



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $5^{360} \cdot 7^{90}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 3) - x(11y - 34) + 32y - 101 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 25 раз больше площади треугольника DGF .

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 2x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a , b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырехугольника $BXFY$, если $BF = 19$, $XY = 36$.



1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

1. Вариант 12

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|$$

предположим, что $x^3 - 9 \geq 0$, тогда $x \geq \sqrt[3]{9}$, так как $\sqrt[3]{9} > 1$, то $x^2 - 1 \geq 0$

то есть при $x^3 - 9 \geq 0$, $x^2 - 1 \geq 0$. Сравним $x^3 - x^2 - 8$

если $x^3 - x^2 - 8 < 0$, то $x^3 + x^2 - 10 \leq -x^3 + x^2 + 8 \Rightarrow 2x^3 \leq 18 \Rightarrow x \leq \sqrt[3]{9}$, но

$x \geq \sqrt[3]{9}$, т.е. $x = \sqrt[3]{9}$, проверим, что при $x = \sqrt[3]{9}$ $x^3 - x^2 - 8 < 0$, $x^3 = 9$, т.е.

$x^3 - x^2 - 8 = 1 - x^2$, но при $x = \sqrt[3]{9}$ ~~так как~~ $x^2 - 1 > 0$, а значит $1 - x^2 < 0$ и

$x^3 - x^2 - 8 < 0$ при $x = \sqrt[3]{9}$. Если же при каких-то значениях $x > \sqrt[3]{9}$

$x^3 - x^2 - 8 \geq 0$, то утверждение $x^3 - 9 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 - 8$ явно неверно,

так как $x^3 - x^2 - 8 = (x^3 - 9) - (x^2 - 1)$, а значит при $x^2 - 1 \geq 0$ $x^3 - x^2 - 8 < x^3 - 9$,

а значит $|x^3 - 9| + |x^2 - 1| > |x^3 - x^2 - 8|$ при $x^3 - x^2 - 8 \geq 0$

теперь рассмотрим случай, когда $x^3 - 9 < 0$, тогда $x < \sqrt[3]{9}$ и возможны

2 варианта: $x^2 - 1 \geq 0$ и $x^2 - 1 < 0$, рассмотрим 1 случай: $x^2 - 1 \geq 0$

Посмотрим на $x^3 - x^2 - 8$: $x^3 - x^2 - 8 = (x^3 - 9) - (x^2 - 1)$, где $x^3 - 9 < 0$ и

$-(x^2 - 1) \leq 0$ (так $x^2 - 1 \geq 0$) $\Rightarrow x^3 - x^2 - 8 < 0$, рассмотрим теперь:

$9 - x^3 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 + 8$, мы получаем $0 \leq 0$, что верно всегда,

когда $x^3 - 9 < 0$, а $x^2 - 1 \geq 0$, что верно при $\begin{cases} x < \sqrt[3]{9} \\ |x| \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup$

$[1; \sqrt[3]{9})$. **Рассмотрим случай 2: $x^2 - 1 < 0$** , что возможно только

при $x \in (-1; 1)$. Посмотрим на $x^3 - x^2 - 8 = x^2(x - 1) - 8$, т.е. при $x - 1 < 0$

$x^3 - x^2 - 8 < 0$ то есть при $x \in (-1; 1)$ $x^3 - x^2 - 8 < 0$.

Получаем $9 - x^3 + 1 - x^2 \leq -x^3 + x^2 + 8 \Rightarrow 10 - x^2 \leq x^2 + 8 \Rightarrow 2x^2 \geq 2$
 $x^2 \geq 1$, но $x \in (-1; 1)$, а значит на промежутке $(-1; 1)$ нет ни одного.

