МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12

1. [4 балла] Решите неравенство

$$\left|x^3-9\right|+\left|x^2-1\right| \leqslant \left|x^3-x^2-8\right|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a;b;c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $5^{360}\cdot 7^{90}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y-3)-x(11y-34)+32y-101=0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC. Прямые ED и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что площадь треугольника BCF в 25 раз больше площади треугольника DGF.

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y=-x^5+ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y=2x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a, b и c не все равны между собой, и при этом

$$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения abc.

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC $(AB=BC)$ вписан в окружность ω, а на дуге AC, не содержащей точку B, взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F. На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX=CF$ и $CY=AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF=19$, $XY=36$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~Если $|x|\geq\sqrt[3]{9}$, то 1-ый модуль раскрывается со знаком "+", иначе со знаком минус, $|x^3-9|+|x^2-1|\leq|x^3-x^2-8|$~~
~~Аналогично для II-ого модуля при $|x|\geq1$, рассмотрим несколько случаев~~
~~1) $|x|\geq\sqrt[3]{9}$, $|x|>1$, $x^3-x^2-8\geq0$; *: $x^3-9+x^2-1\leq x^3-x^2-8 \Rightarrow x^2\leq1$, но $|x|>1$, $x\in\varnothing$~~
~~2) $|x|\geq\sqrt[3]{9}$, $|x|>1$, $x^3-x^2-8\leq0$ $x^3-9+x^2-1\leq-x^3+x^2+8 \Rightarrow 2x^3\leq 0 \Rightarrow$~~

*: $|x^3-9|+|x^2-1|\leq|x^3-x^2-8|$

$x^3-9\geq0$ при $x\in[\sqrt[3]{9},+\infty)$, <0 при $x\in(-\infty,\sqrt[3]{9})$; $x^2-1\geq0$ при $x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$
<0 при $x\in(-1;1)$, рассмотрим несколько случаев: $(1<\sqrt[3]{9})$

1) $x\in[\sqrt[3]{9},+\infty)$ $x^3-x^2-8\geq0$ *: $x^3-9+x^2-1\leq x^3-x^2-8 \Rightarrow x^2\leq1$, но $x\geq\sqrt[3]{9}$, $x\in\varnothing$
2) $x\in[\sqrt[3]{9};+\infty)$ $x^3-x^2-8\leq0$ *: $x^3-9+x^2-1\leq-x^3+x^2+8 \Rightarrow x^3\leq9$, но $x\in[\sqrt[3]{9},+\infty)$
т.е. ед. подх. точка $x=\sqrt[3]{9}$: $x^3-x^2-8=1-\sqrt[3]{81}<0$ - подходит.
3) $x\in[1,\sqrt[3]{9}]$ $x^3-x^2-8\geq0$ *: $-x^3+9+x^2-1\leq x^3-x^2-8 \Rightarrow x^3-x^2-8\geq0$
4) $x\in[1,\sqrt[3]{9}]$ $x^3-x^2-8<0$ *: $-x^3+9+x^2-1\leq-x^3+x^2+8 \Rightarrow 8\leq8$, пусть $A=\left\{x \mid \begin{matrix} x\in[1,\sqrt[3]{9}] \\ x^3-x^2-8\geq0\end{matrix}\right\}$
тогда $x\in A$ - входит в ответ, но и $x\in[1,\sqrt[3]{9}]\setminus A$ входит в ответ по случаю 4, т.е.
$x\in[1;\sqrt[3]{9}]$ - входит в ответ
5) $x\in(-1,1)$ $x^3-x^2-8\geq0$ *: $-x^3+9-x^2+1\leq x^3-x^2-8$ $x^3\geq9$, но $x^3<1 \Rightarrow x\in\varnothing$
6) $x\in(-1;1)$ $x^3-x^2-8\leq0$ *: $-x^3+9-x^2+1\leq-x^3+x^2+8$ $x^2\geq1$, но $x\in(-1,1) \Rightarrow x\in\varnothing$
7) $x\in(-\infty,-1]$ $x^3-x^2-8<0$, ведь $x^3<0$ и $-x^2<0$; *: $-x^3+9+x^2-1\leq-x^3+x^2+8 \Rightarrow 8\leq8$ - верно

Ответ: $x\in(-\infty;-1]\cup[1,\sqrt[3]{9}]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

a, b, c, если a или b или $c \vdots p$, $\neq q$, p - простое, $p \neq 5$, $p \neq 7$, то $abc \vdots p$
но $abc = 5^{360} \cdot 7^{90}$, противоречие, т.е. $a = 5^{\alpha} 7^{\beta}$, $q = 5^{\gamma} 7^{\psi}$, где α, β - натуральные или 0, γ, ψ - целые (но $\gamma = \psi = 0$ неверно (знаменатель прогрессии $\neq 1$))
тогда $b = aq$ $c = aq^2$ $abc = a^3 q^3 = 5^{360} \cdot 7^{90} \Rightarrow aq = 5^{120} \cdot 7^{30} = 5^{\alpha+\gamma} 7^{\beta+\psi}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 120 \\ \beta + \psi = 30 \end{cases}$, т.к. b, c - натуральные

