



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Решите уравнение

$$4 \operatorname{tg} 2x + 1 + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $3^{240} \cdot 7^{240}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2(x+2) - (x+1) \ln(4x+8) + (\ln 4) \ln(x+2) \geq 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -2x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 5x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC . Лучи DE и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{11}}$.

6. [5 баллов] Числа x , y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} = z^3 + \frac{10}{x^3}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения xyz .

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{10}$, $AD = DC = 2$, $AC = 2\sqrt{2}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB , SBC и ребра SD .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 4 \operatorname{tg} 2x + 1 + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= 0 \\ \operatorname{tg} 2x &= \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} x)} & \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}} \\ \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} &= 1 \Rightarrow \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{ctg} x - 1}{\operatorname{ctg} x + 1} = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} \\ \operatorname{ctg} x &= \frac{1}{\operatorname{tg} x} \end{aligned}$$

Тогда исходное уравнение перепишем как:

$$\begin{aligned} \frac{8 \operatorname{tg} x}{(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} x)} + \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} &= -1 \\ \frac{8 \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg} x) + 1 - \operatorname{tg} x}{(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} x)} &= -1 \\ \frac{8 \operatorname{tg}^2 x + 8 \operatorname{tg} x + 1 - \operatorname{tg} x}{(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} x)} &= -1 \\ \frac{8 \operatorname{tg}^2 x + 7 \operatorname{tg} x + 1}{(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} x)} &= -1 \\ 8 \operatorname{tg}^2 x + 7 \operatorname{tg} x + 1 &= - (1 - \operatorname{tg}^2 x) \\ 8 \operatorname{tg}^2 x + 7 \operatorname{tg} x + 1 &= -1 + \operatorname{tg}^2 x \\ 7 \operatorname{tg}^2 x + 7 \operatorname{tg} x + 2 &= 0 \\ 8 \operatorname{tg} x + (1 - \operatorname{tg} x)^2 &= - (1 - \operatorname{tg}^2 x) \\ 8 \operatorname{tg} x + 1 - 2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x &= \operatorname{tg}^2 x - 1 \\ 6 \operatorname{tg} x &= -2 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = \arctg \left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } x = \arctg \left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



a, b, c - геом. прогрессия

q - шаг прогрессии

a, aq, aq^2

a - целое

q - рациональное и такое,
что aq^2 - целое.

$$abc = a^3 q^3 = 3^{240} \cdot 7^{240}$$

$$(aq)^3 = (3^{80} \cdot 7^{80})^3 \Rightarrow aq = 3^{80} \cdot 7^{80}$$

1) a целое и q целое $\Rightarrow a = \pm 3^m \cdot 7^n, q = \pm 3^{80-m} \cdot 7^{80-n}$

3 в степени от 0 до 80 вариантов $81 \cdot 81 = 81^2$

7 в степени от 0 до 80

и знак числа $+$ или $-$

кол-во вариантов числа a

q однозначно определяется a .

2) a целое; $q = \pm \frac{3^{80-t}}{7^n}; a = \pm 3^m \cdot 7^t$

$$m - n = 80 = 2^4 \cdot 5$$

$$1 \leq n \leq 80 \quad (2n - n = 80)$$

$$m \geq 2n - \text{чтобы } aq^2 - \text{целое}$$

$$n \in \mathbb{N}$$

Чтобы n было целым:

$$m - n = k \cdot n, \text{ где } 80 : k \Rightarrow k = 5, 10, 2, 4, 40, 8, 20, 16, 80$$

$$\Rightarrow m = (81, 41, 21, 18, 11, 9, 6, 5, 3)_n \rightarrow \text{всего } 9 \text{ вариантов}$$

$$\text{Значит } a = \pm 3^m \cdot 7^t$$

где m - 9 вариантов, t - 81 вариант,

q от a определяется однозначно

всего вариантов $2 \cdot 9 \cdot 81$

3) a - целое; $q = \pm \frac{3^{80-t}}{7^n}$

- аналогично предыдущему
случаю $2 \cdot 81 \cdot 9$ вариантов

4) $a = \pm 3^m \cdot 7^t; q = \pm \frac{1}{3^n \cdot 7^f}$

Тогда для m и n 9 вариантов,

для t и f 9 вариантов,

всего $2 \cdot 9 \cdot 9 = 162$ вариантов

q от a определяется

однозначно

$$\sum = 2 \cdot 81 \cdot 81 + 4 \cdot 9 \cdot 81 + 2 \cdot 81 = 2 \cdot 81 (81 + 18 + 2) = 2 \cdot 81 \cdot 101$$

