



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Решите уравнение

$$4 \operatorname{tg} 2x + 1 + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $3^{240} \cdot 7^{240}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2(x+2) - (x+1) \ln(4x+8) + (\ln 4) \ln(x+2) \geq 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -2x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 5x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC . Лучи DE и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{11}}$.

6. [5 баллов] Числа x , y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} = z^3 + \frac{10}{x^3}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения xyz .

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{10}$, $AD = DC = 2$, $AC = 2\sqrt{2}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB , SBC и ребра SD .

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!



$$4 \lg 2x + 1 + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0;$$

$$\frac{4 \cdot 2 \lg x}{1 - \lg^2 x} + 1 + \frac{\operatorname{ctg} x \cdot 1 - 1}{\operatorname{ctg} x + 1} = 0;$$

$$\frac{8 \lg x}{1 - \lg^2 x} + 1 + \frac{\operatorname{ctg} x - 1}{\operatorname{ctg} x + 1} = 0;$$

Положим $\lg x = t$. Тогда $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{t}$.
(Вспомогательные переменные $\lg x = 0$)

$$\frac{8t}{1-t^2} + 1 + \frac{\frac{1}{t} - 1}{\frac{1}{t} + 1} = 0;$$

$$\frac{8t + 1 - t^2}{1 - t^2} = \frac{1 - \frac{1}{t}}{\frac{1}{t} + 1};$$

$$8 + \frac{1}{t} - t + 8t + 1 - t^2 = 1 - \frac{1}{t} - t^2 + t;$$

$$8t + 8 + \frac{2}{t} = 0; \quad (t \neq 0, \text{ т.к. } t \neq 0).$$

$$8t^2 + 8t + 2 = 0;$$

$$3t^2 + 4t + 1 = 0;$$

$$\frac{D}{4} = 4 - 3 = 1 > 0 \Rightarrow 2 \text{ корня}$$

$$t_1 = \frac{-2-1}{3} = -1 \text{ не подходит по О.Д.З.}$$

$$t_2 = \frac{-2+1}{3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \lg x = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{3} \right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Сделаем проверку. $\lg x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \operatorname{ctg} x = -3$

$$4 \lg 2x + 1 + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{4 \cdot 2 \lg x}{1 - \lg^2 x} + 1 + \frac{\operatorname{ctg} x - 1}{\operatorname{ctg} x + 1} = -\frac{8}{3} \cdot \frac{9}{8} + 1 + \frac{(-3) - 1}{(-3) + 1} = -3 + 1 + 2 = 0. \quad \textcircled{V}$$

Ответ: $x = \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{3} \right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$\text{О.Д.З.: } \cos 2x \neq 0 \Rightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \frac{\pi}{4} \neq \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$\Rightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Из этого } \Rightarrow \lg x \neq \pm 1$$

$$\text{Если } \lg x = 0, \text{ то } x = \pi k, k \in \mathbb{Z}, \text{ тогда:}$$

$$4 \lg 2\pi k + 1 + \operatorname{ctg} \left(\pi k + \frac{\pi}{4} \right) \neq 0;$$

$$4 \cdot 0 + 1 + 1 \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lg x \neq 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Поря QR-кода недопустима!



~2) Пусть q - знаменатель прогрессии $\Rightarrow q \neq 1$.

Тогда $b = aq$, $c = bq = aq^2 \Rightarrow abc = a^3 \cdot q^3$.

По условию $abc = 3^{240} \cdot 7^{240} \Rightarrow a^3 \cdot q^3 = 3^{240} \cdot 7^{240} \Rightarrow$
 $\Rightarrow aq = 3^{80} \cdot 7^{80}$, $aq = b \Rightarrow b = 3^{80} \cdot 7^{80}$.

Заметим, что $q \in \mathbb{Q}$, т.к. $c \in \mathbb{Z}$ по усл-ю и
 $c = 3^{80} \cdot 7^{80} \cdot q$. Тогда $q = \frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$,
 $|m|$ и n взаимно просты.

Тогда $a = \frac{b}{q} = \frac{3^{80} \cdot 7^{80} \cdot n}{m}$, $c = bq = \frac{3^{80} \cdot 7^{80} \cdot m}{n} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 3^{80} \cdot 7^{80} : |m|$ и $3^{80} \cdot 7^{80} : n \Rightarrow$ имеем несколько вариантов

- для $\frac{m}{n}$:
- 1) $\frac{m}{n} = \pm 3^\alpha \cdot 7^\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \alpha, \beta \leq 81$, но
кроме $\alpha = \beta = 0$
 - 2) $\frac{m}{n} = \pm \frac{1}{3^\alpha \cdot 7^\beta}$
 - 3) $\frac{m}{n} = \pm \frac{3^\gamma \cdot 7^\delta}{7^{80}}$, $\gamma, \delta \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \gamma, \delta \leq 81$
 - 4) $\frac{m}{n} = \pm \frac{7^\delta}{3^\gamma}$

Для 1) кол-во способов выбрать α и $\beta = 82 \cdot 82 - 1$ (исключаем $\alpha = \beta = 1$).