$c = aq^2 = 5^{\alpha+2\gamma} 7^{\beta+2\psi}$, т.е. $\begin{cases} \alpha+2\gamma \geq 0 \\ \beta+2\psi \geq 0 \end{cases}$

$b = aq = 5^{\alpha+\gamma} 7^{\beta+\psi}$

$\begin{cases} \alpha+\gamma \geq 0 \\ \beta+\psi \geq 0 \end{cases}$

~~такт~~
тогда $\gamma = 120 - \alpha$
$\psi = 30 - \beta$; $\begin{cases} 240 \geq \alpha \\ 60 \geq \beta \end{cases}$, для каждого α однозначно определен γ, для β - ψ, всего α принимает 241 значение, β - 61. Тогда всего комбинаций: $241 \cdot 61 - 1 = 14400$ $(q \neq 1)$

Ответ: 14400

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

пусть $y \neq 3$

$* = x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$, квадратное уравнение отн. x

$D = (11y-34)^2 - 4(y-3)(32y-101) = 121y^2 + 34^2 - 22\cdot 34y + (4y-12)(101-32y) =$

$= 121y^2 + 34^2 - 22\cdot 34y + 404y - 128y^2 - 1212 + 384y =$

$= 121y^2 + 1156 - 784y + 404y - 128y^2 - 1212 + 384y = -7y^2 + 4y - 56 \geq 0$

кв. уравнение отн. y:

$D = 16 - 4(-7)(-56)$

$= 16 - 28\cdot 56 < 0$, т.к.

если $*$ - квадратное отн. x, то решений нет, что верно при $y \neq 3$

$y = 3$; $0 = 32\cdot 3 - 101 - x(-1)$ $x = 101 - 32\cdot 3 = 101 - 96 = 5$

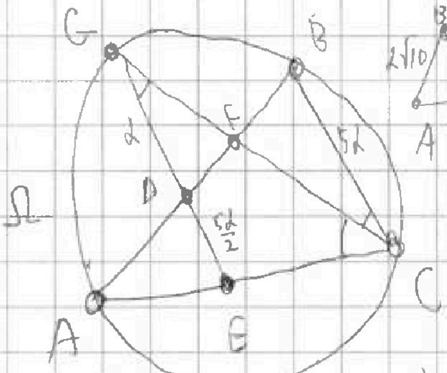
Ответ: $(5; 3)$

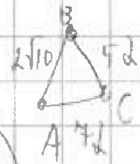
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ





1) DE – ср. линия $\triangle ABC$, т.е. $DE \parallel BC$ и

$\angle EGF = \angle GCB = \angle GCA \Rightarrow \triangle GEC$ – равноб. $\Rightarrow AC = 2GE = 2DE + 2DG =$
$= BC + 2DG$

2) т.к. $\angle GFD = \angle BFC$ и $\angle DGF = \angle FCB$

$\triangle GDF \sim \triangle BCF$, но $S_{\triangle BCF} = 25 S_{\triangle GDF}$

$\Rightarrow \frac{GD}{BC} = \sqrt{\frac{S_{\triangle GDF}}{S_{\triangle BCF}}} = \frac{1}{5}$, тогда $GD = \frac{BC}{5} = \lambda$ (пусть $BC = 5\lambda$)

тогда $AC = BC + 2DG = 5\lambda + 2\lambda = 7\lambda$

3) $DA = DB = \frac{AB}{2}$, Степень точки D отн. Ω: $\frac{5\lambda}{2}^2 = \frac{AB^2}{4} \Rightarrow AB = \lambda\sqrt{10}$

4) З теоремы косинусов: $10\lambda^2 = 25\lambda^2 + 49\lambda^2 - 2\cdot 5\cdot 7\lambda^2 \cos\angle C$

$49\lambda^2 = 10\lambda^2 + 25\lambda^2 - 2\cdot 5\lambda\cdot\lambda\sqrt{10}\cdot\cos\angle B$ | $10 = 74 - 70\cos\angle C \Rightarrow \cos\angle C = \frac{64}{70} = \frac{32}{35}$

$49 = 35 - 10\sqrt{10}\cos\angle B$

$\cos\angle B = -\frac{14}{10\sqrt{10}} = -\frac{7}{5\sqrt{10}}$ | $25\lambda^2 = \lambda^2 10 + 49\lambda^2 - 2\cdot 7\lambda\cdot\lambda\sqrt{10}\cdot\cos\angle A$

$25 = 59 - 14\sqrt{10}\cos\angle A \Rightarrow \cos\angle A = \frac{34}{14\sqrt{10}} = \frac{17}{7\sqrt{10}}$

Ответ: $\angle A = \arccos\left(\frac{17}{7\sqrt{10}}\right)$

$\angle B = \arccos\left(-\frac{7}{5\sqrt{10}}\right)$

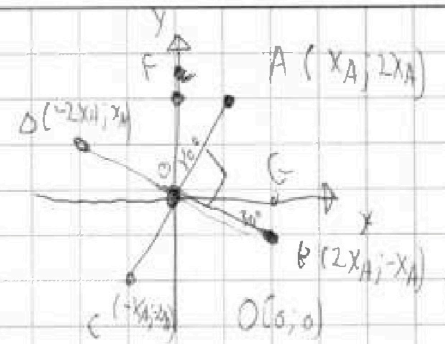
$\angle C = \arccos\left(\frac{32}{35}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$A(x_A;2x_A)$ Пусть точки квадрата ABCD A и C, лежат на диагонали, лежащей на диагонали $y=2x$, в частности $A(x_A;2x_A)$, т.к. $(0;0)$ - центр. квадрата $C(-x_A;-2x_A)$, пусть $F(0;\cancel{y(A)}\ 2x_A)$, тогда $\angle FOA=30^\circ$ $\left(FA=\frac{OF}{2}\right)$ и т.к. $\angle AOB=90^\circ \Rightarrow \angle BOG=30^\circ$

