МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12

1. [4 балла] Решите неравенство

$$\left|x^3-9\right|+\left|x^2-1\right| \leqslant \left|x^3-x^2-8\right|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a;b;c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $5^{360}\cdot 7^{90}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y-3)-x(11y-34)+32y-101=0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC. Прямые ED и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что площадь треугольника BCF в 25 раз больше площади треугольника DGF.

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y=-x^5+ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y=2x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a, b и c не все равны между собой, и при этом

$$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения abc.

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC $(AB=BC)$ вписан в окружность ω, а на дуге AC, не содержащей точку B, взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F. На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX=CF$ и $CY=AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF=19$, $XY=36$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1. вариант 12

$|x^3-9|+|x^2-1| \leq |x^3-x^2-8|$

предположим, что $x^3-9 \geq 0$, тогда $x \geq \sqrt[3]{9}$, так как $\sqrt[3]{9} > 1$, то $x^2-1 \geq 0$

то есть при $x^3-9 \geq 0$, $x^2-1 \geq 0$. ~~Сравним x^3-x^2-8 и 0~~

если $x^3-x^2-8<0$, то $x^3+x^2-10 \leq -x^3+x^2+8 \Rightarrow 2x^3 \leq 18$ $x \leq \sqrt[3]{9}$, но

$x \geq \sqrt[3]{9}$, т.е $x=\sqrt[3]{9}$, проверим, что при $x=\sqrt[3]{9}$ $x^3-x^2-8<0$, $x^3=9$, т.е

$x^3-x^2-8=1-x^2$, но при $x=\sqrt[3]{9}$ ~~всегда~~ $x^2-1>0$, а значит $1-x^2<0$ и

$x^3-x^2-8<0$ при $x=\sqrt[3]{9}$. Если же при каких-то значениях $x>\sqrt[3]{9}$

$x^3-x^2-8 \geq 0$, то утверждение $x^3-9+x^2-1 \leq x^3-x^2-8$ явно неверно,

так как $x^3-x^2-8=(x^3-9)-(x^2-1)$, а значит при $x^2-1 \geq 0$ $x^3-x^2-8<x^3-9$,

а значит $|x^3-9|+|x^2-1|>|x^3-x^2-8|$ при $x^3-x^2-8 \geq 0$

теперь рассмотрим случай, когда $x^3-9<0$, тогда $x<\sqrt[3]{9}$ и возможны

2 варианта: $x^2-1 \geq 0$ и $x^2-1<0$, рассмотрим 1 случай: $x^2-1 \geq 0$

Посмотрим на x^3-x^2-8: $x^3-x^2-8=(x^3-9)-(x^2-1)$, где $x^3-9<0$ и

$-(x^2-1) \leq 0$ (т.к $x^2-1 \geq 0$) $\Rightarrow x^3-x^2-8<0$, раскроем модули:

$9-x^3+x^2-1 \leq -x^3+x^2+8$, мы получаем $0 \leq 0$, что верно всегда,

когда $x^3-9<0$, а $x^2-1 \geq 0$, что верно при $\begin{cases} x<\sqrt[3]{9} \\ |x| \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; -1]$ и

$[1; \sqrt[3]{9})$. Рассмотрим случай 2: $x^2-1<0$, что возможно только

при $x \in (-1;1)$. Посмотрим на $x^3-x^2-8=x^2(x-1)-8$, т.е при $x-1<0$

$x^3-x^2-8<0$ то есть при $x \in (-1;1)$ $x^3-x^2-8<0$.

Получаем $9-x^3+1-x^2 \leq -x^3+x^2+8 \Rightarrow 10-x^2 \leq x^2+8 \Rightarrow 2x^2 \geq 2$

$x^2 \geq 1$, но $x \in (-1;1)$, а значит на промежутке $(-1;1)$ решений нет.

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

2. вариант 12

Так как $a; b; c$ образуют геометрическую прогрессию, то $b^2 = ac$

значит $b^3 = abc = 5^{360} \cdot 7^{90} \Rightarrow b = 5^{120} \cdot 7^{30}$ и $ac = 5^{240} \cdot 7^{60}$.

Очевидно, что разным a будет соответствовать разные c и задача сводится к подсчёту натуральных a таких, что $\frac{5^{240} \cdot 7^{60}}{a} \in N$

у 5 может быть одна из 241 степени, а у 7 одна из 61 степени, т.е количество вариантов, когда $5^{240} \cdot 7^{60} \vdots a$ равно $241 \cdot 61 = 14701$.

