \cdot 47 + 2 \cdot 47 =$

$= y^2(13 + 2 \cdot 11) - y(2 \cdot 3 \cdot 13 + 2 \cdot 11 + 2 \cdot 47) + 3^6 + 2 \cdot 47 \geq 0$

$0 < x^2 - 13x + 44$

$x^2(y-2) - x(13(y-2)-1) + 44(y-2) - 8 = 0$

$x^2(y-2) - 13x(y-2) + x + 44(y-2) - 8 = 0$

$(y-2)(x^2 - 13x + 44) + y - 8 = 0$

$(y-2)(x^2 - 13x + 44) = 8 - y$

$(y-2) = \frac{8-y}{x^2 - 13x + 44}$

$x^2 - 13x + 44 > 6 - x \Rightarrow \frac{6-x}{x^2 - 13x + 44} > 0$

$\frac{20}{44} = \frac{5}{11}$

$-y(13x + 44)$

$\frac{38}{44} = \frac{19}{22}$

$144 = 6$

$6 - x < 9$

$8 - x > 9 \Rightarrow x > 6$

$y - 2 < 0$

$y < 2$

$x^2 - 13x + 44 = 6 - x$

$49 - 91 + 44$

$\frac{13}{81}$

$81 - 90 - 27 + 44$

$\frac{13}{88}$

$\frac{13}{2} = 6,5$

125

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$b + 5 + 4 + 5 + 5 + 4 + 4$$

10 10

$$28 + 5 = 33$$

$$18$$

$$27$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 8 \\ 11 \end{array} \begin{array}{r} \\ \\ 33 \end{array}$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c}$$

$$a - b = \frac{5}{c} - \frac{5}{b} = \frac{5(b-c)}{bc}$$

$$b - c = \frac{5(c-a)}{ab}$$

$$c - a = \frac{5(a-b)}{ab} = \frac{25(b-c)}{abc^2} = \frac{125(c-a)}{a^2b^2c^2}$$

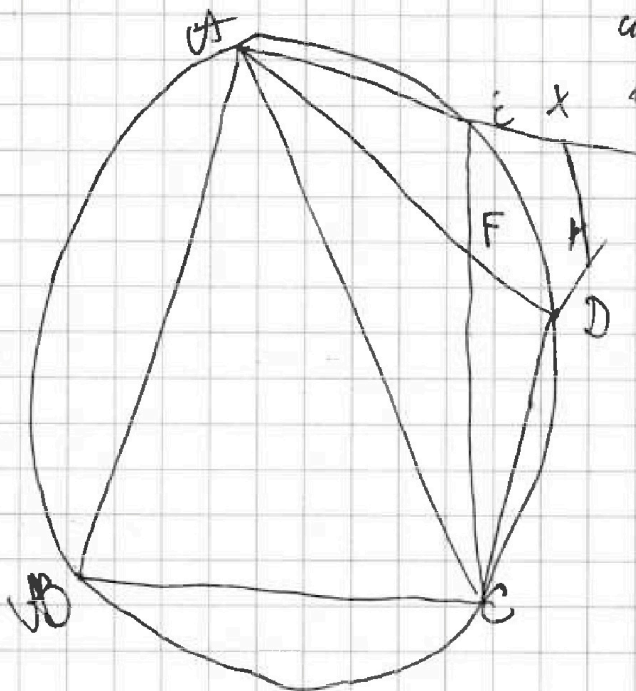
$$c - a = \frac{125(c-a)}{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{125}{a^2b^2c^2} = 1$$

$$125 = (abc)^2$$

$$abc = \pm 5\sqrt{5}$$

$$abc = -5\sqrt{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^3 - x^2 + 5 = 0$$

$$x^3 - x^2 = 0$$

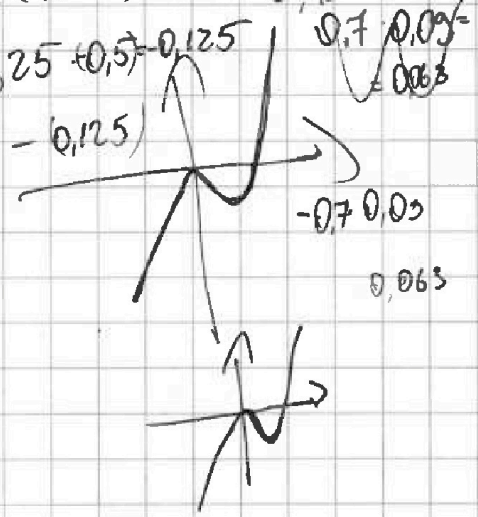
$$x^2(x-1) = 0$$

$$0,25 + 0,5 = 0,75$$

$$-0,125$$

$$-0,7$$

$$0,063$$



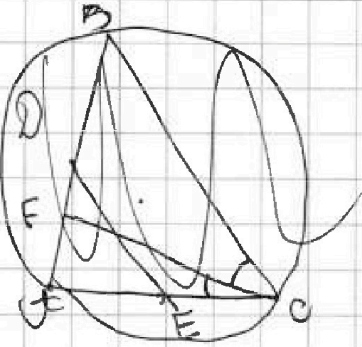
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