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2. Вариант 12

Поскольку a, b, c образуют геометрическую прогрессию, то $b^2 = ac$

$$\text{значит } b^3 = abc = 5^{360} \cdot 7^{60} \Rightarrow b = 5^{120} \cdot 7^{20} \text{ и } ac = 5^{240} \cdot 7^{60}$$

Очевидно, что разность a будет соответствовать разности c и

задача сводится к поиску натурального a такого, что $\frac{5^{240} \cdot 7^{60}}{a} \in \mathbb{N}$

5 имеет степень 241 и 7 имеет степень 61 , т.е.

количество вариантов, когда $5^{240} \cdot 7^{60} : a$ равно $241 \cdot 61 = 14401$.

При таком подходе мы считаем тройки a, b, c и c, b, a за разные тройки, если не считать это за одинаковые тройки,

то ответ будет 4351

Ответ: 4351 не учитывая порядок и 14401 учитывая порядок

чисел a, b, c .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3. вариант 12

$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{11y-34 \pm \sqrt{121y^2 - 748y + 1156 - 128y^2 + 404y + 384y - 1212}}{2y-6} =$$

$$= \frac{11y-34 \pm \sqrt{4y^2 + 40y - 56}}{2y-6}, \text{ откуда } -4y^2 + 40y - 56 \geq 0 \text{ и } y \neq 3$$

$$4y^2 - 40y + 56 \leq 0$$

$$y_{1,2} = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 1568}}{8} = \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{4}$$

$$y \in \left[\frac{20 - 2\sqrt{2}}{4}, \frac{20 + 2\sqrt{2}}{4} \right], \text{ но } y \in \mathbb{Z}, \frac{20 - 2\sqrt{2}}{4} > 2, \text{ т.к. } 20 - 2\sqrt{2} > 14$$

$$\frac{20 + 2\sqrt{2}}{4} < 4, \text{ т.к. } 20 + 2\sqrt{2} < 23, \text{ то есть } 2 < y < 4, \text{ т.е. } y = 3, \text{ но}$$

$y \neq 3$ решений нет.

Но при $y = 3$ уравнение имеет вид $-x(11y-34) + 32y - 101 = 0$

$$\text{где } x = \frac{32y - 101}{11y - 34}, \text{ а при } y = 3 \quad x = \frac{96 - 101}{33 - 34} = \frac{-5}{-1} = 5$$

Ответ: $(5; 3)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

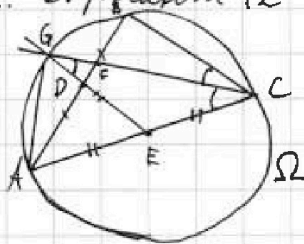
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4. Введите 12



Дано: $AD = DB$, $AE = EC$ CF - биссектриса
 $ED \cap CF = G$ $G \in \Omega$

$$S_{DGF} = \frac{1}{25} S_{BCF}$$

Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$

Заметим: DE - средняя линия $\triangle ABC \Rightarrow DE \parallel BC$, $\angle DGF = \angle FCB$ как
накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых BC и DE

секущей CG , также $\angle GFD = \angle BFC$ как ~~накрест~~ вертикальные.

Значит, $\triangle DGF \sim \triangle BCF$ по I признаку, значит $\frac{S_{BCF}}{S_{DGF}} = k^2$, где k - coeff.

поэтому $\frac{S_{BCF}}{S_{DGF}} = 25 = 5^2 \Rightarrow k = 5 \Rightarrow \frac{FC}{GF} = 5$ и $\frac{BF}{DF} = 5$, т.к.

