



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 12

1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $5^{360} \cdot 7^{90}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 3) - x(11y - 34) + 32y - 101 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 25 раз больше площади треугольника DGF .

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 2x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a , b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXYF$, если $BF = 19$, $XY = 36$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача $|x| \geq \sqrt[3]{9}$ то есть модуль получаем
составляем $"+"$, имея коэффициенты $x^3 - 9 + |x^2 - 8| \leq 0$ $\Rightarrow x^3 \leq 9 + |x^2 - 8|$ \Rightarrow $x^3 \leq 9 + x^2 - 8 \Rightarrow x^3 - x^2 + 1 \leq 0$ $\Rightarrow x^2(x - 1) \leq -1$, но $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$
аналогично для $0 < x$ получим $x^3 - x^2 + 1 \leq 0$ $\Rightarrow x^2(x - 1) \leq -1$, но $x > 0$, $x \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow |x| \geq \sqrt[3]{9}$, т.к. $x^3 - x^2 + 1 \leq 0$ $\Rightarrow x^3 - x^2 + 1 + x^2 - 8 \leq 0 \Rightarrow x^3 \leq 8 \Rightarrow x \leq \sqrt[3]{8} = 2$
*: $|x^3 - 9| + |x^2 - 8| \leq |x^3 - x^2 - 8|$
 $x^3 - 9 \geq 0$ при $x \in [\sqrt[3]{9}, +\infty)$, $\text{т.к. } x \in (-\infty, \sqrt[3]{9}) : x^3 - 9 < 0$ при $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
*: $x \in (-1, 1)$ \Rightarrow рассмотрим пять случаев: (1) $x \in [1, \sqrt[3]{9}]$
1) $x \in [\sqrt[3]{9}, +\infty)$ $x^3 - x^2 - 8 > 0$ *: $x^3 - 9 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 - 8 \Rightarrow x^2 \leq 1$, но $x \geq \sqrt[3]{9}$, $x \in \mathbb{Q}$
2) $x \in [\sqrt[3]{9}, 2]$ $x^3 - x^2 - 8 \leq 0$ *: $x^3 - 9 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 + 8 \Rightarrow 8x^3 \leq 9$, но $x \in [\sqrt[3]{9}, 2]$
нр. ед. нер. точки $x = \sqrt[3]{9}$: $x^3 - x^2 - 8 = 1 - \sqrt[3]{18} < 0$ - неравн.
3) $x \in [1, \sqrt[3]{9}]$ $x^3 - x^2 - 8 \geq 0$ $\Rightarrow -x^3 + 9 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 - 8 \Rightarrow x^3 - x^2 - 8 \geq 0$
4) $x \in [1, \sqrt[3]{9}]$ $x^3 - x^2 - 8 < 0$ *: $-x^3 + 9 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 + 8 \Rightarrow 8 < 6$, нр. $A = \{x \mid x \in [1, \sqrt[3]{9}] \wedge x^3 - x^2 - 8 > 0\}$
нр. $x \in A$ - 6 случаев, но и $x \in [1, \sqrt[3]{9}] \setminus A$ 3 случаев по симметрии, н.р.
 $x \in [1, \sqrt[3]{9}] \setminus A$ - 3 случая 6 случаев
5) $x \in (-1, 1)$ $x^3 - x^2 - 8 \geq 0$ *: $-x^3 + 9 - x^2 + 1 \leq x^3 - x^2 - 8 \Rightarrow x^3 \geq 9$, но $x \notin [1, \sqrt[3]{9}]$
6) $x \in (-1, 1)$ $x^3 - x^2 - 8 \leq 0$ *: $-x^3 + 9 - x^2 + 1 \leq -x^3 + x^2 + 8 \Rightarrow x^2 \geq 1$, но $x \in (-1, 1) \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$
7) $x \in (-\infty, -1]$ $x^3 - x^2 - 8 < 0$, всегда $x^3 < 0$ и $x^2 > 0$; *: $-x^3 + 9 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 + 8 \Rightarrow 8 < 6$ нр.