где $(B(x_B;y_B)$ а $G(x_B;0))$ тогда $BG=\frac{OG}{2}$, но $OA=OB$
$(x_B=2y_B)$

$\Rightarrow x_B=2x_A;\ y_B=-x_A$, т.к. O - центр. квадрата $D=(-x_B;-y_B)=(-2x_A;x_A)$

$A,B,C,D \in y=-x^5+ax$;

$$\begin{cases} 2x_A=-x_A^5+ax_A \\ -x_A=-32x_A^5+2ax_A \\ -2x_A=x_A^5-ax_A \\ x_A=32x_A^5-2ax_A \end{cases}$$

одно и то же; одно и то же

($x_A \neq 0$, т.к. иначе квадрата) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x_A^4=a-2 \\ 32x_A^4=2a+1 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x_A=\sqrt[4]{a-2} \\ 32a-64=2a+1 \end{cases}$$

$30a=65$

$a=\frac{65}{30}=\frac{13}{6}$

$x_A=\frac{1}{\sqrt[4]{6}}$

$\cancel{OA}\ OA=\sqrt{x_A^2+4x_A^2}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[4]{6}}$

$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=OA\sqrt{2}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt[4]{6}}=\sqrt{5}\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$

Ответ: $a=\frac{13}{6}$, сторона квадрата $\sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~Заметим~~: $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, если $a = b$, то $\underbrace{a + \frac{7}{a} = a + \frac{7}{c}}_{\text{или } a = c} = c + \frac{7}{a} \Rightarrow a = c$, что противоречит условию. Аналогично, если $b = c$, т.е. $a \neq b \neq c \neq a$.

Пусть $abc = k \neq 0$, тогда $c = \frac{k}{ab}$, подставим в данное.

$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7ab}{k} = \frac{k}{ab} + \frac{7}{a} \Rightarrow a + \frac{7}{b} = \frac{k}{ab} + \frac{7}{a} \Rightarrow a^2 b + 7a = k + 7b$

$\Rightarrow (a^2 - 7) b = k - 7a$ (*) и $a^2 = \frac{k + 7b - 7a}{b} = 7 + \frac{k - 7a}{b}$ (☆)

$b + \frac{7ab}{k} = \frac{k}{ab} + \frac{7}{a} \Rightarrow ab^2 + \frac{7a^2b^2}{k} = k + 7b \Rightarrow b^2\left(a + \frac{7a^2}{k}\right) = k + 7b \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~(подставим ☆)~~ $\cancel{b^2\left(a + \frac{49}{k}\right) + \frac{7}{b}}$ $\Rightarrow b^2 (ak + 7a^2) = k^2 + 7bk \Rightarrow$ (подставим ☆)

$\Rightarrow b^2\left(ak + 49 + \frac{7k - 49a}{b}\right) = k^2 + 7bk \Rightarrow b^2 (ak + 49) + b(7k - 49a) = k^2 + 7bk$

$\Rightarrow b^2 (ak + 49) = k^2 + 49ab \Rightarrow (a^2 - 7)^2 b^2 (ak + 49) = k^2 (a^2 - 7)^2 + (a^2 - 7)^2 49ab$

$\Rightarrow$ (подставим *) $(k - 7a)^2 (ak + 49) = k^2 (a^2 - 7)^2 + (a^2 - 7) 49a (k - 7a)$

$(k^2 + 49a^2 - 14ak)(ak + 49) = k^2 (a^4 + 49 - 14a^2) + 49a (a^2 k - 7k - 7a^3 + 49a)$

$ak^3 + 49a^3 k - 14a^2 k^2 + \cancel{49k^2} + 49^2 a^2 - 7 \cdot 2 \cdot 49ak = a^4 k^2 + \cancel{49k^2} - \cancel{14a^2k^2} + 49a^3 k - 49 \cdot 7ak - 49 \cdot 7a^4 + \cancel{49^2 a^2}$

$\Rightarrow ak^3 - 14a^2k^2 = a^4 k^2 + 49 \cdot 7ak - 49 \cdot 7a^4 \overset{(a \neq 0)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow a^3 (k^2 - 49 \cdot 7) = k (k^2 - 49 \cdot 7)$, т.е. либо $k^2 = 49 \cdot 7$, либо $a^3 = k$, но если так, то по (*) $(a^2 - 7) b = k - 7a = a(a^2 - 7)$, т.е. либо $a = b$ (что неверно), либо $a^2 = 7$, тогда $k^2 = a^6 = 7^3 = 49 \cdot 7$.