т.к. m может быть < 0 , получаем кол-во различных

$\frac{m}{n} = 2(82 \cdot 82 - 1)$ (для каждого из них $b = 3^{80} \cdot 7^{80} \Rightarrow$
 $a = \frac{b}{q}$ и $c = bq$ различны $\Rightarrow$ различные a и $c \Rightarrow$ различные
третки чисел)

Для 2), очевидно, столько же вариантов, т.к.
во 2)-м случае мы берем обратные q из 1)-го
случая. (По сути, в 1) возрастающая прогр-я,
здесь - убывающая)

Для 3) вариантов $(81 \cdot 81) \cdot 2$, для 4) то же самое
только не. Тогда суммарно $4(82 \cdot 82 - 1) + 4 \cdot 81 \cdot 81 =$
 $= 4 \cdot (82^2 + 81^2 - 1) = 4 \cdot (6724 + 6560) = 4 \cdot 13284 = 53136$

Ответ: 53136.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3. $\ln^2(x+2) - (x+1) \cdot \ln(4x+8) + \ln 4 \cdot \ln(x+2) \geq 0$; О.О.З.: $x > -2$

$\ln^2(x+2) - (x+1) \cdot \ln 4 - (x+1) \cdot \ln(x+2) + \ln 4 \cdot \ln(x+2) \geq 0$;

$(\ln(x+2) - (x+1))(\ln(x+2) + \ln 4) \geq 0$;

$\ln(4x+8) \cdot (\ln(x+2) - (x+1)) \geq 0$;

↑

$\begin{cases} \ln(4x+8) = 0 \\ \ln(x+2) - (x+1) = 0 \\ \ln(4x+8) > 0 \\ \ln(x+2) - (x+1) > 0 \\ \ln(4x+8) < 0 \\ \ln(x+2) - (x+1) < 0 \end{cases}$	$\downarrow \ln(4x+8) = 0 \Rightarrow 4x+8=1 \Rightarrow 4x=-7$ $x = -1,75$ $\text{для } x \in (-2; -1,75) \ln(4x+8) < 0$, $\text{при } x = -1,75 \ln(4x+8) = 0$, $\text{при } x \in (-1,75; +\infty) \ln(4x+8) > 0$
---	--

↑ $\ln(x+2) - (x+1) = 0$;

$\ln(x+2) = (x+1)$. Рассмотрим

кр-ли этих ф-й

$y_1 = (x+1)$

$y_2 = \ln(x+2)$

Иная точка $(-1; 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ есть решение $x = -1$

$y_2(0) < y_1(0) \Rightarrow$ есть еще другое
пересечение, т.е. $x_2 \neq -1$ и x_2 корень,
то $x_2 \in (-2; 0)$.

Тогда возьмем $\exists y, \forall x$ или

$y_2 \geq y_1$, т.е. $\ln(x_2+2) \geq (x_2+1)$

$\Rightarrow e^{x_2+1} \leq x_2+2$

при $x_2 \in (-2; -1)$

$e^{x_2+1} \in (e^{-1}; 1)$, $x_2+2 \in (0; 1)$

$y_1' = \frac{1}{x+2}$

Тогда получим ур-е касательной

в той же с коорд $x = -1$ ур-е кас-й $y = x+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ явл-е касательной для $y_2 \Rightarrow$ только один

корень $x = -1$

$\ln(4x+8)$	-	+	+
$\ln(x+2)-(x+1)$	-	-	-



Ответ: $x \in (-2; -1,75] \cup [-1; +\infty)$

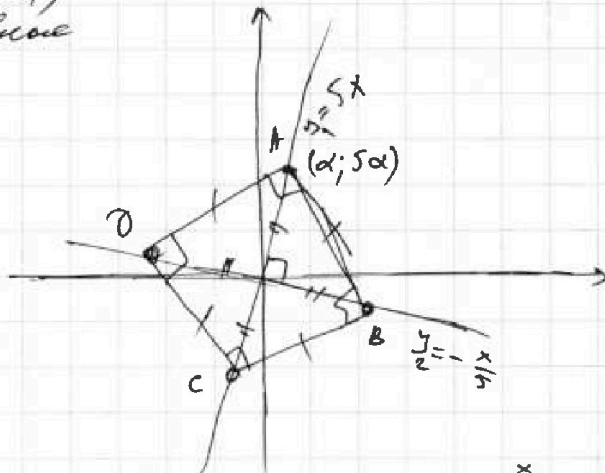
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Диагонали кв-га $\perp$ -ы, равны,
делятся точкой O на равные
отрезки.

Из перпендикулярности
второй диагонали линии
на $y = -\frac{x}{5}$

Пусть вершина квадрата
в I коорд. четверти
имет коорд-ты $(\alpha; 5\alpha)$,
(т.к. $\in y = 5x$)



$C(-\alpha; -5\alpha)$ из симметрии ф-л $y = 5x$ и $y = -\frac{x}{5}$
относительно начала координат.
(четет. ф-ии); $B(5\alpha; \alpha)$, $D(-5\alpha; \alpha)$.