Ответ: $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \sqrt[3]{9}]$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c если a или b или c из $p \nmid q^2$ p - простое, $p \neq 5$, $p \neq 7$, то abc : p
 $\Rightarrow abc = 5^{160} \cdot 7^{10}$. Применение, п.р. $d = 5^{12} \cdot 7^4$, $q = 5^{12} \cdot 7^4$, где d, 0 - Нам.
максимальные или 0, 8, 4 - чётные ($\Rightarrow 8=4=0$). Несколько (записаны в произвольном порядке):
нужна $b=aq$, $c=aq^2$ $abc = a^3 q^3 = 5^{160} \cdot 7^{10} \Rightarrow dq = 5^{120} \cdot 7^{30} = 5^{120} \cdot 7^{30} = 5^{120} \cdot 7^{30}$
 $\Rightarrow \begin{cases} d+q=120 \\ d+q=30 \end{cases}$, т.к. d, 0 - Нам. решения
также $q=120-d$
 $q=30-B$; $\begin{cases} 240 \geq d \\ 60 \geq B \end{cases}$, где каждое из означает ограничение
 B , где $B=4$, всего 2 решения. $240 \geq d$, $B=6$, всего 2 решения
количество; $240 \cdot 61 - 1 = 14400$ ($q \neq 1$)
Одно: 14400

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$* = x^2(y-3) - x(11y-39) + 32y^2 - 101 = 0 \quad \text{квадратное уравнение}$$

$$D = (11y-39)^2 - 4(y-3)(32y-101) = 121y^2 + 39^2 - 22 \cdot 34y + (4y-12)(101-32y) =$$

$$= 121y^2 + 39^2 - 22 \cdot 34y + 404y - 128y^2 - 1212 + 384y =$$

$$= 121y^2 + 1156 - 484y + 404y - 128y^2 - 1212 + 384y = -4y^2 + 4y - 5630$$

кв. уравнение от. y.

$$D = 16 - 4(-4)(-56)$$

$$= 16 - 28 \cdot 56 < 0, \text{ т.е.}$$

Если * - квадратное урн. x, то решений нет, что верно при y ≠ 3

$$y = 3: 0 = 32 \cdot 3 - 101 - x(-1) \quad x = 101 - 32 \cdot 3 = 101 - 96 = 5$$

Ответ: (5; 3)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $DE \perp CP$. Итак $\triangle APC$, т.e. $DE \parallel PC$ и

$$\angle EGF = \angle GCB = 2\angle G \angle GCA \Rightarrow \triangle EGC$$

$$\text{по виду.} \Rightarrow AC = 2GE = 2DE + DG = \\ = BC + 2DG$$

2) И.к. $\angle GFD = \angle BFC$ и $\angle DGF = \angle FCB$

$\triangle GDF \sim \triangle BCF$, т.к. $\angle BCF = \angle GDF$

$$\Rightarrow \frac{GD}{BC} = \frac{\text{[окн]}_P}{5} = \frac{1}{5}, \text{ тогда } GD = \frac{BC}{5} = \cancel{d} \quad (\text{поскольку } BC = 5d)$$

$$\text{тогда } AC = BC + 2DG = 5d + 2d = 7d$$

$$3) DA = DB = \frac{AB}{2}, \text{ Следовательно } D \text{ - центр окр. } \angle: \frac{5d}{2}^2 = \frac{AB^2}{4} \Rightarrow AB = 2\sqrt{d}$$

$$4) 3 \text{ выражения косинусов: } 10d^2 = 25d^2 + 49d^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7d^2 \cos \angle C$$

$$49d^2 = 10d^2 + 25d^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7d^2 \cos \angle B \quad 10 = 44 - 40 \cos \angle C \Rightarrow \cos \angle C = \frac{64}{40} = \frac{32}{35}$$