Причем $k = \sqrt{7^3}$ (максимальное) достигается, к примеру, если $a = \sqrt{7}$; $b = -\frac{\sqrt{7}}{2}$, $c = -2\sqrt{7}$

$k = abc = \sqrt{7} \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right) \cdot (-2\sqrt{7}) = \sqrt{7^3}$, а исходное равенство имеет вид:

$\sqrt{7} + \frac{7}{-\frac{\sqrt{7}}{2}} = -\frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{7}{-2\sqrt{7}} = -2\sqrt{7} + \frac{7}{\sqrt{7}} = -\sqrt{7}$.

Ответ: $\sqrt{7^3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

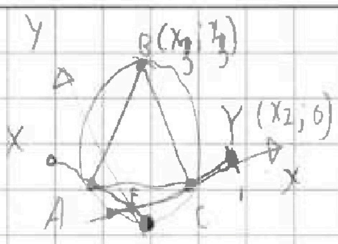
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

т.к. $XF = XA + AF = FC + CY = FY$, $\angle FXY = \angle XYF$; введем декартовые координаты, $F(0;0)$, $Y(x_2;0)$, $X(x_1;y_1)$, ~~тогда~~ пусть $\frac{CY}{FC} = \lambda$, тогда

$A\left(\frac{x_1}{\lambda+1}; \frac{y_1}{\lambda+1}\right)$, $XY = 36$; $C\left(\frac{x_2\lambda}{\lambda+1}; 0\right)$

$(x_2 - x_1)^2 + y_1^2 = 36^2$

$FB = 19$; $x_3^2 + y_3^2 = 19^2$, т.к. $\triangle ABC$ - равноб.



$$\left(x_3 - \frac{x_1}{\lambda+1}\right)^2 + \left(y_3 - \frac{y_1}{\lambda+1}\right)^2 = \left(x_3 - \frac{x_2\lambda}{\lambda+1}\right)^2 + y_3^2$$

по формуле Гаусса

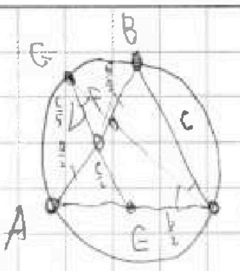
$$S = \frac{y_3 x_2 + y_1 x_3 - x_1 y_3}{2}$$

B	x_3	y_3
Y	x_2	0
F	0	0
X	x_1	y_1
B	x_3	y_3

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

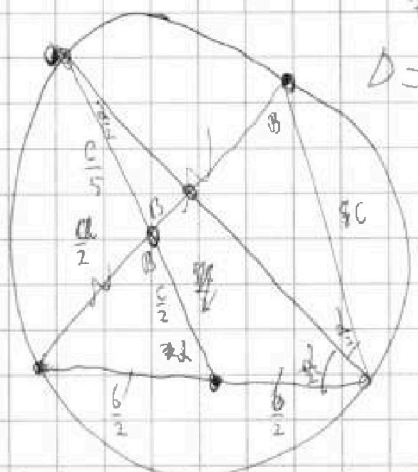
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$S_{\triangle BCF} = 25\, S_{\triangle DGF}$

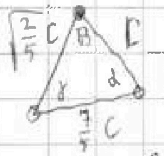
$\angle A\ \angle B\ \angle C$

IV



$7y^2 - 4y + 56 = 0$

$D = 16$

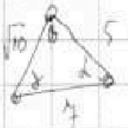


$\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{c}{5} \cdot \frac{c}{2}$

$a = c\sqrt{\frac{2}{5}}$

$b = c + \frac{2c}{5} = \frac{7c}{5}$ $\quad \frac{b}{2} = \frac{c}{5} + \frac{c}{2}$

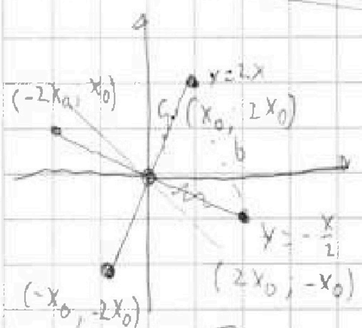
$\sqrt[4]{\frac{12}{6}} = \sqrt[4]{\frac{4}{6}} = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$



$10 = 25 + 49 - 2\cdot 5\cdot 7\cdot\cos\alpha = 74 - 70\cos\alpha$ $\quad \cos\alpha = \frac{64}{70} = \frac{32}{35}$

$49 = 25 + 10 - 2\cdot 5\cdot\sqrt{10}\cdot\cos\beta = 35 - 10\sqrt{10}\cos\beta$ $\quad \cos\beta = -\frac{14}{10\sqrt{10}} = -\frac{7}{5\sqrt{10}}$

$25 = 10 + 49 - 2\cdot\sqrt{10}\cdot 7\cdot\cos\gamma = 59 - 14\sqrt{10}\cos\gamma$ $\quad \cos\gamma = \frac{34}{14\sqrt{10}} = \frac{17}{7\sqrt{10}}$



$\begin{cases} 2x_0 = -x_0^5 + ax_0 \\ -x_0 = -32x_0^5 + 2ax_0 \\ 2x_0 = x_0^5 - ax_0 \\ x_0 = 32x_0^5 - 2ax_0 \end{cases}$

$\begin{cases} \cancel{x_0^4 = a - 2} \\ \cancel{32x_0^4 = 2a+1} \\ \cancel{x_0^4 = 2 - a} \\ \cancel{32x_0^4 = 2a+1} \end{cases}$

Ответ: $2\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[4]{6}}\sqrt{2}$.