Тогда для y_1 : $-2\alpha^3 - \alpha\alpha = 5\alpha$
 для y_2 : $-2(5\alpha)^3 - \alpha \cdot 5\alpha = -\alpha$

$$\begin{cases} -2\alpha^3 - \alpha\alpha = 5\alpha & (-5) \\ -250\alpha^3 - 5\alpha\alpha = -\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10\alpha^3 + 5\alpha\alpha = -25\alpha \\ -250\alpha^3 - 5\alpha\alpha = -\alpha \end{cases} +$$

$$\begin{aligned} -240\alpha^3 &= -26\alpha; \alpha \neq 0, \text{ иначе} \\ -240\alpha^2 &= -26 & \text{квадрат верха} \\ & & \text{падает в} \\ & & \text{точку } (0;0) \\ \alpha &= \sqrt{\frac{26}{240}} = \sqrt{\frac{13}{120}} & \text{реш } (\alpha; \alpha) \end{aligned}$$

Подставим $\alpha = \sqrt{\frac{13}{120}}$ в I ур-е

$$-2\left(\sqrt{\frac{13}{120}}\right)^3 - \alpha \sqrt{\frac{13}{60}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{13}{120}}$$

$$-\frac{2 \cdot 26^{13}}{120 \cdot 60} - \alpha = 5 \Rightarrow \alpha = -\frac{313}{60}$$

Проверим, подставив в II ур-е:

$$-250 \cdot \left(\sqrt{\frac{13}{120}}\right)^3 + \frac{5 \cdot 313}{60} \cdot \sqrt{\frac{13}{120}} = -\sqrt{\frac{13}{120}}$$

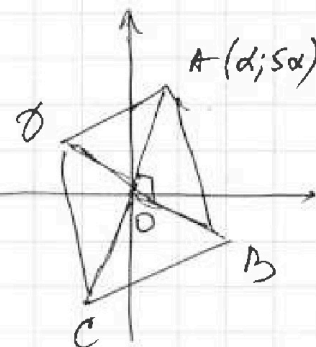
$$-\frac{250 \cdot 13}{120 \cdot 60} + \frac{5 \cdot 313}{60} = -1$$

$$-1 = -1 \quad \text{Верно}$$

$$S_{\text{кв}} = \frac{\alpha^2}{2}; \quad OA = \sqrt{\alpha^2 + 25\alpha^2} = \alpha\sqrt{26} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\text{кв}} = 52\alpha^2 = \frac{52 \cdot 13}{120} = \frac{169}{30}$$

Ответ: $\alpha = -\frac{313}{60}$, $S_{\text{кв}} = \frac{169}{30}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} = z^3 + \frac{10}{x^3}$$

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = z^3 + \frac{10}{x^3} \Rightarrow I. x^3 - z^3 = \frac{10(y^3 - x^3)}{x^3 y^3}$$

$$y^3 + \frac{10}{z^3} = x^3 + \frac{10}{y^3} \Rightarrow II. y^3 - x^3 = \frac{10(z^3 - y^3)}{z^3 y^3}$$

$$z^3 + \frac{10}{x^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} \Rightarrow III. z^3 - y^3 = \frac{10(x^3 - z^3)}{x^3 z^3}$$

Пусть $x \neq z$:

$$x^3 - z^3 = \frac{10 \cdot 10(z^3 - y^3)}{x^3 \cdot y^3 \cdot z^3 \cdot y^3} = \frac{1000(x^3 - z^3)}{x^6 \cdot y^6 \cdot z^6}$$

то числ. и все
знамен. равны
и/или сдвиги $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ хотя бы одно
из этих двух
выраж. $\neq 0$

Тогда $x^3 - z^3 \neq 0 \Rightarrow (:(x^3 - z^3)) \Rightarrow 1 = \frac{1000}{x^6 \cdot y^6 \cdot z^6} \Rightarrow x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = 10$

тогда
 $xyz = \pm \sqrt{10} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \max \text{ знат. } xyz = \sqrt{10}$

(Если $x = z$, тогда по усл. $y \neq x, y \neq z \Rightarrow$
 $\Rightarrow z^3 - y^3 \neq 0$.

$$z^3 - y^3 = \frac{10(x^3 - z^3)}{x^3 \cdot z^3} = \frac{100(y^3 - x^3)}{x^6 \cdot z^3 \cdot y^3} = \frac{1000(z^3 - y^3)}{(x^6 \cdot y^6 \cdot z^6)}$$

$1000 = x^6 \cdot y^6 \cdot z^6$. Тогда получим $xyz = \pm \sqrt{10}$

Order: $\sqrt{10}$.