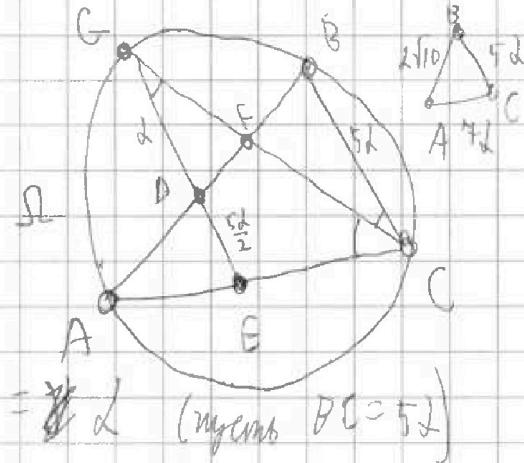
$$49 = 35 - 10\sqrt{d} \cos \angle B$$

$$10 \cos \angle B = -\frac{14}{10\sqrt{d}} = -\frac{7}{5\sqrt{d}} \quad \left| \begin{array}{l} 25d^2 = d^2 10 + 49d^2 - 2 \cdot 7d \cdot 2\sqrt{d} \cos \angle A \\ 25 = 59 - 14\sqrt{d} \cos \angle A \Rightarrow \cos \angle A = \frac{34}{14\sqrt{d}} = \frac{17}{7\sqrt{d}} \end{array} \right.$$

$$\text{Одним: } \angle A = \arccos \left(\frac{17}{7\sqrt{d}} \right)$$

$$\angle B = \arccos \left(-\frac{7}{5\sqrt{d}} \right)$$

$$\angle C = \arccos \left(\frac{32}{35} \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

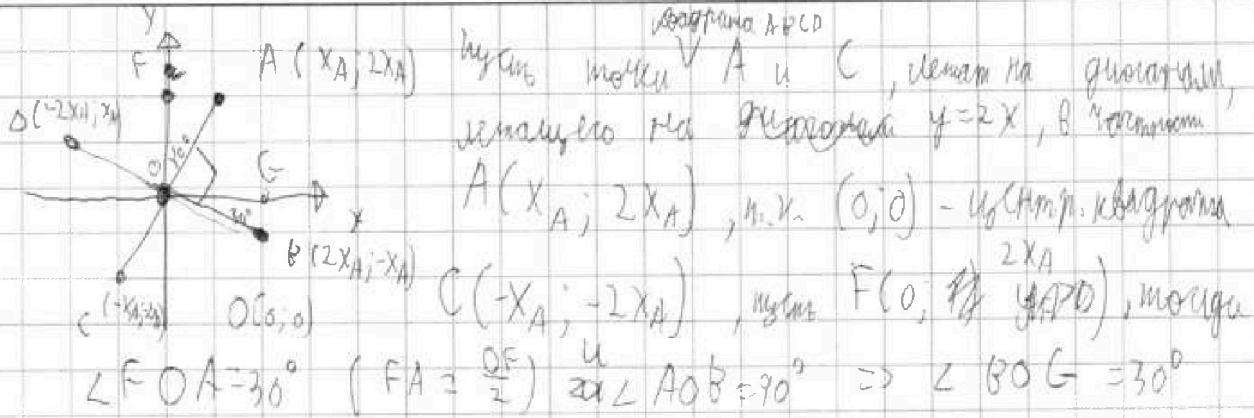
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



тогда $(B(x_B; y_B)$ и $G(x_B; 0)$ тогда $BG = \frac{OG}{2}$, т.к. $OA = OB$
 $(x_B = 2y_B)$

$$\Rightarrow x_B = 2x_A, y_B = -x_A, \text{т.к. } O\text{-центр квадрата} \quad D = (-x_B, -y_B) = (-2x_A, x_A)$$

$\therefore A, B, C, D \in y = -x + ax^5$ $\left\{ \begin{array}{l} 2x_A = -x_A^5 + ax_A \\ -x_A = -32x_A^5 + 2ax_A \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x_A \neq 0, \text{т.к.} \\ \text{иначе все равно} \end{array}$

$\left\{ \begin{array}{l} -2x_A = x_A^5 - ax_A \\ x_A = 32x_A^5 - 2ax_A \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x_A^4 = a - 2 \\ 32x_A^4 = 2a + 1 \end{array}$

$$x_A = \sqrt[4]{a-2}$$

$$32a - 64 = 2a + 1$$

$$30a = 65$$

$$a = \frac{65}{30} = \frac{13}{6}$$

$$x_A = \sqrt[4]{\frac{1}{6}}$$

$$OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{2}{6}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = OA\sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Ответ: $a = \frac{13}{6}$, сторона квадрата $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Установим, что $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, если $a = b$, то $a + \frac{4}{a} = b + \frac{4}{b} \Rightarrow a = b$,

тогда предположим, что $b = c$ (иначе $a = c$), т.е. $a \neq b \neq c \neq a$.