V

$\begin{cases} x_0^4 = a - 2 \\ 32x_0^4 = 2a + 1 \end{cases}$ $\quad 2a + 1 = 32a - 64 \quad 30a = 65 \quad a = \frac{65}{30} = \frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}$

$x_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{6}}$; $\quad b = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[4]{6}}\sqrt{2}$

$c = x_0\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[4]{6}}$

$a \neq 0\ b \neq 0\ c \neq 0$ $\quad a \neq b$ или $b \neq c$ или $a \neq c$ $\quad \boxed{a \neq b \neq c}$

$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}$

$\Delta + \frac{7}{\Delta} = \Delta + \frac{7}{\Delta} = c + \frac{7}{\Delta}$

$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}$; $\quad a^2bc + 7ac = ab^2c + 7ab = abc^2 + 7bc$

$abc + 7c = b^2c + 7b = bc^2 + \frac{7bc}{a}$ $\quad a = b + \frac{7}{c} - \frac{7}{b}$

$7 = b^2 + 14\frac{b}{c} + \frac{49}{c^2} - 7 - \frac{49}{bc} + 7\frac{c}{b} - bc - 7 + \frac{7c}{b}$

$abc + 7a = a^2c + 7c = a^2c + \frac{7ac}{b}$ $\quad a = \frac{7}{b + \frac{7}{c} - c}$ $\quad = b^2 + \frac{49}{c^2} - \frac{49}{bc} - 14 - bc + 14\frac{c}{b} + 14\frac{b}{c}$

$a = 1 \quad b = c + 7 - \frac{7}{c} = \frac{7}{c+6}$

$1 + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + 7$ $\quad abc = k$

$abc + 7b = a^2b + 7a = ab^2 + \frac{7ab}{c}$ $\quad a + \frac{7}{b} = b + \frac{7ab}{k} \cdot \frac{k}{ab} + \frac{7}{a}$

$3abc + 7(a+b+c) = a^2b + ac^2 + b^2c + 7(a+b+c) = ab^2 + a^2c + bc^2 + 7\left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right)$

$a^2b + ac^2 + b^2c = ab\left(a + \frac{7}{b}\right) + ac\left(c + \frac{7}{a}\right) = ab\left(b + \frac{7}{c}\right) + ac\left(a + \frac{7}{b}\right) + bc\left(c + \frac{7}{a}\right) =$

$abc = \frac{a^2b + ac^2 + b^2c}{3}$ $\quad + bc\left(b + \frac{7}{c}\right) = \left(a + \frac{7}{b}\right)(ab + ac + bc)$

$|x^3-9|+|x^2-1| \le |x^3-x^2-8|$

Ответ: $x \in (-\infty,-1] \cup [1,\sqrt[3]{9}]$ I.

1) $|x| \ge \sqrt[3]{9}$ $\quad x^3-x^2-8 \ge 0$

$x^3-9+x^2-1 \le x^3-x^2-8$

$2x^2 \le 2 \quad x\in[-1,1]$ против.

2) $|x| \ge \sqrt[3]{9}$ $\quad x^3-x^2-8 \le 0$ $\quad \boxed{x=\sqrt[3]{9}}$ $\quad x\in(-\infty,-\sqrt[3]{9}]$

$x^3-9+x^2-1 \le -x^3+x^2+8$ $\quad 1-\sqrt[3]{81} \quad V\,0$

$2x^3 \le 18 \quad x \le \sqrt[3]{9}$ $\quad 1<\sqrt[3]{81}$

3) $|x|<\sqrt[3]{9}$ $\quad |x|\ge 1$ $\quad x^3-x^2-8 \ge 0$

$-x^3+9+x^2-1 \le x^3-x^2-8$

$16+2x^2 \le 2x^3$

$x^3-x^2-8 \ge 0$

$x \in (-\sqrt[3]{9},-1] \cup [1,\sqrt[3]{9}]$

4) $|x|<\sqrt[3]{9}$ $\quad |x|\ge 1$ $\quad x^3-x^2-8 \le 0$

$-x^3+9+x^2-1 \le -x^3+x^2+8$

$8 \le 8$

II.

5) $|x|<\sqrt[3]{9}$ $\quad |x|<1$ $\quad x^3-x^2-8 \ge 0$

$-x^3+9-x^2+1 \le x^3-x^2-8$

$18 \le 2x^3$

$9 \le x^3 \quad |x| \ge \sqrt[3]{9}$

6) $|x|<\sqrt[3]{9}$ $\quad |x|<1$ $\quad x^3-x^2-8 \le 0$

$-x^3+9-x^2+1 \le -x^3+x^2+8$

$2 \le 2x^2$

$|x|\ge 1$ противоречие.