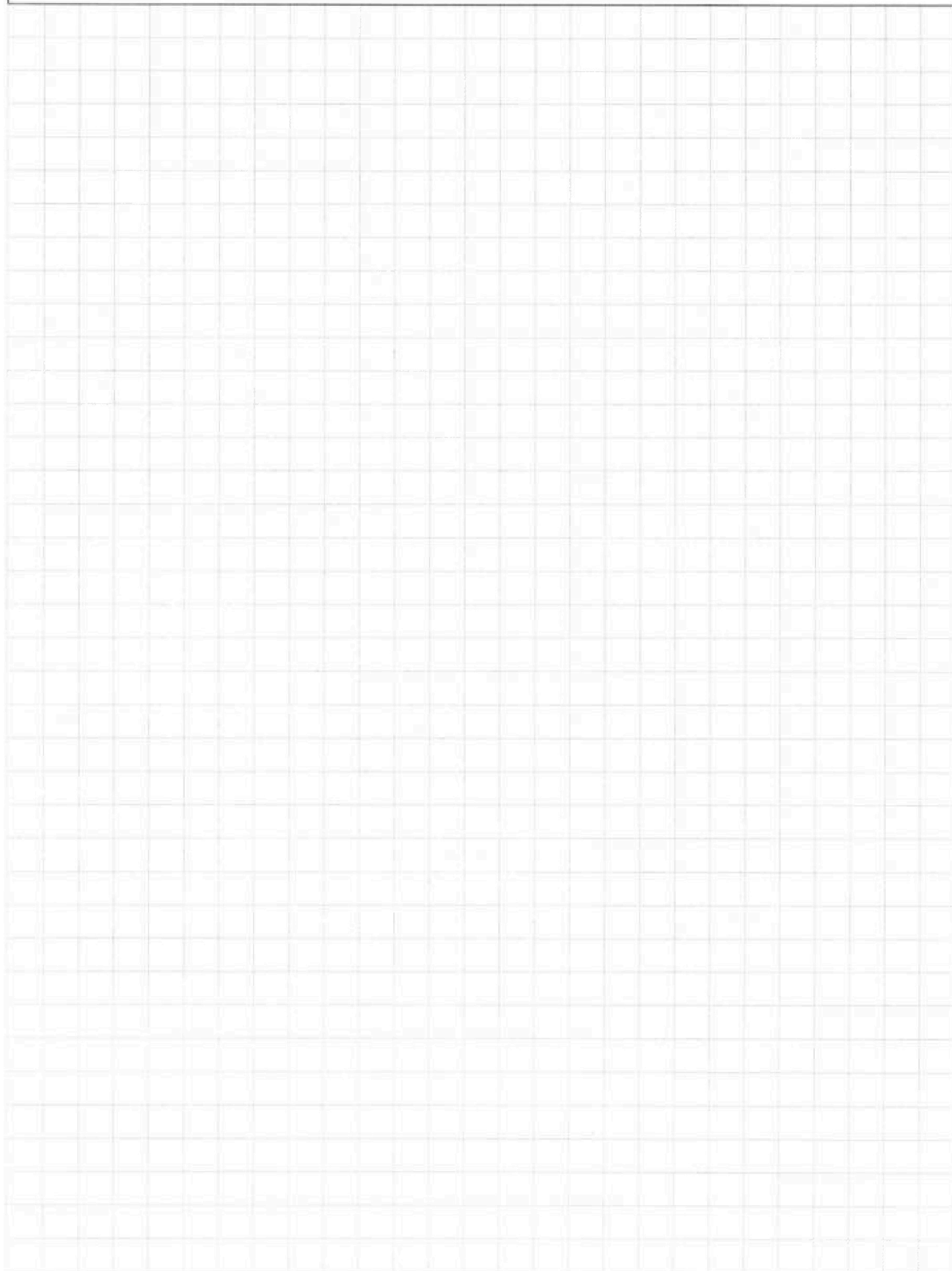
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

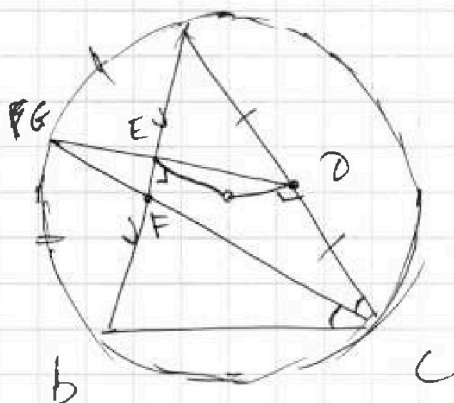
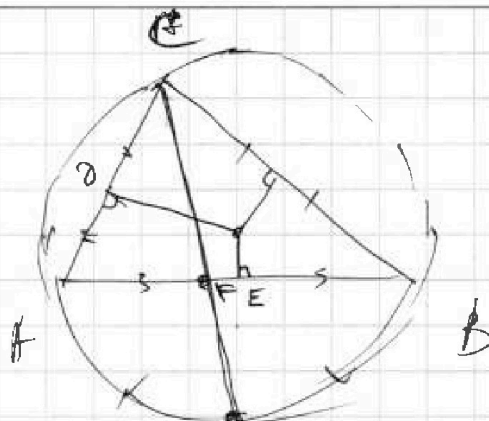
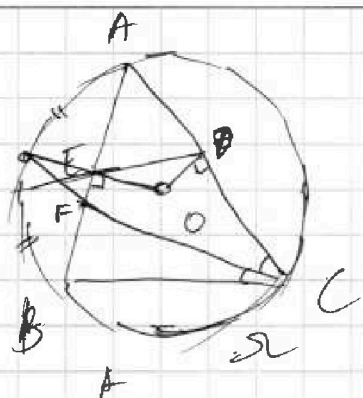
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

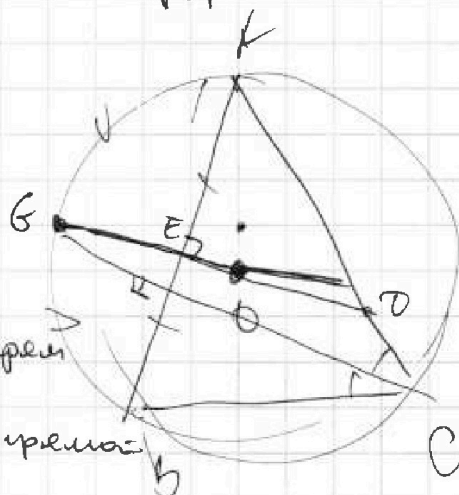
МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Поря QR-кода недопустима!