$AD = BD$, а $BD = BF + DF$, то $\frac{BF}{DF} = \frac{5}{4}$. Так как $\angle DGF = \angle FCB$, а

$\angle FCB = \angle FCA$, то $\angle DGF = \angle FCA \Rightarrow \triangle CEG$ - равнобедренный и

$GE = EC$, а $EC = EA$. Вспомогательная $\triangle AGC$ медиана $GE = \frac{1}{2}$ стороны

AC , к которой проведена, а значит $\angle AGC = 90^\circ$, но $\angle AGC$ и $\angle B$ вертикальные

на одну и ту же дугу, значит $\angle B = 90^\circ$. Так как CF - биссектриса, то

$\frac{BF}{AF} = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{4}$, откуда $\sin \angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{4} = \cos \angle C$, откуда

$\angle A = \arcsin \frac{5}{4}$, а $\angle C = \arccos \frac{5}{4}$

Ответ: $\angle A = \arcsin \frac{5}{4}$, $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = \arccos \frac{5}{4}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

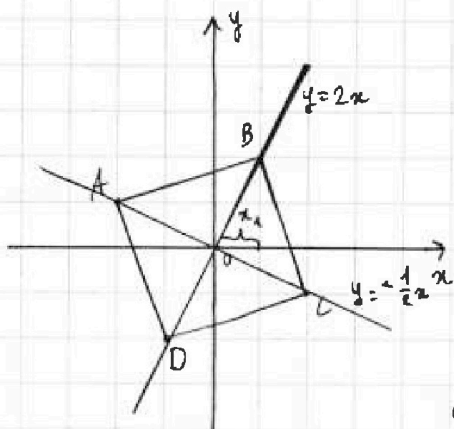


1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5. Вариант 12



Центр - точка O ; A, B, C, D - вершины квадрата

x_1 - абсцисса точки B ($-x_1$ - ордината точки C)

$x_1 > 0$

Проведём вторую диагональ квадрата, она перпендикулярна первой и её функция $y = -\frac{1}{2}x$

ордината точки $C = -x_1$ в силу того, что

при повороте на 90° квадрата переходит в такой же квадрат. Рассмотрим

точки B и C , были пересекаться по 2 функциям, так что

$$2x_1 = -x_1^5 + ax_1 \quad (\text{в точке } B \ y = y) \quad \text{и} \quad -x_1 = -32x_1^5 + 2ax_1 \quad (\text{в точке } C)$$

$$-x_1^5 + x_1(a-2) = 0 \Rightarrow -x_1^4 + (a-2) = 0 \quad (\text{т.к. } x_1 > 0 \text{ умножим на } x_1)$$

$$a-2 = x_1^4 \Rightarrow a = x_1^4 + 2 \quad (1)$$

$$-x_1 = -32x_1^5 + 2ax_1 \Rightarrow -32x_1^5 + x_1(2a+1) = 0 \quad 2a+1 = 32x_1^4$$

$$a = \frac{32x_1^4 - 1}{2} \quad (2)$$

$$\text{из } (1) \text{ и } (2) \text{ получаем } 2x_1^4 + \frac{1}{2} = 32x_1^4 - 1 \Rightarrow 30x_1^4 = \frac{3}{2} \quad x_1^4 = \frac{1}{6}$$

$$a = \frac{1}{6} + 2 = 2\frac{1}{6} \quad x_1 = \sqrt[4]{\frac{1}{6}}$$

$$OB = OC \text{ и } BC = \sqrt{2} \cdot OB, \text{ где } OB = \sqrt{x_1^2 + 4x_1^2} \quad (y = 2x \Rightarrow y_1 = 2x_1)$$

$$OB = \sqrt{5}x_1^2 \Rightarrow BC = \sqrt{10}x_1^2 = \sqrt{10 \cdot \frac{1}{6}} = \frac{4\sqrt{50}}{3}$$

$$\text{Ответ: } a = 2\frac{1}{6} = \frac{13}{6}, \text{ а сторона квадрата } \frac{4\sqrt{50}}{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6. Вариант 12

$$a + \frac{4}{b} = b + \frac{4}{c} = c + \frac{4}{a}$$

$$\frac{ab+4}{b} = \frac{bc+4}{c} = \frac{ac+4}{a} \quad \text{abc}$$

$$abc + 4ac = ab^2c + 4ab = abc^2 + 4bc$$

$$\begin{cases} abc(a-b) = 4a(b-c) \\ abc(a-c) = 4c(b-a) \\ abc(b-c) = 4b(c-a) \end{cases}$$