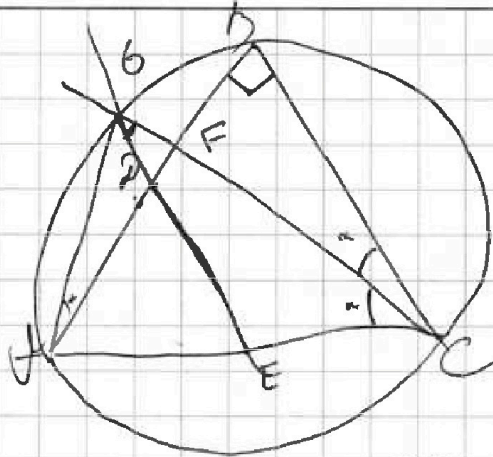
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{S_{BCF}}{S_{BCE}} = 1/6$$

$$\Downarrow$$

$$k = \frac{1}{4}$$



$BC \parallel GE$

$\Delta BFC \sim \Delta GFD$

$$k = \frac{BF}{GD} = \frac{BC}{GC}$$

$$\frac{DF}{FB} = \frac{1}{4}$$

$90 - 2\alpha - 90 - 90 - 2 - 90$

$\angle GBC = 90^\circ$

$\angle BGC = 90^\circ$

$DE = \frac{1}{2} BC$

$GD = \frac{1}{4} BC$

$GE = \frac{3}{4} BC$

$EC = \frac{3}{4} BC$

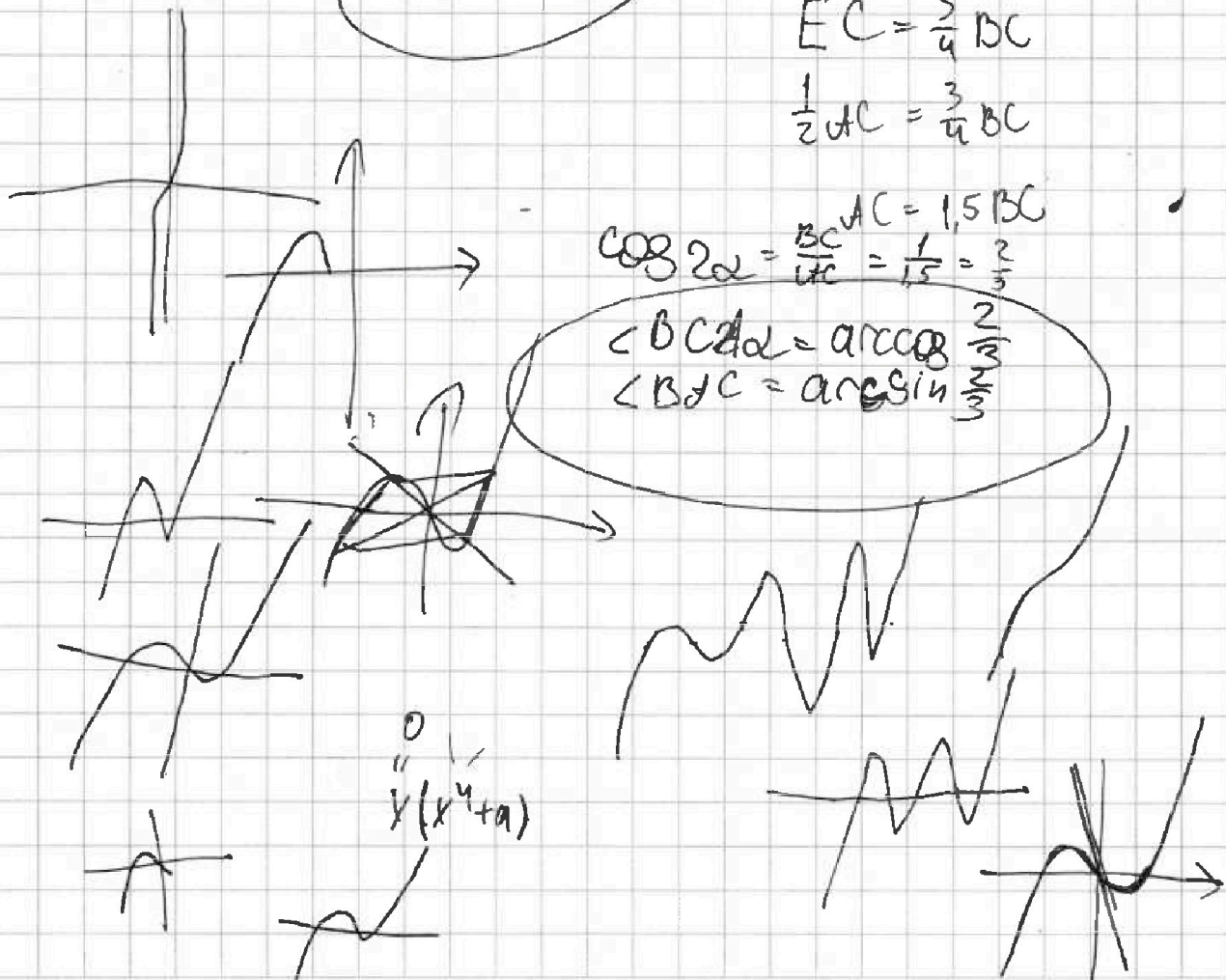
$\frac{1}{2} AC = \frac{3}{4} BC$

$\cos 2\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}$

$\angle BCD = \arccos \frac{2}{3}$

$\angle BDC = \arcsin \frac{2}{3}$

$y(x^4 + a)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

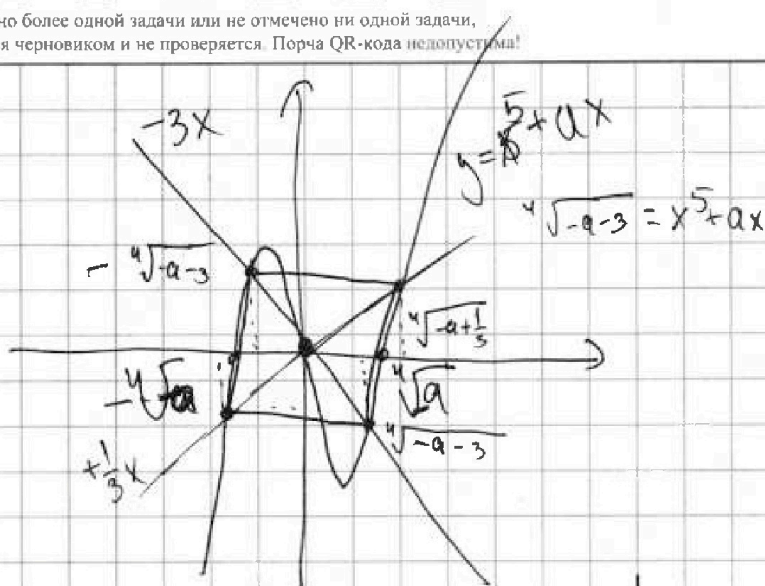
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^5 + ax = -3x$$

$$x^5 + x(a+3) = 0$$

$$x(x^4 + a + 3) = 0$$

$y=0$ $x = \sqrt[4]{-a-3}$



диагональ!



$$x^5 + ax = \frac{1}{3}x$$

$$x(x^4 + a - \frac{1}{3}) = 0$$

$$x = \sqrt[4]{\frac{1}{3} - a}$$

$$+ \frac{1}{3}x$$

$$a$$

$$48 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{16}{3}$$

$$25 \cdot \frac{41}{360}$$

$$\frac{24}{72} \cdot 9$$

$$2 \sqrt{(-a-3)^2 + (-a + \frac{1}{3})^2}$$