$$= 162 \cdot 100 + 162 = 16362$$

Ответ: 16362

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\ln^2(x+2) - (x+1) \ln(4x+8) + \ln 4 \cdot \ln(x+2) \geq 0$$

$$\ln^2(x+2) - (x+1) \ln(4(x+2)) + \ln 4 \cdot \ln(x+2) \geq 0$$

$$\ln^2(x+2) - (x+1) (\ln 4 + \ln(x+2)) + \ln 4 \cdot \ln(x+2) \geq 0$$

$$\ln(x+2) (\ln(x+2) - (x+1)) + \ln 4 (\ln(x+2) - (x+1)) \geq 0$$

$$(\ln(x+2) - (x+1)) (\ln(x+2) + \ln 4) \geq 0 \quad \begin{matrix} x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ (\ln(x+2) \nearrow) \end{matrix}$$

$$\ln(x+2) = -\ln 4$$

$$\ln(x+2) = \ln \frac{1}{4} \quad \text{т.к. } \ln(t) \text{ монотонно возрастает при } t > 0$$

$$\Rightarrow x+2 = \frac{1}{4} \quad x = -\frac{7}{4}$$

$$\ln(x+2) = x+1$$

$$x+2 = e^{x+1}$$

$$\text{Возьмем ф-цию } f(x) = e^{x+1} - x - 2$$

$$f'(x) = e^{x+1} - 1 = 0 \Rightarrow e^{x+1} = 1 \Rightarrow x = -1$$

$$x > -1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ возрастает}$$

$$x < -1 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ убывает} \quad \Rightarrow x = -1 \text{ точка максимума } f(x)$$

$$f(-1) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \text{при всех } x \neq -1 \quad f(x) > 0 \Rightarrow e^{x+1} > x+2$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ единственное решение ур-ния } x+2 = e^{x+1}$$

$$\ln(x+2) + \ln 4 \quad \begin{matrix} - & + \\ & \downarrow \\ & -\frac{7}{4} \end{matrix} \quad x \quad (\text{сравниваем с } 0)$$

$$\ln(x+2) - (x+1) \quad \begin{matrix} - & - & - \\ & \downarrow \\ & -1 \end{matrix} \quad x \quad (\text{сравниваем с } 0)$$

$$(\ln(x+2) - (x+1)) (\ln(x+2) + \ln 4) \geq 0$$

$$\downarrow$$

$$-2 < x \leq -\frac{7}{4} \quad \text{и} \quad x = -1$$

$$\text{Ответ: } x \in (-2; -\frac{7}{4}] \cup \{-1\}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

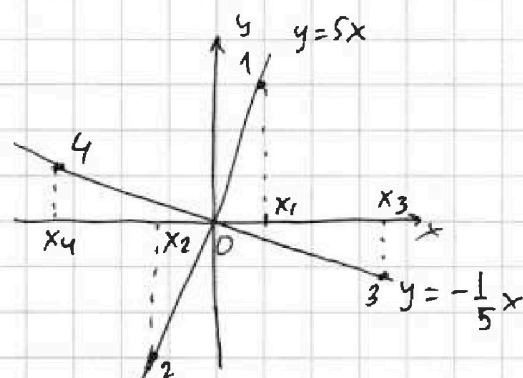
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!