$$bc(a-b) = 4(b-c) \Rightarrow a-b = \frac{4(b-c)}{bc}$$

$$abc(c-a) = 4c \cdot \frac{4(b-c)}{bc} = 4c \cdot \frac{4(b-c)}{bc}$$

$$c-a = \frac{49(b-c)}{ab^2c}$$

$$abc(b-c) = 4b \cdot \frac{49(b-c)}{ab^2c}$$

$$abc = \frac{4^3}{abc}$$

$$abc = \pm \sqrt[3]{4^3} = \pm \sqrt[3]{343}$$

$$\text{Ответ: } abc = \sqrt[3]{343}$$

Заметим, что $a \neq b \neq c$, т.к. если

например $a=b$, то $\frac{4}{b} = \frac{4}{c}$, а значит

$b=c$, но тогда получается,

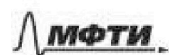
что $a=b=c$, что противоречит условию.



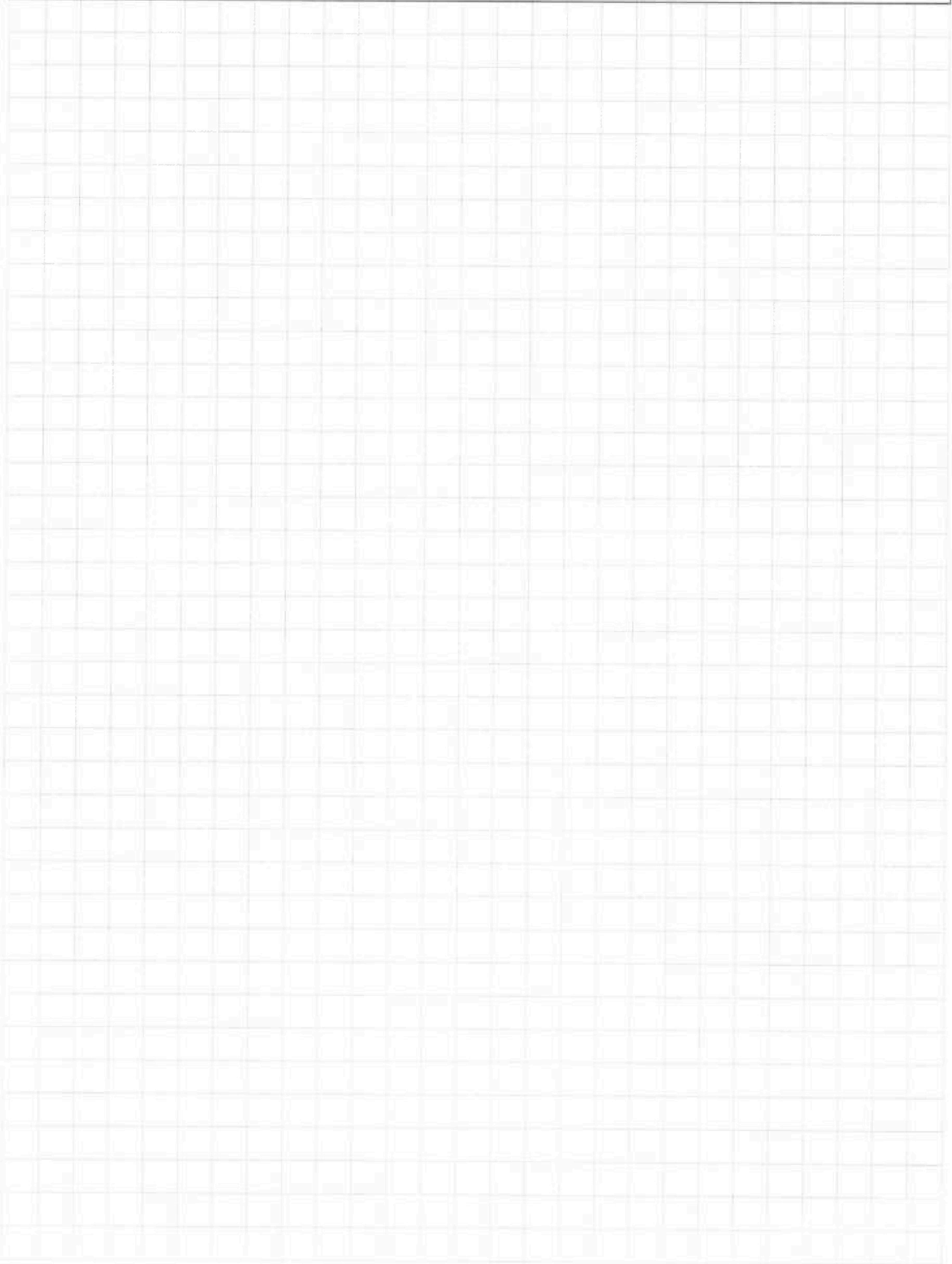
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