$34\cdot 34=1156$, $34\cdot 22=748$, $241\cdot 61=14701$, $32\cdot 12=384$, $56\cdot 28=1568$, $1600-1568=32$

$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a}$

$a=b+\frac{7}{c}-\frac{7}{b}$

$b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{b+\frac{7}{c}-\frac{7}{b}}=c+\frac{7c}{bc+7-\frac{7c}{b}}$

$bc+7=c^2+\frac{c^2}{\frac{bc}{7}+1-\frac{c}{b}}$

$a;\,b;\,c$

$abc=5^{360}\cdot 7^{30}$

$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n}$ $\quad p_i \ne 5 \quad p_i \ne 7 \Rightarrow abc \; p_i \ne 5 \ne 7$

противоречие $\Rightarrow$ $a=5^{\alpha}7^{\beta}$; $q=5^{\gamma}7^{\psi}$

$abc=a(aq)(aq^2)=a^3q^3=5^{360}\cdot 7^{90}$

$aq=5^{120}\cdot 7^{30}=5^{\alpha+\gamma}7^{\beta+\psi}$

α,β — натуральные (или 0)

γ,ψ — целые

$\alpha+2\gamma \ge 0$

$\beta+2\psi \ge 0$

$\alpha+\gamma=120$ $\quad 2\gamma=240-2\alpha$

$\beta+\psi=30$ $\quad 2\psi=60-2\beta$

$240 \ge \alpha$ $\quad (\alpha;\gamma)$ ровно 241

$60 \ge \beta$ $\quad (\beta;\psi)$ ровно 61

всего $241\cdot 61-1$ комбинация.

$x^2(y-3)-x(11y-34)+32y-101=0$

$D=(11y-34)^2-4(y-3)(32y-101)=$

$=121y^2-748y+1156-4(32y^2-101y-96y+303)=$

$=121y^2-748y+1156-128y^2+404y+384y-1212=$

$=-7y^2+40y-56 \ge 0$

$\frac{11y-34\pm\sqrt{-7y^2+40y-56}}{2(y-3)}$

$D=1600-1568=32$

$2+\frac{6-2\sqrt{2}}{7}=\frac{20-2\sqrt{2}}{7}=\frac{40-4\sqrt{2}}{14} \le y \le \frac{40+4\sqrt{2}}{14}=\frac{20+2\sqrt{2}}{7}=2+\frac{6+2\sqrt{2}}{7}=3+\frac{2\sqrt{2}-1}{7}<4$

$y=3$ + линейное

$-7y^2+40y-56=-7\cdot 9+40\cdot 3-56=120-56-63=120-119=1$

Ответ: $(5;3)$

$x=\frac{32\cdot 3-101}{11\cdot 3-34}=101-32\cdot 3=101-96=5$ III

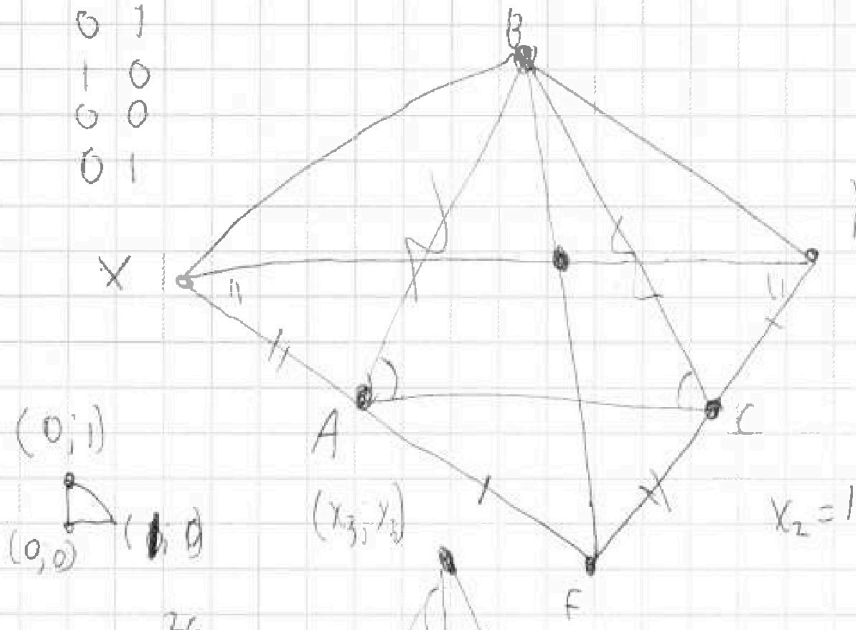
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
x	x	x	x	x	x	x

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

0 1
1 0
0 0
0 1

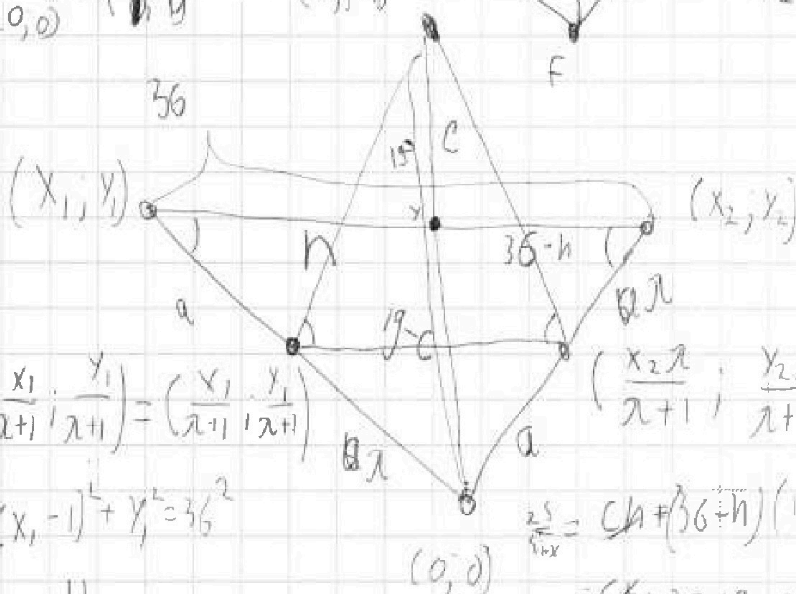
$x_3\ y_3$
$x_2\ 0$
$0\ 0$
$x_1\ y_1$
$x_3\ y_3$