5.)



$$\frac{EF}{DF} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$$



G, E, D — одна прямая

G, E, O — одна прямая

D, E, G — одна прямая

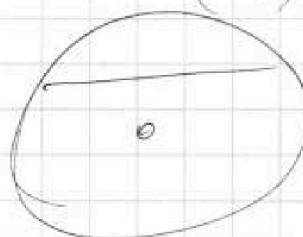
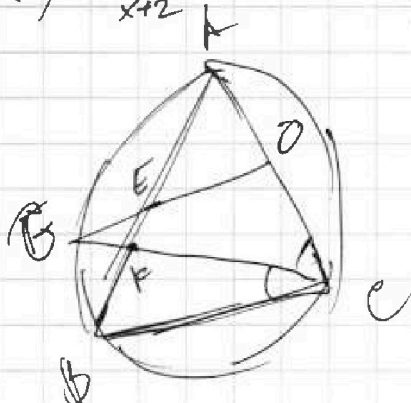
G, E, O — одна прямая

$$f(x) = \ln(x+2)$$

(-1)

$$f'(x) = \frac{1}{x+2}$$

~~$$f(x) = \ln(x+2) \quad f'(x) = \frac{1}{x+2}$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Итого $4 \cdot 3 + 10 + 12 = 34$

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} = z^3 + \frac{10}{x^3}$$

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = z^3 + \frac{10}{x^3}$$

$$z^3 - x^3 = \frac{10}{y^3} - \frac{10}{x^3}$$

$$x^3 - z^3 = \frac{10}{x^3} - \frac{10}{y^3}$$

$$x^3 - z^3 = \frac{10(y^3 - x^3)}{x^3 y^3}$$

$$y^3 - x^3 = \frac{10(z^3 - y^3)}{y^3 z^3}$$

$$x^3 - z^3 = \frac{10 \cdot 10 (z^3 - y^3)}{y^3 \cdot z^3 \cdot x^3 \cdot y^3}$$

$$z^3 - y^3 = \frac{10(x^3 - z^3)}{x^3 \cdot z^3}$$

$$x^3 \cdot z^3 = \frac{1000(x^3 - z^3)}{x^6 \cdot y^6 \cdot z^6}$$

$$1 = \frac{1000}{x^6 \cdot y^6 \cdot z^6}$$

$$x^6 \cdot y^6 \cdot z^6 = 1000$$

$$x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = 10$$

$$xyz = \pm \sqrt{10} \Rightarrow xyz_{\max} = \sqrt{10}$$

$$x=1, z=1, y=\sqrt{10}$$

$$1 + \frac{10}{10\sqrt{10}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{10 + \sqrt{10}}{10}$$

$$10\sqrt{10} + 10$$

$$xyz = \sqrt{10}$$

$$x=z=\frac{\sqrt[6]{10}}{y} = \sqrt[6]{10}$$

$$(-\sqrt[6]{10})^3 + \frac{10}{\sqrt[6]{10}} = \sqrt{10} \mp \sqrt{10} = 0$$

$$\sqrt{10} - \frac{10}{\sqrt{10}} = 0$$

$$-\sqrt{10} \mp -\sqrt{10} =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

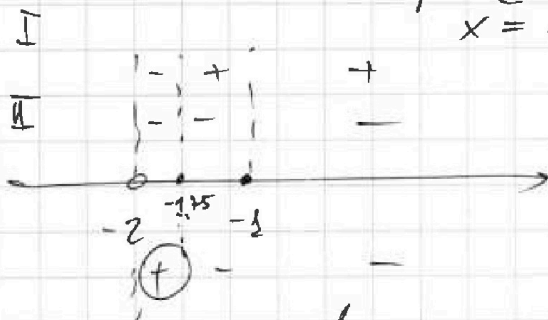
МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



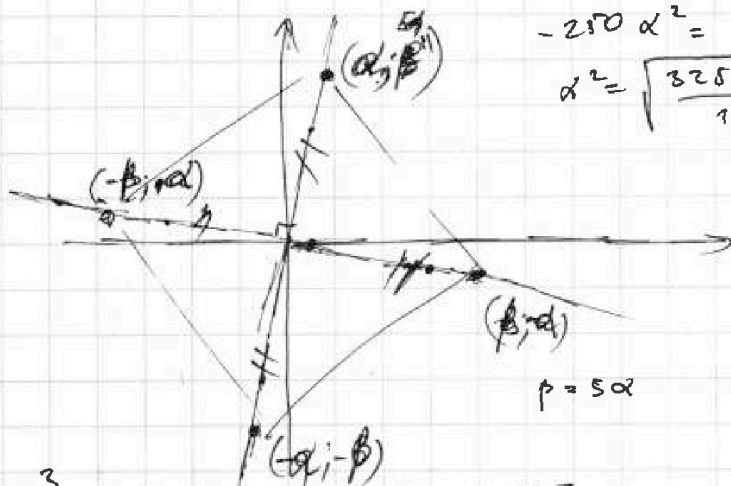
будем считать, что если корни y $\ln(x+2) - 1/5$