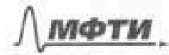




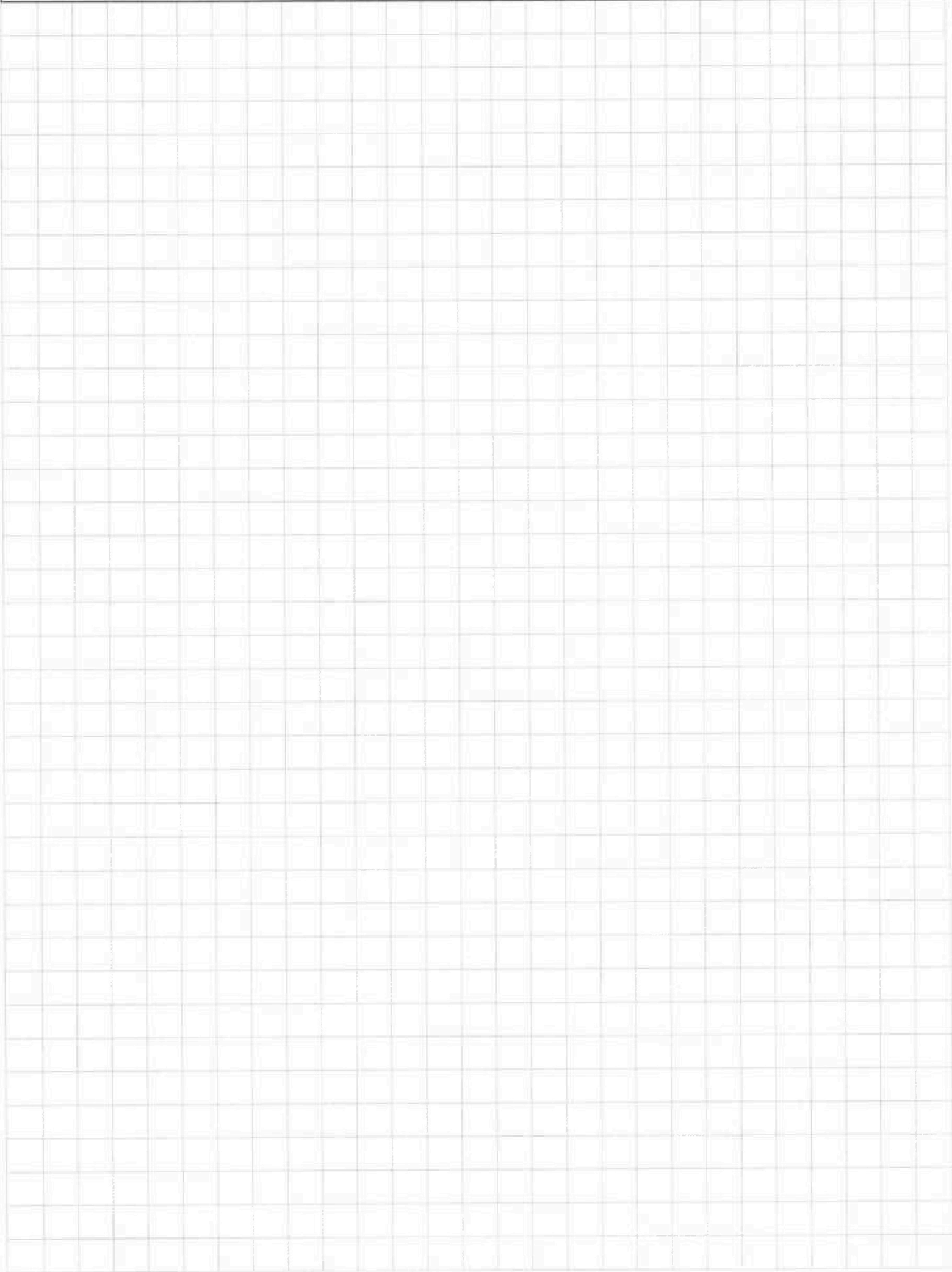
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