При таком подсчёте мы считаем тройки a, b, c и c, b, a за разные тройки, если же считать это за одинаковые тройки, то ответ будет 7351

Ответ: 7351 не учитывая порядок и 14701 учитывая порядок чисел a, b, c.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3. вариант 12

$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$

$x_{1;2} = \dfrac{11y-34 \pm \sqrt{121y^2 - 748y + 1156 - 128y^2 + 404y + 384y - 1212}}{2y-6} =$

$= \dfrac{11y-34 \pm \sqrt{-7y^2+40y-56}}{2y-6}$, откуда $-7y^2+40y-56 \geqslant 0$ и $y \neq 3$

$7y^2 - 40y + 56 \leqslant 0$

$y_{1;2} = \dfrac{40 \pm \sqrt{1600-1568}}{14} = \dfrac{20 \pm 2\sqrt{2}}{7}$

$y \in \left[\dfrac{20-2\sqrt{2}}{7}; \dfrac{20+2\sqrt{2}}{7}\right]$, но $y \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{20-2\sqrt{2}}{7} > 2$, т.к. $20-2\sqrt{2} > 17$

$\dfrac{20+2\sqrt{2}}{7} < 4$, т.к. $20+2\sqrt{2} < 23$, то есть $2 < y < 4$, т.е $y = 3$, но

$y \neq 3$ решений нет.

Но при $y = 3$ уравнение имеет вид $-x(11y-34) + 32y - 101 = 0$

где $x = \dfrac{32y-101}{11y-34}$, и при $y = 3$ $x = \dfrac{96-101}{33-34} = \dfrac{-5}{-1} = 5$

Ответ: $(5; 3)$

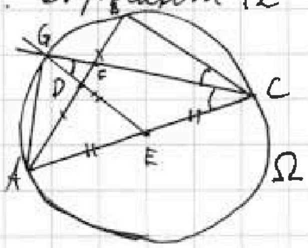
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

4. вариант 12



Дано: $AD=DB$, $AE=EC$ CF - биссектриса
$ED\cap CF=G$ $G\in\Omega$

$S_{DGF}=\frac{1}{25}S_{BCF}$

Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$

Решение: DE - средняя линия $\triangle ABC$ => $DE\parallel BC$. $\angle DGF=\angle FCB$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых BC и DE секущей CG, также $\angle GFD=\angle BFC$ как ~~накр~~ вертикальные.

Значит, $\triangle DGF\sim\triangle BCF$ по I признаку, значит $\frac{S_{BCF}}{S_{DGF}}=k^2$, где k - коэфф. подобия $\frac{S_{BCF}}{S_{DGF}}=25=5^2$ => $k=5$ => $\frac{FC}{GF}=5$ и $\frac{BF}{DF}=5$, т.к. $AD=BD$, а $BD=BF+DF$, то $\frac{BF}{AF}=\frac{5}{7}$. Так как $\angle DGF=\angle FCB$, а $\angle FCB=\angle FCA$, то $\angle DGF=\angle FCA$ => $\triangle CEG$ - равнобедренный и $GE=EC$, а $EC=EA$. В треугольнике $\triangle AGC$ медиана $GE=\frac{1}{2}$ стороны AC, к которой проведена, а значит $\angle AGC=90°$, но $\angle AGC$ и $\angle B$ опираются на одну и ту же дугу, значит $\angle B=90°$. Так как CF - биссектриса, то

$\frac{BF}{AF}=\frac{BC}{AC}=\frac{5}{7}$, откуда $\sin\angle A=\frac{BC}{AC}=\frac{5}{7}=\cos\angle C$, откуда
$\angle A=\arcsin\frac{5}{7}$, а $\angle C=\arccos\frac{5}{7}$

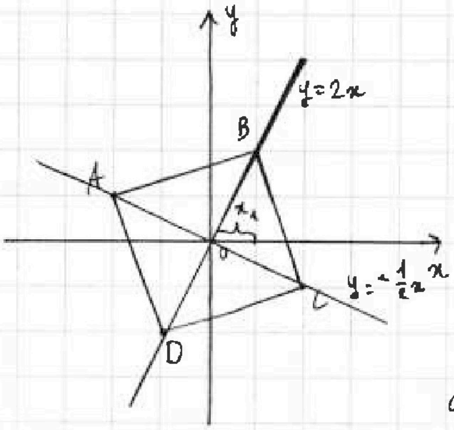
Ответ: $\angle A=\arcsin\frac{5}{7}$, $\angle B=90°$, $\angle C=\arccos\frac{5}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5. вариант 12