Пусть $abc = k \neq 0$, тогда $c = \frac{k}{ab}$, подставим в формулу:

$$a + \frac{4}{a} = b + \frac{4ab}{k} = \frac{k}{ab} + \frac{4}{a} \Rightarrow a + \frac{4}{a} = \frac{k}{ab} + \frac{4}{a} \Rightarrow a^2 - 6a + 4b = k + 4b$$

$$\downarrow \Rightarrow a^2 - 6a = k - 4b \quad (\star) \quad a^2 = \frac{k+4b-4a}{6} = \frac{1}{6} + \frac{k-4b}{6} \quad (\star)$$

$$b + \frac{4ab}{k} = \frac{k}{ab} + \frac{4}{a} \Rightarrow ab^2 + \frac{4a^2b^2}{k} = k + 4b \Rightarrow b^2 \left(a + \frac{4a}{k} \right) = k + 4b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 \left(a + \frac{4a}{k} \right) = k^2 + 4bk \Rightarrow b^2 (ak + 4a) = k^2 + 4bk \Rightarrow (ak + 4a)^2 = k^2 + 4bk$$

$$\Rightarrow b^2 (ak + 4a) = k^2 + 49ab \Rightarrow (a^2 - 4)^2 b^2 (ak + 4a) = k^2 (a^2 - 4)^2 + (a^2 - 4) \cdot 49ab$$

$$\Rightarrow (негемо) \quad (k-4a)^2 (ak+4a) = k^2 (a^2-4)^2 + (a^2-4) \cdot 19a (k-4a)$$

$$(k^2 + 49a^2 - 19ak) (ak + 4a) = k^2 (a^4 + 19a^2 - 14a^2) + 49a (a^2 k - 4k - 4a^3 + 49a)$$

$$ak^3 + 49a^3k - 19a^2k^2 + 49a^2k + 49a^3 - 4 \cdot 2 \cdot 49ak = a^4k^2 + 19a^2k^2 - 14a^2k^2 + 49a^3k - 99 \cdot 4a^3k - 49 \cdot 4a^3 + 49 \cdot 4a^3$$

$$+ 49a^2 \Rightarrow ak^3 - 14ak^2 = a^4k^2 + 49 \cdot 4ak - 49 \cdot 4a^3 \quad (a \neq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^3(k^2 - 49 \cdot 4) = k(k^2 - 49 \cdot 4), \text{ т.е. либо } k^2 = 49 \cdot 4, \text{ либо}$$

$$a^3 = k, \text{ но если так, то по } (\star) \quad (a^2 - 4)b = k \cdot 4a = a(a^2 - 4), \text{ т.е.}$$

либо $a = b$ (что невозможно), либо $a^2 = 4$, тогда $k^2 + a^6 = 4^2 + 4^3 = 49 \cdot 4$.

Пусть $k = \sqrt[4]{4}$, то $a = \sqrt[4]{4}$, т.е. $a = \sqrt[4]{4}$; $b = -\frac{\sqrt[4]{4}}{2}$, $c = 2\sqrt[4]{4}$

$$k = abc = \sqrt[4]{4} \cdot \left(-\frac{\sqrt[4]{4}}{2}\right) \cdot 2\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{4^3}, \text{ а исклученное разложение имеет вид:}$$

$$\sqrt[4]{4} + \frac{4}{\sqrt[4]{4}} = -\frac{\sqrt[4]{4}}{2} + \frac{4}{\sqrt[4]{4}} = -2\sqrt[4]{4} + \frac{4}{\sqrt[4]{4}} = \sqrt[4]{4}$$

$$\text{Однако: } \sqrt[4]{4^3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$m_{XY} \cdot XY + AF = FY, \angle FXY = \angle XYF; \text{ следим}$$