$$2 \sqrt{a^2 + 6a + 9 + a^2 - \frac{2}{3}a + \frac{1}{9}} = 2 \sqrt{2a^2 + \frac{16}{3}a + \frac{82}{9}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \sqrt{18a^2 + 48a + 82}$$

$$\text{Средняя} = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{18a^2 + 48a + 82}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10} \sqrt{6}}{6} = \sqrt{\frac{5 \cdot 6}{3}}$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{9a^2 + 16a + 41}$$

$$2 \frac{\sqrt{\sqrt{-a-3} + \sqrt{-a + \frac{1}{3}}}}{2}$$

$$2 \sqrt{\frac{\frac{1}{24} + \sqrt{\frac{82}{24}}}{2}}$$

$$2 \sqrt{\frac{1 + \sqrt{82}}{2 \sqrt{24}}} = 2 \sqrt{\frac{1 + \sqrt{82}}{4 \sqrt{6}}} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{82}}}{\sqrt{6}}$$

$$\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$+ \frac{73}{24} - 3$$

$$3 \frac{1}{24} - 3$$

$$\frac{73+5}{24} = \frac{82}{24} = 3 \frac{1}{24} + \frac{8}{24} = 3 + \frac{9}{24}$$

$$+ \sqrt[4]{\frac{1}{3} - a} = \sqrt[4]{-a-3}$$

$$(-a + \frac{1}{3}) = 81(a-3)$$

$$-a + \frac{1}{3} = -81a - 243$$

$$\frac{41}{72} + \frac{8}{24} - 80a = 243 \frac{1}{3}$$

$$-240a = 729 + 1$$

$$-240a = 730$$

$$a = \frac{73}{24}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