$x_2=1 \quad y_2=0$

$x_3^2+y_3^2=19^2$

$(x_2-x_1)^2+y_1^2=36^2$



$\left(\frac{x_1}{\lambda+1};\frac{y_1}{\lambda+1}\right)=\left(\frac{x_1}{\lambda+1};\frac{y_1}{\lambda+1}\right)$

$\left(\frac{x_2\lambda}{\lambda+1};\frac{y_2\lambda}{\lambda+1}\right)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+1};0\right)$

$(x_1-1)^2+y_1^2=36^2$

$\frac{2S}{\sin x}=Ch+(36-h)(19-C)-C(36-h)-h(19-C)=$

$=\cancel{Ch+36\cdot19-36C-19h+hC-36C+hC-19h+Ch}$

$=4Ch$

||

$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=36^2$

$x_3^2+y_3^2=19^2$

$\frac{x_1y_3-y_3x_2-y_1x_3}{2}$

$\cancel{x_{nt}}$

$\left(x_3-\frac{x_1}{\lambda+1}\right)^2+\left(y_3-\frac{y_1}{\lambda+1}\right)^2=\left(x_3-\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^2+y_3^2$

$(x_3\lambda+x_3-x_1)^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
x	x	x	x	x	x	x

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a}$ $abc=k$ $c=\frac{k}{ab}$ 1) $\boxed{k^2=7^7}$

$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7ab}{k}=\frac{k}{ab}+\frac{7}{a}$

$k(k^2-7\cdot 49)=a^3(k^2-7\cdot 49)$

1) $a+\frac{7}{b}=\frac{k}{ab}+\frac{7}{a}$ $a^3=k$

$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7ab}{a^3}=\frac{a^3}{ab}+\frac{7}{a}$

$\sqrt{7}+\frac{7}{-\frac{\sqrt{7}}{2}}=-\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{7}{-2\sqrt{7}}$

$a^2b+7a=k+7b$

a тогда

$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7b}{a^2}=\frac{a^2}{b}+\frac{7}{a}$

$b=\frac{k-7a}{a^2-7}$

2) $a^2=7$

$k=(\sqrt{7})^3=\sqrt{7^3}$

$ab+7=b^2+\frac{7b^2}{a^2}=a^2+\frac{7}{a}b$

$a^2=\frac{k+7b-7a}{b}=7+\frac{k-7a}{b}$

2) $b+\frac{7ab}{k}=\frac{k}{ab}+\frac{7}{a}$ $(a^2-7)\frac{1}{a}b=b\left(a-\frac{7}{a}\right)=a^2-7$

$a=b$

3) $a=b=c$

противоречие

$b^2\left(1+\frac{7}{a^2}\right)=7+ab$

$ab^2+\frac{7a^2b^2}{k}=k+7b$

$ab^2k+7a^2b^2=k^2+7bk$

Р: $k=\sqrt{7^3}$

$b^2(ak+7a^2)=k^2+7bk$

$a=\sqrt{7}$

$b^2\left(ak+49+\frac{7k-49a}{b}\right)=k^2+7bk$ $c=-2\sqrt{7}$

$a+\frac{7}{b}=2b=\frac{7}{b}+\frac{7}{a}$

$b^2(ak+49)+7bk=k^2+7bk+49ab$

$2b^2=\sqrt{7}b+7$

$2b^2-\sqrt{7}b-7=0$

$2b^2=ab+7$

$b^2(ak+49)=k^2+49ab$

$b=7+4\cdot 2\cdot 7=9\cdot 7$

$2b^2-ab-7=0$

$b=\frac{\sqrt{7}\pm 3\sqrt{7}}{4}=-\frac{\sqrt{7}}{2}$ $D=a^2+4\cdot 2\cdot 7$

$b^2(ak+49)(a^2-7)^2=k^2(a^2-7)^2+49ab(a^2-7)^2$

$(k-7a)^2(ak+49)=k^2(a^4-14a^2+49)+49a(k-7a)(a^2-7)$

$(k^2-14ak+49a^2)(ak+49)=a^4k^2-14a^2k^2+49k^2+49a(a^2k-7k-7a^3+49a)$

$ak^3-14a^2k^2+49a^3k+49k^2-14\cdot 49ak+49a^2=a^4k^2-14a^2k^2+49k^2+49a^3k-49\cdot 7ak-7\cdot 49a^4+49a^2$