гипотензные координаты, $F(0, 0)$, $Y(x_2, 0)$

$X(x_1, y_1)$, $\frac{CY}{CF} = 1$, тогда

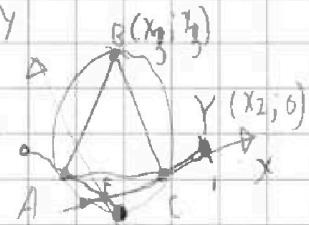
$$A\left(\frac{x_1}{x+1}, \frac{y_1}{x+1}\right), XY = 36:$$

$$FB = 19; x_3^2 + y_3^2 = 19^2, \text{м.н. } \triangle ABC \text{- равноб.}$$

$$\left(x_3 - \frac{x_1}{x+1}\right)^2 + \left(y_3 - \frac{y_1}{x+1}\right)^2 = \left(y_3 - \frac{y_2 x}{x+1}\right)^2 + y_3^2$$

но итоговое уравнение

$$S = \frac{y_3 x_2 + y_1 x_3 - x_1 y_3}{2}$$



B x_3, y_3
Y $x_2, 0$

F $0, 0$

X x_1, y_1
S x_3, y_3

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

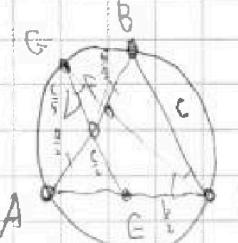
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{\triangle BCF} = 25 \quad S_{\triangle DGF}$$

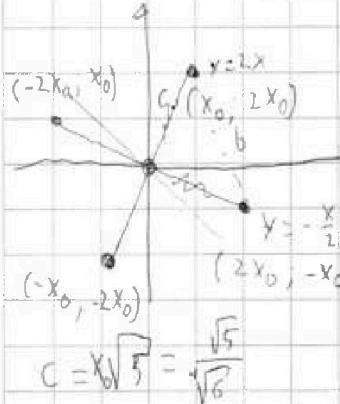
$$\angle A = \angle B = \angle C = \gamma$$

$$\text{IV}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{5}c = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4} \\ & a = c \sqrt{\frac{27}{5}} \quad b = c + \frac{2c}{5} = \frac{7c}{5} \\ & b = c + \frac{2c}{5} = \frac{7c}{5} = \frac{6}{5}c \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \text{V} \\ \text{VI} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 10 &= 25 + 49 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos \alpha = 49 - 70 \cos \alpha \quad \cos \alpha = \frac{64}{70} = \frac{32}{35} \\ 49 &= 25 + 10 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{10} \cdot \cos \beta = 35 - 10\sqrt{10} \cos \beta \quad \cos \beta = -\frac{14}{10\sqrt{10}} = -\frac{7}{5\sqrt{10}} \\ 25 &= 10 + 49 - 2 \cdot \sqrt{10} \cdot 7 \cdot \cos \gamma = 59 - 14\sqrt{10} \cos \gamma \quad \cos \gamma = \frac{34}{14\sqrt{10}} = \frac{17}{7\sqrt{10}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} 2x_0 = -x_0^5 + a x_0 \\ -y_0 = -32x_0^5 + 2ax_0 \\ 2z_0 = x_0^5 - ax_0 \end{array} \right. \quad \text{VII} \\ & \left\{ \begin{array}{l} 2x_0^4 = a - 2 \\ 32x_0^4 = 2a + 1 \end{array} \right. \quad \text{VIII} \quad \text{OvBem: } 2 \frac{1}{6}, \frac{1}{12} \\ & x_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad b = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, \quad a = \frac{65}{10} = \frac{13}{2} - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + \frac{4}{6} &= b + \frac{4}{6} - c + \frac{4}{6} \quad a + b + c = 10 \quad a + b + c + b + c + a + a = 30 \\ & \therefore a^2 b c + 7 a c = a b^2 c + 4 a b = a b c^2 + 4 b c \\ ab c + 4 c &= b^2 c + 4 b = b c^2 + \frac{4 b c}{a} \quad a = 6 + \frac{4}{6} = \frac{4}{3} \\ ab c + 4 c &= a^2 c^2 + 7 c = a^2 c + \frac{4 a c}{b} \quad b = 6 + \frac{4}{6} = \frac{4}{3} \\ ab c + 4 b &= a^2 b + 7 a = a b^2 + \frac{7 a b}{c} \quad c = 6 + \frac{4}{6} = \frac{4}{3} \\ 3 a b c + 7(a+b+c) &= a^2 b + a c^2 + b^2 c + 7(a+b+c) = a b^2 + a^2 c + b c^2 + 4 \left(\frac{b c}{a} + \frac{a c}{b} + \frac{a b}{c} \right) \end{aligned}$$