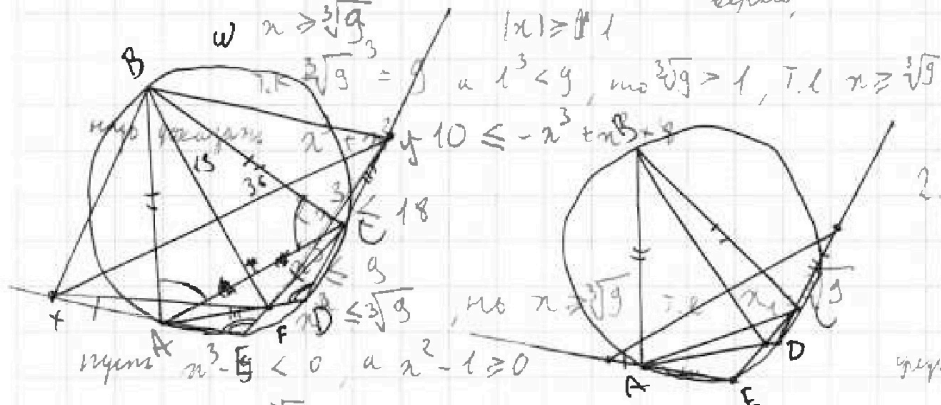
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1 $|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|$ $x^3 - x^2 - 8 \geq 1 - x^2$ или

при $x^3 - 9 \geq 0$ и $x^2 - 1 \geq 0$ или $x^3 - 9 < 0$ и $x^2 - 1 < 0$

$x^3 \geq 9$ $x^2 \geq 1$ то $x^3 - 1 \geq 0$ или берем,
 $x \geq \sqrt[3]{9}$ $|x| \geq 1$

$x^2 > 1, \text{ т.к. } x > 1$
 т.е. $x^3 - x^2 - 8 < 0$



2.

$$\begin{array}{r} 241 \\ \times 61 \\ \hline 1446 \\ 241 \\ \hline 14701 \end{array}$$

$\frac{1446}{1446} = 1$

знаем $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \sqrt[3]{9})$, посмотрим на $x^3 - x^2 - 8$

$9 - x^3 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 + 8$
 $-x^3 + x^2 + 8 \leq -x^3 + x^2 + 8$

Ответ: при $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \sqrt[3]{9})$ это верно

при $x^3 - 9 < 0$ и $x^2 - 1 < 0$

$x < \sqrt[3]{9}$ $x \in (-1, 1)$

$x^3 - 9 < -8$ $x^3 - x^2 - 8$ при $x = -1$
 $x^3 < 1$ $-10 < 0$
 $x^3 - 9 < -8$ $x^3 - x^2 - 8$ при $x = 0$
 $x^2 - 1 \geq -1$ -8
 $x^3 \geq 0$ $x^3 - x^2 - 8$ при $x = 1$
 -8