Диагонали квадрата перпендикулярны $\Rightarrow$ вторая диагональ лежит на прямой $\perp y=5x$
 $\Rightarrow$ это прямая $y = -\frac{1}{5}x$

$$т.к. -\frac{1}{5} \cdot 5 = -1 \quad (k_1 \cdot k_2 = -1)$$

$$\begin{aligned} -2x^3 - ax &= 5x & x=0 \text{ нас не интересует т.к. ищем точки} \\ -2x^2 - a &= 5 & \text{пересечения координат вершин квадрата} \\ 2x^2 &= -a-5 \end{aligned}$$

$$x^2 = \frac{-5-a}{2} \quad x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-5-a}{2}} \Rightarrow a \leq -5$$

$$-2x^3 - ax = -\frac{1}{5}x$$

$$2x^2 = \frac{1}{5} - a \Rightarrow x^2 = \frac{1-5a}{10} \quad x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{1-5a}{10}} \Rightarrow a \leq \frac{1}{5}$$

Чтобы это был квадрат, расстояние от центра до каждой из вершин должно быть одинаково.
 От 1 и 2 вершин оно одинаково т.к. они лежат на одной прямой и расстояние от x_1 и x_2 до 0 одинаково.
 Аналогично для 3 и 4 вершин. Тогда достаточно доказать, что потребовать, чтобы расстояния от 1 и 3 вершин были равны: $x_1^2 + y_1^2 = x_3^2 + y_3^2$

$$y_1^2 = 25x_1^2 = -\frac{25}{2}(a+5) \quad y_3^2 = \frac{1}{25}x_3^2 = \frac{1-5a}{250}$$

$$-\frac{25}{2}(a+5) - \frac{a+5}{2} = \frac{1-5a}{250} + \frac{1-5a}{10}$$

$$-13(a+5) = \frac{1-5a+25-125a}{250}$$

$$-13 \cdot 250(a+5) = 26 - 130a \quad a = -\frac{313}{60}$$

$$-13 \cdot 250(a+5) = 13(2-10a)$$

$$-250a - 250 \cdot 5 = 2 - 10a$$

$$240a = -250 \cdot 5 - 2$$

$$240a = -1252$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{d}{2}$ — длина половины диагонали

$$S = \frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \left(\frac{d}{2} \right)^2 = 2 \left(-13(a+5) \right) = -26 \left(-\frac{313}{60} + 5 \right) =$$
$$= -26 \left(-\frac{313 + 300}{60} \right) = \frac{-26 \cdot (-13)}{60} = \frac{169 \cdot 2}{60} = \frac{169}{30}$$

Ответ: $a = -\frac{313}{60}$ $S = \frac{169}{30}$

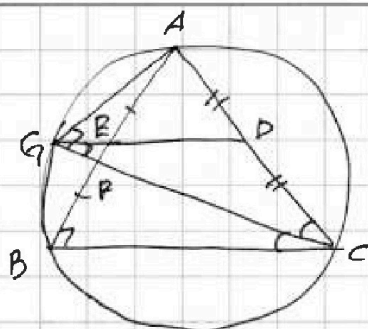
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $\angle C = 2d \Rightarrow \angle GCD = d = \angle GCB$
 $\angle DGC = \angle GCB = d$ как какрест лежа-
 щие при параллель-
 ных прямых.

$\Rightarrow \triangle GDC$ - равнобедренный
 $\Rightarrow CD = GC = AD$ (D - середина AC)
 $\angle ADG = \angle C = 2d$

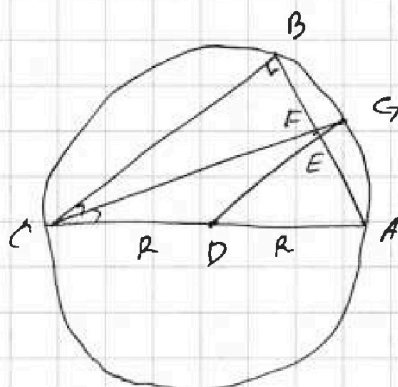
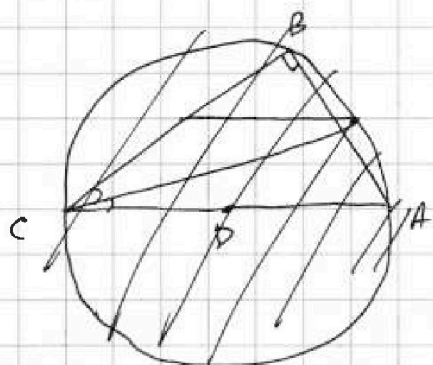
т.к. $\angle ADG = 2\angle ACG$ и $AD = DG \Rightarrow D$ - это центр окруж-
 ности

$\Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$ т.к. опирается на диаметр

$\Rightarrow D$ - центр окружности, описанной около $\triangle AGC$

$\Rightarrow \angle AGC = 90^\circ$ т.к. опирается на диаметр. той окружк.