$\ln(x+2) - (x+1) < 0$ всегда,
кроме $x < -2$ (неопред.) $\ln(0,5) - 0,5 < 0$
 $x = -1 (=)$ $\ln(1) - 0 = 0$



$x \in (-2; -1.75] \cup (-1; \infty)$

4)



$$-250\alpha^2 = \frac{-325}{12}$$

$$\alpha^2 = \sqrt{\frac{325 \cdot 250}{12}}$$

$$y_1 = 5x$$

$$y_2 = -\frac{x}{5}$$

$$y_{кр} = -2x^3 - ax$$

$$b = 5a$$

$$-2x^3 - ax = 5x$$

имеет корни
 $\alpha = -\alpha$

$$-2\alpha^3 - a\alpha = 5\alpha$$

$$+2\alpha^3 + a\alpha = -5\alpha \quad \text{①}$$

$$-2x^3 - ax = -\frac{x}{5}$$

$$-2x^3 - ax = -\frac{x}{5}$$

$$-2x^3 - ax = y(x)$$

$$+2x^3 + ax = y(-x) = -y(x)$$

$$y(x) = y$$

$$\text{или } x = 5\alpha$$

$$\text{или } x = -5\alpha$$

$$-2 \cdot 125\alpha^3 - 5a\alpha = -\alpha$$

$$\alpha = 250\alpha^3 + 5a\alpha$$

$$\begin{cases} -2\alpha^3 - a\alpha = 5\alpha \\ -2 \cdot 125 \cdot \alpha^3 - 5a\alpha = -\alpha \end{cases}$$

$$-2 \cdot 125 \cdot \alpha^3 - 5a\alpha = -\alpha$$

$$\begin{cases} -2\alpha^3 - a\alpha = 5\alpha \\ -250\alpha^3 - 5a\alpha = -\alpha \end{cases} \cdot (-5)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{13}{120}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{13}{30}}$$

$$\begin{cases} 10\alpha^3 + 5a\alpha = -25\alpha \\ -250\alpha^3 - 5a\alpha = -\alpha \end{cases}$$

$$-240\alpha^3 = -26\alpha$$

$$\alpha^2 = \frac{26}{240} = \frac{13}{120}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\alpha = \sqrt{\frac{13}{120}}$ прозерим $\cos \alpha$

$$-2 \left(\sqrt{\frac{13}{120}} \right)^2 - a \sqrt{\frac{13}{120}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{13}{120}}$$

$$-2 \cdot \frac{13}{120} - a = 5 \quad a = -\frac{13}{60} - 5 = \frac{-13 - 300}{60} = -\frac{313}{60}$$

$$-2 \left(\sqrt{\frac{13}{120}} \right)^2 + \frac{313}{60} \cdot \sqrt{\frac{13}{120}} = -\frac{1}{5} \cdot \sqrt{\frac{13}{120}}$$

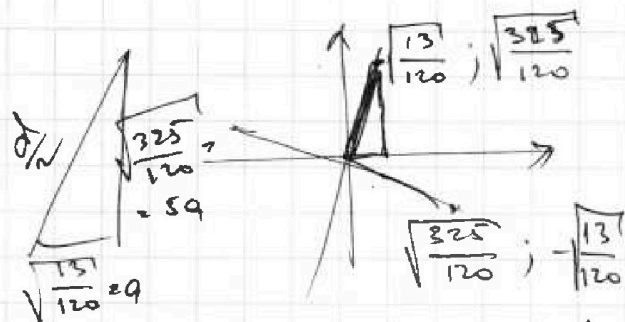
$$-\frac{2 \cdot 13}{120} + \frac{313}{60} = \frac{313 - 13}{60} = 5 \quad \left(\ln(x+2) \right)' = \frac{1}{x+2} \quad (-1) \cdot 1$$

$$-2x^2 + \frac{313}{60} x = -\frac{x}{5}$$

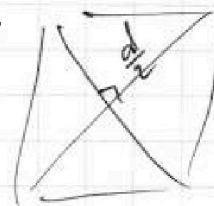
$$-2x^2 + \frac{313}{60} = -\frac{1}{5} =$$

$$2x^2 = \frac{313}{60} + \frac{1}{5} = \frac{313 + 12}{60} = \frac{325}{60} = \frac{65 \cdot 5}{120}$$

$$x = \sqrt{\frac{325}{120}} \quad ? \quad \sqrt{\frac{13}{120}} \cdot 5 = \sqrt{\frac{13 \cdot 25}{120}} = \sqrt{\frac{260 + 50 + 15}{120}} \quad \textcircled{1}$$



$$\frac{50}{1} \cdot \frac{4}{9} \quad AB$$



$$\sqrt{a^2 + 259^2} = a \sqrt{26}$$

$$5x \cdot 13 = \frac{169}{30}$$

$$\frac{d}{2} = a \sqrt{26}$$

$$d = a \sqrt{26} \Rightarrow \frac{d^2}{2} = \frac{a^2}{2} = \frac{4a^2 \cdot 26}{2} = 2a^2 \cdot 26$$