Центр - точка O; A, B, C, D - вершины квадрата

x_1 - абсцисса точки B ($-x_1$ - ордината точки C)

$x_1 > 0$

Проведём вторую диагональ квадрата, она перпендикулярна первой и её функция $y=-\frac{1}{2}x$

ордината точки $C = -x_1$ в силу того, что при повороте на 90° квадрата переходит в такой же квадрат. Рассмотрим точки B и C, в них пересекаются по 2 функции, так что

$2x_1 = -x_1^5 + ax_1$ (в точке B $y=y$) и $-x_1 = -32x_1^5 + 2ax_1$ (в точке C)

$-x_1^5 + x_1(a-2) = 0 \Rightarrow -x_1^4 + (a-2) = 0$ (т.к $x_1 > 0$ знак неизменятся)

$a - 2 = x_1^4 \Rightarrow a = x_1^4 + 2$ ①

$-x_1 = -32x_1^5 + 2ax_1 \Rightarrow -32x_1^5 + x_1(2a+1) = 0$ $2a+1 = 32x_1^4$

$a = \frac{32x_1^4 - 1}{2}$ ②

из ① и ② получаем $2x_1^4 + 4 = 32x_1^4 - 1 \Rightarrow 30x_1^4 = 5$ $x_1^4 = \frac{1}{6}$

$a = \frac{1}{6} + 2 = 2\frac{1}{6}$ $x_1 = \sqrt[4]{\frac{1}{6}}$

$OB = OC$ и $BC = \sqrt{2}\cdot OB$, где $OB = \sqrt{x_1^2 + 4x_1^2}$ ($y = 2x \Rightarrow y_1 = 2x_1$)

$OB = \sqrt{5x_1^2} \Rightarrow BC = \sqrt{10x_1^2} = \sqrt{10\cdot\sqrt{\frac{1}{6}}} = \sqrt[4]{\frac{50}{3}}$

Ответ: $a = 2\frac{1}{6} = \frac{13}{6}$, а сторона квадрата $\sqrt[4]{\frac{50}{3}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

6. вариант 12

$$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a} \quad \cdot abc$$

$$\frac{ab+7}{b}=\frac{bc+7}{c}=\frac{ac+7}{a}$$

$$a^2bc+7ac=ab^2c+7ab=abc^2+7bc$$

Заметим, что $a \neq b \neq c$, т.к. если например $a=b$, то $\frac{7}{b}=\frac{7}{c}$, а значит $b=c$, но тогда получается, что $a=b=c$, что противоречит условию.

$$\begin{cases} abc(a-b)=7a(b-c) \\ abc(a-c)=7c(b-a) \\ abc(b-c)=7b(c-a) \end{cases}$$

$$bc(a-b)=7(b-c) \Rightarrow a-b=\frac{7(b-c)}{bc}$$

$$abc(c-a)=\cancel{7c\cdot\frac{7(b-b)}{bc}}=7c\cdot\frac{7(b-c)}{bc}$$

$$c-a=\frac{49(b-c)}{ab^2c}$$

$$abc(b-c)=7b\cdot\frac{49(b-c)}{ab^2c}$$

$$abc=\frac{7^3}{abc}$$

$$abc=\pm\sqrt{7^3}=\pm\sqrt{343}$$

Ответ: $abc=\sqrt{343}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1

$|x^3-9|+|x^2-1| \le |x^3-x^2-8|$

$x^3-x^2-8 \ge 1-x^2$ где

пусть $x^3-9 \ge 0$ и $x^2-1 \ge 0$ если $x^3-9 \ge 0$, то $x^2-1\ge 0$ тоже верно,

$x^2>1$, т.к $x>1$ т.е. $x^3-x^2-8<0$

$x^3 \ge 9$ $\quad x^2 \ge 1$

$x \ge \sqrt[3]{9}$ $\quad |x| \ge 1$

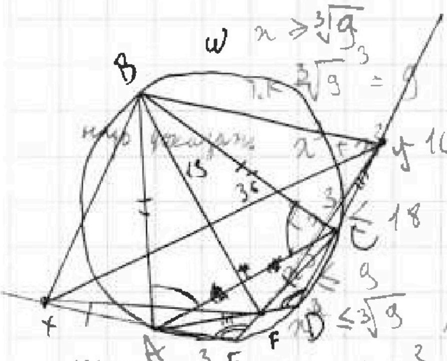
т.к $\sqrt[3]{9}^3 = 9$ и $1^3<9$, то $\sqrt[3]{9}>1$, т.е $x \ge \sqrt[3]{9}$