$$a^2 b + a c^2 + b^2 c = a b \left(a + \frac{4}{6} \right) + a c \left(c + \frac{4}{6} \right) - a b \left(b + \frac{4}{6} \right) + a c \left(a + \frac{4}{6} \right) + b c \left(c + \frac{4}{6} \right)$$

$$ab c = \frac{a^2 b + a c^2 + b^2 c}{3} + b c \left(b + \frac{4}{6} \right) - a b \left(a + \frac{4}{6} \right) - a c \left(c + \frac{4}{6} \right) - (a + \frac{4}{6})(ab + ac + bc)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & |x^3 - 1| + |x^2 - 1| \leq |x^3 + x^2 - 8| \\
 & \text{1) } |x| \geq \sqrt[3]{9} \quad x^3 - x^2 - 8 \geq 0 \\
 & x^3 - 9 + x^2 - 1 \leq x^3 + x^2 - 8 \\
 & 2x^2 \leq 2 \quad x \in [-1, 1] \text{ условие} \\
 & 2) |x| \geq \sqrt[3]{9} \quad x^3 - x^2 - 8 \leq 0 \\
 & x^3 - 9 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 + 1 \\
 & 2x^3 \leq 10 \quad x \leq \sqrt[3]{10} \\
 & 3) |x| < \sqrt[3]{9} \quad |x| \geq 1 \quad x^3 - x^2 - 8 \geq 0 \\
 & -x^3 + 9 - x^2 + 1 \leq x^3 - x^2 - 8 \\
 & 16 - 2x^2 \leq 2x^3 \\
 & 16 - 2x^2 \leq 2x^3 \\
 & 10 \quad x^3 - x^2 - 8 \geq 0 \\
 & 4) |x| < \sqrt[3]{9} \quad |x| \geq 1 \quad x^3 - x^2 - 8 \leq 0 \\
 & -x^3 + 9 - x^2 + 1 \leq -x^3 + x^2 + 8 \\
 & 8 \leq 0 \\
 & 5) |x| < \sqrt[3]{9} \quad |x| \geq 1 \quad x^3 - x^2 - 8 \geq 0 \\
 & -x^3 + 9 - x^2 + 1 \leq x^3 - x^2 - 8 \\
 & 18 \leq 2x^3 \\
 & 9 \leq x^3 \\
 & |x| \geq \sqrt[3]{9} \\
 & 6) |x| < \sqrt[3]{9} \quad |x| \geq 1 \quad x^3 - x^2 - 8 \leq 0 \\
 & -x^3 + 9 - x^2 + 1 \leq -x^3 + x^2 + 8 \\
 & 2 \leq 2x^2 \\
 & |x| \geq 1 \quad \text{такое условие} \\
 & 7) (y-3)^2 - 4(y-3)(32y-10) = 0 \\
 & D = (11y-34)^2 - 4(y-3)(32y-10) = 0 \\
 & = 121y^2 - 448y + 1156 - 4(32y^2 - 10y - 96y + 30) \\
 & = 13y^2 - 248y + 1156 - 128y^2 + 10y + 384y - 120 \\
 & = -4y^2 + 90y - 5630 \\
 & 11y - 34 \pm \sqrt{-7y^2 + 10y - 567} \\
 & 2(y-1) \\
 & 2 + \frac{6+7\sqrt{2}}{7} - \frac{20-2\sqrt{2}}{7} - \frac{40-4\sqrt{2}}{14} \leq y \leq \frac{40+4\sqrt{2}}{14} - \frac{10+4\sqrt{2}}{7} \\
 & y = 3 + \text{линейное уравнение} \\
 & -7y^2 + 90y - 563 = 7 \cdot 9 + 40 - 3 - 56 = 126 - 56 - 63 = 60 - 49 = 11 \quad \text{решение: } (5; 3) \\
 & X = \frac{32 \cdot 3 - 101}{11 \cdot 3 - 34} = 101 - 32 \cdot 3 = 101 - 96 = 5 \quad \text{решение: } (5; 3)
 \end{aligned}$$