$x^3 - x^2 - 8 \geq 0$ $x^3 - x^2 - 8 < 0$
 $x^3 - x^2 - 8 = 0$

$(x^3 - 9) - (x^2 - 1) < -8$
 $1 \quad 1$
 $0 + 0 < 0$
 $x^3 - x^2 - 8 < 0$

2. $a \cdot b \cdot c = 3^{300} \cdot 4^{30}$ a - модаль

$a \cdot b \cdot c = a^3 \cdot q^3 \cdot (aq)^3$ $100 \cdot 5^{30} \cdot 4^{30}$
 $a \cdot aq \cdot aq^2$
 $b = 5^{120} \cdot 4^{30}$ $aq = 5^{20} \cdot 4^{10}$

для каждого a существует b и c $a, b, c \in \mathbb{N}$
 $a = 5^k \cdot 4^m$ a

$(x^3 - 9) - (x^2 - 1) < -8$
 $-8 - (x^2 - 1) \leq -1$ т.е. $x^3 - x^2 - 8$ при $x \in (-1, 1)$ $x^3 - x^2 - 8 < 0$
 т.е. $9 - x^3 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 + 8$
 $10 - x^2 \leq x^2 + 8$

$2x^2 \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 1$, но $x^2 < 1$, т.е. на промежутке $(-1, 1)$ неравенство не выполняется.

т.е. $S = 241 \cdot 61$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) $x^3(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$

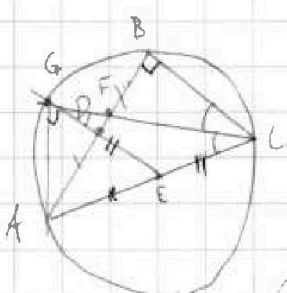
$x_{1,2} = \frac{11y-34 \pm \sqrt{(11y-34)^2 - 4(32y-101)}}{2}$

$-4y^2 + 40y - 56 \geq 0$
 $4y^2 - 40y + 56 \leq 0$
 $y \in [2, 4]$

возможна $y = 3$

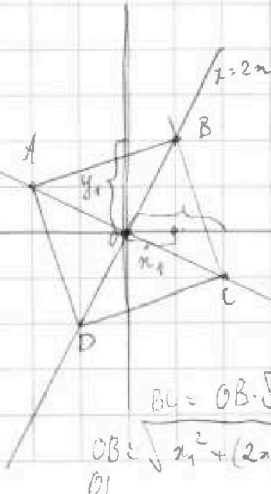
$x^2(3-3) - x(33-34) + 96 - 101 = 0$
 $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$
 Ответ: $(5; 3)$

4)



$abc = \sqrt{7^3} (a-c) = \frac{abc(c-a)}{b} = \frac{7a(b-c)}{b}$
 $k = 5$
 $\frac{FC}{GF} = 5$
 $\frac{BF}{DF} = 5$
 $\frac{AF}{AF} = 1$

5)



$\angle A = \arcsin(\frac{5}{12})$
 $\angle C = \arccos(\frac{5}{12})$
 $OB = \sqrt{\frac{4}{6} + \frac{16}{6}}$
 $OC = \sqrt{5 + \frac{4}{6}}$
 $BC = OB \cdot \sqrt{2} - 2x_1 = x_1^5 - 2ax_1$
 $OB \cdot \sqrt{2} = \sqrt{x_1^2 + (2x_1)^2} = \sqrt{5}x_1$
 $32x_1^4 - 1 = 2x_1^4 + 4 \Rightarrow a = \frac{32x_1^4 - 5}{4}$
 $6x_1^4 = 1 \Rightarrow x_1^4 = \frac{1}{6} \Rightarrow x_1 = \sqrt[4]{\frac{1}{6}}$