ко $\angle ADG = \angle ABC = \angle AGC$ т.к. они опираются на одну
 дугу $\Rightarrow \angle ABC = 90^\circ \Rightarrow D$ центр $\triangle AGC$.



Ответ: $\angle B = 90^\circ$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Преобразуя каждое из 3х уравнений, получим:

$$\begin{cases} (xy^2)^3 + 10z^3 = y^6z^3 + 10yz^3 \\ (xy^2)^3 + 10x^3 = 2^6x^3 + 10z^3 \\ (xy^2)^3 + 10y^3 = x^6y^3 + 10x^3 \end{cases}$$

$$y^6z^3 + 10yz^3 - 10z^3 = 2^6x^3 + 10z^3 - 10x^3 = x^6y^3 + 10x^3 - 10yz^3$$
$$y^6z^3 + 10yz^3 + 10x^3 = 2^6x^3 + 20z^3$$

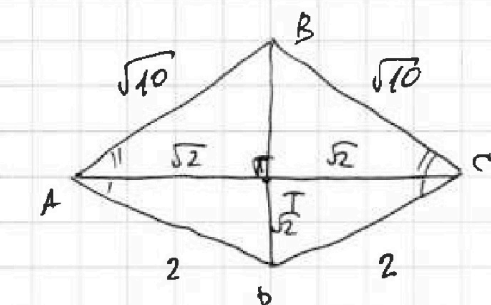
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!



$$BT^2 + 2 = 10 \Rightarrow BT = 2\sqrt{2}$$

$$PT^2 + 2 = 4 \Rightarrow PT = \sqrt{2}$$

Пусть $SD =$

$$a) S_{\text{основания}} = \sqrt{2} \cdot 2 + \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 2 + 4 = 6$$

$$\text{Пусть } SD = h \Rightarrow SB^2 = h^2 + 9 \cdot 2 = h^2 + 18$$

$$SA^2 = h^2 + 4$$

$$(SA + SB)^2 = 8 + 10 + 8\sqrt{5} = AS^2 + SB^2 + 2SA \cdot SB = 2h^2 + 4 + 18 + 2SA \cdot SB$$

$$8\sqrt{5} = 2h^2 + 4 + 2 \cdot SA \cdot SB$$

$$4\sqrt{5} = h^2 + 2 + SA \cdot SB$$

$$2(2\sqrt{5} - 1) - h^2 = SA \cdot SB$$

возведем в квадрат, помним,
что левая часть должна быть
больше 0.

$$4(2\sqrt{5} - 1)^2 - 4h^2(2\sqrt{5} - 1) + h^4$$

$$h^4 + 22h^2 + 4 \cdot 18$$

$$22h^2 + 4h^2(2\sqrt{5} - 1) = 4(10 + 1 - 4\sqrt{5}) - 72$$

$$2h^2(11 - 4 + 8\sqrt{5}) = 12 - 16\sqrt{5}$$

$$h^2(7 + 8\sqrt{5}) = 6 - 8\sqrt{5}$$

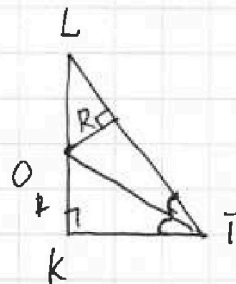
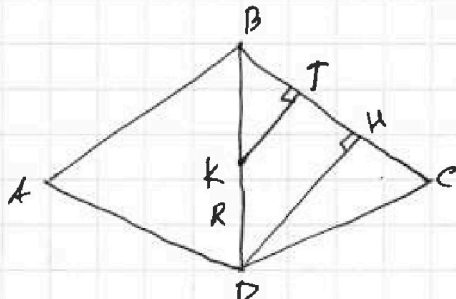
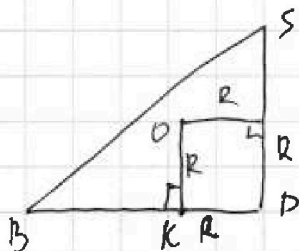
$$h = \sqrt{\frac{6 - 8\sqrt{5}}{7 + 8\sqrt{5}}}$$

$$h^2 < 0 \Rightarrow \text{подходит под}$$

Вот только
 $6 - 8\sqrt{5} < 0$,
поэтому h -
не существует.