$$\frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2} = \frac{d^2}{2}$$

$$\ln(x+2) > (x+2)$$

$$e^{x+2} < x+2$$

$$125 \cdot 13 = 1250 + 300 + 75 = -1625 + 1565 =$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(\ln(x+2) + \ln 4) (\ln(x+2) - (x+1)) \geq 0$$

$$\ln(x+2) + \ln 4 = 0$$

$$\ln(4x+8) \cdot (\ln(x+2) - (x+1)) \geq 0$$

$$\begin{cases} \ln(4x+8) = 0 & (1) \\ \ln(x+2) - (x+1) = 0 & (2) \\ \ln(4x+8) > 0 & (3) \\ \ln(x+2) - (x+1) > 0 & (4) \\ \ln(4x+8) < 0 & (5) \\ \ln(x+2) - (x+1) < 0 & (6) \end{cases}$$

$$1) \ln(4x+8) = 0$$

$$4x+8=1$$

$$4x = -7$$

$$\text{при } x \in (-2; -1,75) \ln(4x+8) < 0$$

$$\text{при } x \in (-1,75; +\infty) \ln(4x+8) > 0$$

$$2) \ln(x+2) - (x+1) = 0$$

$$\ln(x+2) = (x+1) \quad (\ln(x+2) - (x+1))' =$$

$$= \frac{1}{x+2} - 1$$

$$y = \ln x$$

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$e^{x+1} = x+2$$

$$y'' = -\frac{1}{x^2}$$

0 только

$$x = -1 \quad e^0 = 1$$

$$y = \log_2 x$$

$$1 = \log_2 2$$

$$2 = \log_2 4$$

$$3 = \log_2 8$$

$$\frac{1}{2} - 1 = \log_2 \frac{1}{2}$$

$$-2 = \log_2 \frac{1}{4}$$

0

$$\ln \text{ если } x+1 \text{ нас}$$

$$\ln(1) = 0$$

$$\ln(e) = 1$$

$$(-1; 0)$$

$$c = 2,7$$

$$= 0,7$$

$$3,2 \Rightarrow (1,1)$$

$$x+1 > 0 \text{ при } x > -1$$

$$\ln(x+2) > 0 \text{ при } x > -2$$

$$\text{при } x > 0$$

$$y = a^x$$

$$y = a^x$$

$$a^x = \log_a x$$

$$a^x = x$$

$$a = -\log b = -\frac{1}{\log a}$$

$$b = \ln a$$

$$e = 2,7$$

$$y = 1 \text{ при } x = 0$$

$$y = 2 \text{ при } x = 1$$

$$-a = \log b$$

$$y = \log x \quad b = \log a$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!



$$\frac{m}{n} = \frac{3^x}{7^y}$$

$$0 < x \leq 80$$

$$0 < y \leq 80$$

80 var

80 var.

короче

$$q \in \mathbb{Q}$$

$$q_1 = \pm \frac{3^x}{7^y}$$

или

$$q_1 = \pm \frac{7^y}{3^x}$$

$$\frac{3^x}{7^y}$$

где x 81 var

где y 81 var

$$(81 \cdot 81 - 1) - 9 \cdot 1 +$$

$$2(81 \cdot 81 - 1) - 9 \cdot 2 +$$

$$4(81 \cdot 81 - 1) - 9 \cdot 4$$

еще есть

$$q_3 = \pm 3^{8 \cdot 7^5}$$

$$q_4 = \pm \frac{1}{3^{8 \cdot 7^5}}$$

$$\ln(x+2) \rightarrow -\infty; \ln(-2; 0) \rightarrow -5; 1$$

тогда по 80 var.

$$80 \cdot 80 \cdot 2 \cdot 2$$

$$x \neq 0, y \neq 0$$

$$\ln(x+2) > (x+1)$$

$$e^{x+1} < x+2$$

$$4(81 \cdot 81 - 1) + 4 \cdot 80 \cdot 80 = 4(81^2 - 1 + 80^2) =$$

$$81^2 = (80+1)^2$$

$$= 4 \cdot (6560 + 6400) =$$

$$= 6400 + 4 \cdot 80 + 4 = 4 \cdot 12960 = 51840$$

$$= 6400 + 320 + 4 = 6724$$

$$81^2 = (80+1)^2 = 6400 + 160 + 1 = 6561$$

$$12960$$

$$51840$$

$$\frac{81}{81}$$

$$\frac{81}{81}$$

$$80 \cdot 80 = 6400$$

$$\ln^2(x+2) - (x+1) - \ln 4 \cdot \ln(x+2) \geq 0$$

$$\ln^2(x+2) = t$$

$$t^2 - (x+1) \cdot (\ln 2 + t) + \ln 4 \cdot t \geq 0;$$

$$t^2 - (x+1) \cdot \ln 2 - t(x+1) + 2 \ln 2 \cdot t \geq 0;$$

$$\ln(x+2) \cdot \ln(x+2) - (x+1) \cdot (\ln 2 + \ln(x+2)) + \ln 4 \cdot \ln(x+2) \geq 0$$

$$\ln(x+2) (\ln(x+2) - (x+1)) + \ln 4 (\ln(x+2) - (x+1)) \geq 0;$$

$$(\ln(x+2) + \ln 4) (\ln(x+2) - (x+1)) \geq 0;$$

$$x > -2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черпунком и не проверяется. Печата QR-кода недопустима!