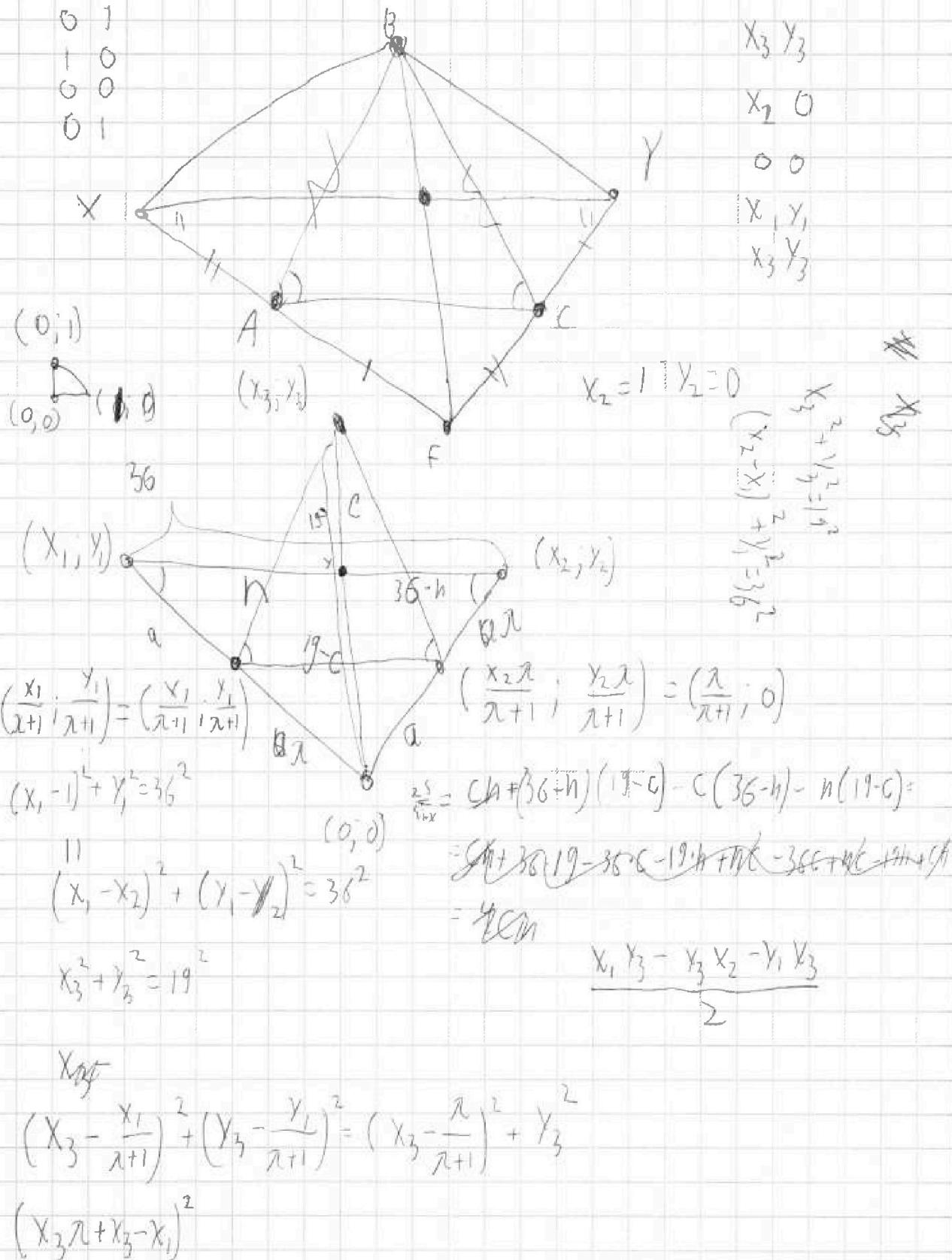
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| x | x | x | x | x | x | x |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a + \frac{4}{b} = b + \frac{4}{a} = c + \frac{4}{a}$$