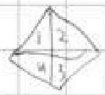
$ak^3=a^4k^2-7\cdot 49a^4+7\cdot 49ak \Rightarrow k^3=a^3k^2-7\cdot 49a^3+7\cdot 49k$

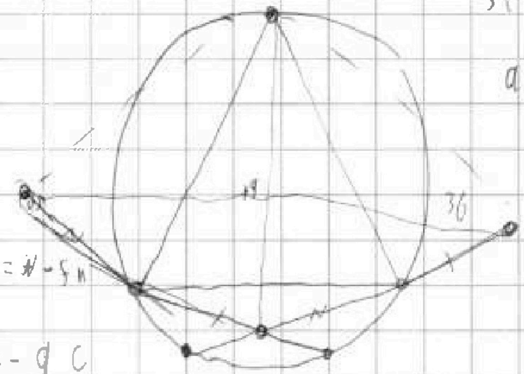
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

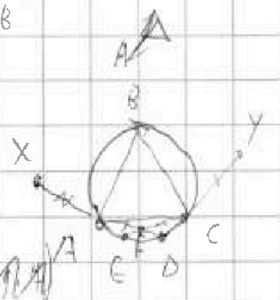
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$S(BXFY) = 8$







$a^3(k^2 - 49\cdot 7) = k^3 - 7\cdot 49k$

$a^3 = k$

$19 - c$

$-19n + cn = ? - 5n$

$36 - n$

$-36c + cn = -9c$

$k^3 = a^3k^2 - 49\cdot 7a^3 + 7\cdot 49k$

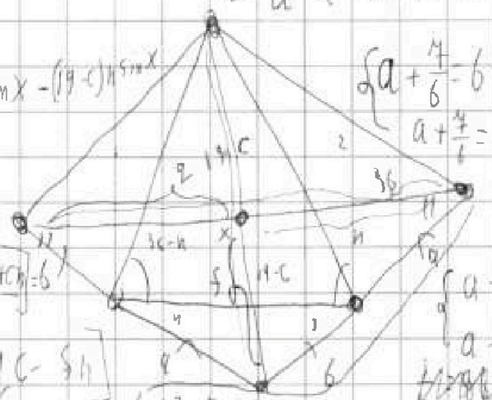
$2S = \sin(x)cn + \sin(x)(19-c)(36-n) - 19(36-n)\sin x - (19-c)n\sin x$

$= \sin(x)[cn + (19-c)(36-n) - 19(36-n) - (19-c)n] =$

$= \sin(x)[cn + 19\cdot 36 - 19n + cn - 36c - 19\cdot 36 + 19n - 19n + cn] =$

$= \sin(x)[3cn - 19n - 36c] = \sin(x)[cn - 9c - 5n]$

$\Rightarrow S = \boxed{2} + \boxed{1} + \boxed{3}$



$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{?}b$

$a + \frac{7}{b} = \frac{1}{b} + \frac{7}{a}$

$\begin{cases} a + \frac{7}{b} = 8b \\ a + \frac{?}{b} = \frac{7}{a} \end{cases}$

$b + \frac{7ab}{k} = \frac{k}{ab} + \frac{7}{a}$

$a\cdot k + \frac{7}{b}k = bk + 7ab$

$a^3b + 7a^2 = ka + 7ab$

$k = \frac{7ab}{a + \frac{7}{b} - b}$

$\begin{cases} a + \frac{7}{b} = b + \frac{7ab}{k} \\ a + \frac{7}{b} = \frac{k}{ab} + \frac{7}{a} \end{cases}$

$ab^2k + 7a^2b^2 = k^2 + 7bk$

$b = \frac{ka - 7a^2}{a^3 - 7a} = \frac{k - 7a}{a^2 - 7}$

$b^2(ka + 7a^2) = k^2 + 7bk$

$b^2\left(ka + \frac{7k - 49a}{b} + 49\right) = k^2 + 7bk$

$a^2 = \frac{k - 7a}{b} + 7$

$ak + \frac{7}{b}k = b + 7ab$

$a^3b + 7a^2 = ka + 7ab$

$b^2(ka + 49) = k^2 + 7k + 7ab$

$b^2(k+7) - 7kb - k^2 = 0$

$\frac{7}{b}k = b + 14ab - a^3b - 7a^2$

$(k - 7a^2)^2(ka + 49) = k^2(a^2 - 7)^2 + 49a(a^2 - 7)(k - 7a)$

$k = \frac{b^2 + 14ab^2 - a^3b^2 - 7a^2b}{7}$

$(k^2 + 49a^2 - 14ak)(ka + 49) = k^2(a^4 + 49 - 14a^2) + 49a(a^3k - 7a^4 - 7k + 49a)$

$a = 1$

$k^3a + 49a^3k - 14a^2k^2 + 49k^2 + 49^2a^2 - 14\cdot 49ak = a^4k^2 + 49k^2 - 14a^2k^2 - 49\cdot 7a^4 + 49a^4k$

$k^3a - 14\cdot 49ak = a^4k^2 - 49\cdot 7a^4 - 49\cdot 7ak$

$k = \frac{b^2 + 14b^2 - b^2 - 7b}{7} = \frac{14b^2 - 7b}{7} = 2b^2 - b$

$k^3a = a^4k^2 - 49\cdot 7a^4 + 7\cdot 49ak$