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \sqrt{\frac{6 - 8\sqrt{5}}{7 + 8\sqrt{5}}} = 2 \sqrt{\frac{6 - 8\sqrt{5}}{7 + 8\sqrt{5}}}$$

б) Т.к. шар касается SAB и $SBC \Rightarrow$ он лежит в биссектр
и центр шара лежит в биссекторной плоскости $\Rightarrow$ этих
плоскостей $\Rightarrow O$ (центр) $\in BDC$.



$\angle KTL$ - это угол между
 SBC и DBC .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

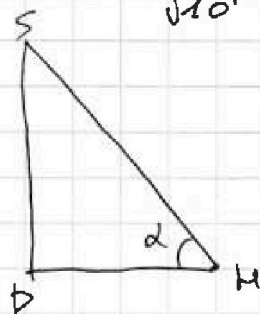


$$\frac{1}{2} DK \cdot BC = \frac{1}{2} BD \cdot DC \cdot \sin \angle BDC \quad \text{из } \triangle DTC \text{ (пункт а)}$$

$$\angle BDC = 45^\circ$$

$$DK \cdot \sqrt{10} = 3\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 6$$

$$\Rightarrow DK = \frac{6}{\sqrt{10}}$$



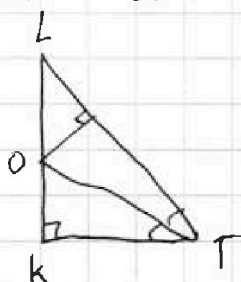
$$\tan \alpha = \frac{SD}{DK} = \frac{\sqrt{6-8\sqrt{5}}}{\frac{6}{\sqrt{10}}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{6}$$

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan(\alpha/2)}{1 - \tan^2(\alpha/2)} \Rightarrow \tan^2(\alpha/2) \cdot \tan \alpha + 2 \tan(\alpha/2) - \tan \alpha = 0$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-2 + \sqrt{4 + 4 \tan^2 \alpha}}{2 \tan \alpha}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-1 + \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha} \quad (\text{берем } + \text{ и } \alpha < 90^\circ)$$

$$\frac{KT}{DK} = \frac{BK}{BD} = \frac{3\sqrt{2} - R}{3\sqrt{2}} \Rightarrow KT = DK - \frac{DK}{3\sqrt{2}} R = \frac{6}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{5}} R$$



$$\angle OTK = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{R}{KT} = \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} - \text{это число}$$

KT-линейно зависит от R $\Rightarrow$ если подставить числа, то отсюда можно найти R.

$$R = \frac{6}{\sqrt{10}} \tan \frac{\alpha}{2} - \frac{\tan \alpha/2}{\sqrt{5}} R \Rightarrow R \left(1 + \frac{\tan \alpha/2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{6}{\sqrt{10}} \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$R \left(\frac{\sqrt{5} + \tan \alpha/2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{6}{\sqrt{10}} \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$R = \frac{6 \tan \alpha/2}{\sqrt{2}(\sqrt{5} + \tan \alpha/2)} = \frac{3\sqrt{2} \tan \alpha/2}{\sqrt{5} + \tan \alpha/2}$$

$$\text{Итак! а) } 2 \frac{\sqrt{6-8\sqrt{5}}}{7+8\sqrt{5}} \quad \delta) \frac{3\sqrt{2} \tan \alpha/2}{\sqrt{5} + \tan \alpha/2}, \quad \tan \alpha/2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{6-8\sqrt{5}}}{7+8\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{6}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{8 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 1 + \frac{\operatorname{ctg} x - 1}{\operatorname{ctg} x + 1} = 0$$

$$\operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{2}) = \frac{\operatorname{ctg} x - 1}{\operatorname{ctg} x + 1} = \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} - 1}{\frac{1}{\operatorname{tg} x} + 1} = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$$

$$\frac{8 \operatorname{tg} x}{(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} x)} + 1 + \frac{1 - \operatorname{tg} x(1 - \operatorname{tg} x)}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{8 \operatorname{tg} x + (1 - \operatorname{tg} x)^2}{(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} x)} = -1$$

$$x = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \pi k$$

$$\operatorname{tg}^3 x + 6 \operatorname{tg} x + 1 = \operatorname{tg}^3 x - 1$$

$$6 \operatorname{tg} x = -2$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}$$