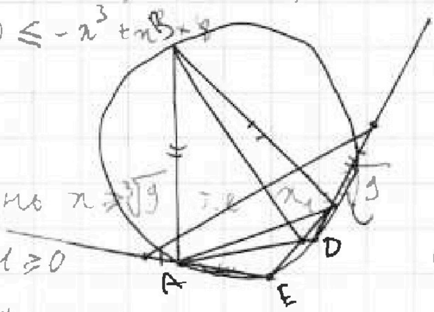
$x^3-9+x^2-1 \le x^3-x^2-8$ $\quad 10 \le -x^3+x^3-8$

18

9

$\le \sqrt[3]{9}$, но $x \ge \sqrt[3]{9}$ т.е





2.

$241 \cdot 61 = 14701$

пусть $x^3-9<0$, а $x^2-1\ge 0$

$x<\sqrt[3]{9}$ $\quad$ $x \ge 1$ и $x \le -1$

значит $x \in [-\infty, -1] \cup [1, \sqrt[3]{9})$, посмотрим на x^3-x^2-8

при $x=1$ ~~$x^3-x^2-8<0$~~

$x^3-x^2-8 \ge 0$ $\quad x^3-x^2-8<0$

$9-x^3+x^2-1 \le -x^3+x^2+8$

$-x^3+x^2+8 \le -x^3+x^2+8$

$x^3-x^2-8=0$

Ответ1: при всех $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \sqrt[3]{9}]$ это верно

$(x^3-9)-(x^2-1)$

$\wedge \quad \parallel$

$0 + 0 < 0$

пусть $x^3-9<0$ и $x^2-1<0$

$ac=b^2$ $\quad x^3-x^2-8<0$

$x<\sqrt[3]{9}$ $\quad$ $x \in (-1;1)$

$x^3-9<-8$

x^3-x^2-8 при $x=-1$ $=-10<0$

т.к $x<1$ $\quad x^3<1$

2. $a \cdot b \cdot c = 3^{300} \cdot 7^{30}$ $\quad$ a – любое число от 1 до $5^{30} \cdot 7^{30}$

$a \cdot b \cdot c = a^3 \cdot q^3 = (aq)^3$

$a \quad aq \quad aq^2$

$x^3-9<-8$ $\quad x^2-1 \ge -1$ $\quad x^3-x^2-8$ при $x=0$ $=-8$

$x^2-1 \ge -1$ т.к $x^2 \ge 0$ $\quad x^2-1<0$ $\quad x^3-x^2-8$ при $x=1$ $=-8$

$b=5^{120} \cdot 7^{30}$ $\quad aq=5^{120} \cdot 7^{30}$

$(x^3-9)-(x^2-1)<-9$

$\wedge$ -8 $\quad -(x^2-1)\le -1$

т.е. x^3-x^2-8 при $x \in (-1;1)$ $\quad x^3-x^2-8<0$

для каждого n (четного) будем выбирать a, чтобы $\frac{5^{240} \cdot 7^{60}}{a} \in N$

$a = 5^n \cdot 7^k$ для каждого n пускать 61 k

т.е

$9-\cancel{x^3}-x^2+1 \le \cancel{-x^3}+x^2+8$

ни какое n приходится

т.е. $S=241 \cdot 61$

$10-x^2 \le x^2+8$

$2x^2 \ge 2 \Rightarrow x^2 \ge 1$, но $x^2<1$, т.е на промежутке $(-1;1)$ решений нет

10

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(1) $x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$

$x_{1;2} = \dfrac{11y-34 \pm \sqrt{121y^2 - 748y + 1156 - 128y^2 + 404y + 384y - 1212}}{2y-6} =$

$= \dfrac{11y-34 \pm \sqrt{-7y^2 + 40y - 56}}{2y-6}$

$-7y^2 + 40y - 56$

$-7y^2 + 40y - 56 \geq 0$

$y_{1;2} = \dfrac{-40 \pm \sqrt{1600 - 1568}}{-14}$

$\dfrac{-40 \pm \sqrt{32}}{-14} = \dfrac{20 \pm 2\sqrt{2}}{7}$ $\quad y \in \left[\dfrac{20 - 2\sqrt{2}}{7}; \dfrac{20 + 2\sqrt{2}}{7}\right]$

$\dfrac{32y - 101}{11y - 34}$

$c + \dfrac{7}{a} = a + \dfrac{7}{b} = b + \dfrac{7}{c}$

$\dfrac{ac+7}{a} = \dfrac{ab+7}{b} = \dfrac{bc+7}{c}$ $\quad abc \quad a \neq b \neq c$

т.к. если $a = b$

$abc^2 + 7bc = a^2bc + 7ac = ab^2c + 7ab \quad a + \dfrac{7}{b} = b + \dfrac{7}{c}$

$\dfrac{7}{b} = \dfrac{7}{c} \Rightarrow b = c$ противор.