$$\lg(\alpha + \beta) = \frac{\lg \alpha + \lg \beta}{1 - \lg \alpha \cdot \lg \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

$$\lg 2\alpha = \frac{2\lg \alpha}{1 - \lg^2 \alpha}$$

$$\frac{\lg \alpha}{1 - \lg^2 \alpha} + 1 + \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot 1 - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + 1} = 0;$$

$$\text{поскольку } \lg x = t$$

$$\frac{\lg t}{1 - t^2} + 1 + \frac{\frac{1}{t} - 1}{\frac{1}{t} + 1} = 0;$$

$$\frac{\lg t + 1 - t^2}{1 - t^2} = \frac{1 - \frac{1}{t}}{1 + \frac{1}{t}}$$

$$\frac{t^2 + \lg t - 1}{t^2 - 1} = \frac{1 - \frac{1}{t}}{1 + \frac{1}{t}}$$

$$\cancel{t^2} - \lg t - 1 + t - 1 - \frac{1}{t} = \cancel{t^2} - 1 - t + \frac{1}{t}$$

$$-7t - 9 - \frac{1}{t} = -1 - t + \frac{1}{t}; \quad (\cdot t)$$

$$-7t^2 - 9t - 1 = -t - t^2 + 1;$$

$$6t^2 + 8t + 2 = 0;$$

$$3t^2 + 4t + 1 = 0;$$

$$D = 4 - 3 = 1$$

$$t_1 = \frac{-2-1}{3} = -1 \quad \text{— не подходит}$$

$$t_2 = \frac{-2+1}{3} = -\frac{1}{3} \quad \text{— проверим}$$

$$0, 2, 3: \quad \lg \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2x \neq 0$$

$$2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$$

$$x + \frac{\pi}{4} \neq \pi k$$

$$x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\lg x \neq \pm 1$$

$$\operatorname{ctg} x \neq -1$$

Особенно проверить

$$\lg x = 0$$

$$\text{если } \lg x = 0 \Rightarrow$$

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi k$$

$$4 \lg(2\pi k) + 1 + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right) =$$

$$= 0 + 1 + 1 = 2 \Rightarrow t \neq 0$$

$$\lg x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \operatorname{ctg} x = -3$$

$$\lg 2x = \frac{-\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2}{3} : \frac{8}{9} = -\frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 8} = -\frac{3}{4}$$

$$-\frac{3 \cdot 4}{4} + 1 + \left(\frac{-3 \cdot 1 - 1}{-3 + 1}\right) =$$

$$= -3 + 1 + \frac{-4}{-2} = -3 + 1 + 2 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



aza

$$b = aq, c = bq = aq^2 \Rightarrow abc = a^3 \cdot q^3 = (aq)^3$$

$$(aq)^3 = 3^{240} \cdot 7^{240} \Rightarrow aq = 3^{80} \cdot 7^{80}$$

Сначала рассмотрим с $q > 1$

$$\text{Тогда } q \text{ делит } 81 - 81 - 1 = (q^3 - 1) \cdot 2$$

начиная с 2
++
--

если $q < 1$ обозначим q как $\frac{1}{q'}$, где $q' > 1$

$$\frac{a}{q'} = \frac{3^{80} \cdot 7^{80}}{q'} \quad a = 3^{80} \cdot 7^{80} \cdot q' \quad \text{мы не оптимизировали}$$

$$q = \frac{1}{2} \quad q' = 2$$

$$b^2 = ac \quad \text{если } q < 0, \text{ то } b_+, c_-, a_- \Rightarrow b = \sqrt{ac}$$

$$\sqrt{ac} \cdot ac = (ac)^{3/2} = (aq)^3$$

$$ac = dq^2 \cdot a$$

$$\text{если } q = \frac{1}{3}$$

$$a = 3^{81} \cdot 7^{80} \quad b = 3^{80} \cdot 7^{80}$$

$$c = 3^{82} \cdot 7^{80}$$

$$b = aq = 3^{80} \cdot 7^{80} \quad c = aq^2$$

$$a = \frac{3^{80} \cdot 7^{80}}{q}$$

$$c = \frac{3^{80} \cdot 7^{80}}{q^2}$$

если $q \in \mathbb{Z}$
то разобьем
если $q = \frac{m}{n}$

а для q (или $\frac{1}{q}$)
если $q < 0$ и $q \neq \pm 1$, тогда
это просто проверяем,
к-ю мы уже посчитали
Когда найдемся
всего $4(q^4 - 1)$

$$m = 3 \quad n = 7 \Rightarrow q = \frac{3}{7}$$

$$\frac{3^{80} \cdot 7^{80}}{3} = 3^{79} \cdot 7^{80}$$

$$m = \pm 3^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$$

$$n = 3^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{3^{\alpha_1}}{7^{\beta_1}} \bigg/ \frac{3^{\alpha_2}}{7^{\beta_2}} = \frac{3^{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot 7^{\beta_2 - \beta_1}}{1}$$

рассмотрим

$$a = \frac{3^{80} \cdot 7^{80} \cdot 3^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}}{3^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}}$$