$$ab=c$$

$$c = \frac{k}{ab}$$

$$\sqrt[3]{k^2 - 4ab}$$

$$a + \frac{4}{b} = b + \frac{4ab}{k} = \frac{k}{ab} + \frac{4}{a}$$

$$k(k^2 - 4 \cdot 49) = a^3(k^2 - 4 \cdot 49)$$

$$1) a + \frac{4}{b} = b + \frac{k}{ab} + \frac{4}{a}$$

$$a^3 = k$$

$$9\sqrt[3]{\frac{4ab}{6}} \geq 6k \Rightarrow 9ab \leq \sqrt[3]{\frac{4}{27} + \frac{4}{27}} = \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4}}{3} \Rightarrow \frac{9}{\sqrt[3]{a}} a + \frac{4}{b} = b + \frac{4ab}{a^3} = \frac{a^3}{ab} + \frac{4}{a}$$

$$a^2b + 4a = k + 7b - \frac{1}{a}$$

$$a + \frac{4}{b} = b + \frac{4b}{a^2} = \frac{a^2}{b} + \frac{4}{a}$$

$$b = \frac{k-4a}{a^2-4}$$

$$2) a^2 = 4$$

$$a^2 = \frac{k+7b-4a}{b} = 4 + \frac{k-4a}{b} \quad | \quad k = \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4^2} = ab + 7 = b^2 + \frac{4b^2}{a^2} = a^2 + \frac{4b^2}{a^2}$$

$$2) a + b + \frac{4ab}{k} = \frac{b}{ab} + \frac{4}{a} \quad | \quad b = \left(a - \frac{4}{a}\right)ab = b\left(a - \frac{4}{a}\right) = a^2 - 4$$

$$ab^2 + \frac{4a^2b^2}{k} = k + 7b \quad | \quad a=6 \quad | \quad ab=c \quad | \quad b^2\left(1 + \frac{4}{a^2}\right) = 4 + ab$$

$$ab^2k + 7a^2b^2 = k^2 + 7bk \quad | \quad \text{члены сгруппированы}$$

$$6^2(ab)(6^2(ak+4a^2)) = k^2 + 7bk$$

$$6^2(ak+4a^2) + \frac{7k-49a}{b} = k^2 + 2bk$$

$$c = -2\sqrt[3]{4}$$

$$a = \sqrt[3]{4}$$

$$6^2(ak+4a^2) + 7bk = k^2 + 7bk + 49ab$$

$$2b^2 = \sqrt[3]{6} + 4$$

$$6^2(ak+4a^2) = k^2 + 49ab$$

$$2b^2 - 4b - 4 = 0$$

$$6^2(ak+4a^2)(a^2-4)^2 = k^2(a^2-4)^2 + 49ab(a^2-4)^2$$

$$b = 7 + 4 \cdot 2 \cdot 4 = 34$$

$$(k-4a)(ak+4a^2) = k^2(a^2 - 14a^2 + 49) + 49a(k-4a)(a^2-4)$$

$$(k^2 - 14ak + 49a^2)(ak+4a^2) = a^4k^2 - 14a^2k^2 + 49k^2 + 49a(a^2k - 4ak - 7 \cdot 4a^2 + 49a^2)$$

$$ak^3 - 14a^2k^2 + 49a^3k + 49k^2 - 14 \cdot 49ak + 49^2a^2 = a^4k^2 - 14a^2k^2 + 49k^2 + 49a^2k - 49 \cdot 49ak - 7 \cdot 49a^2 + 49^2a^2$$

$$ak^3 = a^4k^2 - 7 \cdot 49a^2 + 4 \cdot 49ak \Rightarrow k^3 = a^3k^2 - 4 \cdot 49a^2 + 4 \cdot 49k$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!