$abc(c-a) = 7c(a-b)$

$20 - 2\sqrt{2} < 18 \quad 20 + 2\sqrt{2} < 23$

$y \in \mathbb{Z}$, т.к. $\Rightarrow$ $\quad \dfrac{18}{7} < 3 \quad \dfrac{23}{7} < 4$

подставим $y = 3$

$x^2(3-3) - x(33-34) + 96 - 101 = 0$ $\quad 20 - 2\sqrt{2} > 17$

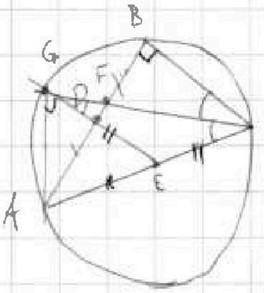
$\dfrac{17}{7} > 2 \quad 2 < y < 4$

$x - 5 = 0$ Ответ $(5; 3)$

$x = 5$ $\quad y = 3$

$abc = \sqrt{7^3}$ $\quad abc(c-a) = \dfrac{49(b-c)}{b}$ $\quad abc(c-a) = 7c(a-b)$

(4)



k – коэффициент подобия $\triangle CBF$ и $\triangle DGF$ $\quad abc(c-b) = 7b(a-c)$

$k = 5$ $\quad abc(c-b) = \dfrac{49 \cdot 7(c-b)}{abc}$ $\quad abc(a-b) = 7a(b-c)$

$bc(a-b) = 7(b-c)$

$\dfrac{FC}{GF} = 5 \quad \dfrac{BF}{DF} = 5 \quad y^3 = abc^2 \quad \dfrac{BF}{AF} = \dfrac{5}{7} \quad a - b = \dfrac{7(b-c)}{bc}$

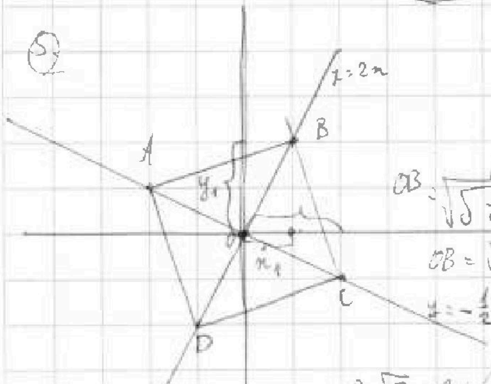
$6\sqrt{343}$ $\quad$ т.к. CF – биссектриса, то $\quad a = \dfrac{1}{6} + 2 = 2\dfrac{1}{6}$

$a = x_1^4 + 2$

$\angle A = \arcsin\left(\dfrac{5}{7}\right) \quad \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{BF}{FA} = \dfrac{5}{7} \quad a = x_1^4 + 2$

$\angle C = \arccos\left(\dfrac{5}{7}\right) \quad a - 2 = x_1^4$

(5)



$y_1 = 2x_1$ и $y_1 = -(x_1)^5 + ax_1$ $\quad x_1(a-2) = 0$

$OB = \sqrt{\sqrt{\dfrac{1}{6}} + \sqrt{\dfrac{16}{6}}}$

$OB = \sqrt{5} \sqrt[4]{\dfrac{1}{6}}$ $\quad 2x_1 = -x_1^5 + ax_1$ $\quad -32x_1^5 + x_1(2a+1) = 0$

$y = -\dfrac{1}{2}x \quad \sqrt[4]{\dfrac{25}{6}} \quad -x_1 = -32x_1^5 + 2ax_1$

$2a + 1 = 32x_1^4$

$BC = OB \cdot \sqrt{2} - 2x_1 = x_1^5 - ax_1$ $\quad 32x_1^4 - 1 = 2x_1^4 + 4 \quad a = \dfrac{32x_1^4 - 1}{2}$

$OB = \sqrt{x_1^2 + (2x_1)^2} \quad x_1 = 32x_1^5 - 2ax_1$ $\quad 30x_1^4 = 5$

OI $\quad 6x_1^4 = 1 \quad x_1^4 = \dfrac{1}{6} \quad x_1 = \sqrt[4]{\dfrac{1}{6}}$