12 a, b, c — целые

a aq aq^2

$$a^3 \cdot q^3 = 3^{240} \rightarrow (aq)^3 = 3^{240} \rightarrow aq = 3^{80}$$

$$a = \pm 3^n$$

$$a = \pm 7^n$$

$$q = \pm 3^{80/n}$$

$$q = \pm 3^{80/n}$$

$$a = 3^{80} \rightarrow 81 \cdot 2 \cdot 9$$

$$\ln^2(x+2) - (x+1) \ln(4x+8) + \ln 4 \ln(x+2) \geq 0$$

$$x \geq -2$$

$$\ln^2(x+2) - (x+1) \ln(4(x+2)) + \ln 4 \ln(x+2)$$

$$\ln^2(x+2) - (x+1)(\ln 4 + \ln(x+2)) + \ln 4 \ln(x+2)$$

$$\ln^2(x+2) - (x+1) \ln 4 - (x+1) \ln(x+2) + \ln 4 \ln(x+2)$$

$$\ln(x+2)(\ln(x+2) - (x+1)) + \ln 4(\ln(x+2) - (x+1))$$

$$(\ln(x+2) - (x+1))(\ln(x+2) + \ln 4) \geq 0$$

$$\ln(x+2) = (x+1)$$

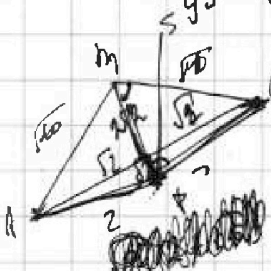
$$x+2 = e^{x+1}$$

$$\ln(x+2) = \ln(4) \Rightarrow x+2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$(e^{x+1} - x - 2) = e^{x+1} - 1$$

$$x = -1$$

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} \rightarrow (xyz)^3 + 10z^3 = y^3 \cdot y^3 + 10y^3$$



$$SA^2 = h^2 + 4$$

$$SB^2 = h^2 + 18$$

$$SA + SB > 2\sqrt{18}$$

$$\sqrt{18} + \sqrt{10} = \sqrt{2} \sqrt{9} + \sqrt{2} \sqrt{5} = \sqrt{2}(\sqrt{9} + \sqrt{5})$$

$$(SA + SB)^2 = SA^2 + SB^2 + 2SA \cdot SB = 8 + 10 + 8\sqrt{5}$$

$$2h^2 + 22 + 2\sqrt{18} = 18 + 8\sqrt{5}$$

$$2h^2 = 4 - 2\sqrt{5} = (8\sqrt{5} - 4) - 2h^2$$

$$(8\sqrt{5} - 4) - 2h^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

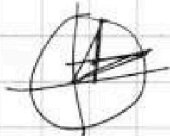
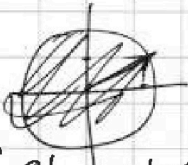


$\angle C \sim \frac{CF}{BF}$ ~~т.к. середина~~ $\frac{BF}{CF} = \frac{CB}{2R}$

$\cos A = \frac{BA}{2R}$ ~~$\sin C = \frac{BA}{2R}$~~

$A + C = 90^\circ$

$\cos(A) = \cos(\frac{\pi}{2} - C) = \sin C$



$\frac{BA}{2R} = \frac{BA}{2R}$ ~~серия~~ $\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$

$\frac{KF}{FK} = \frac{R}{\sqrt{2}R} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$h^2 + 4 = SA^2$ $SB^2 = h^2 + 18$
 $SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10}$

$(SA + SB)^2 = 2h^2 + 22 + 2SA \cdot SB$
 $8 + 10 + 8\sqrt{5} = 2h^2 + 22 + 2SA \cdot SB$

$2SA \cdot SB = \frac{(8\sqrt{5} - 4)}{2} - 2h^2$

$(h^2 + 4)(h^2 + 18) = (4\sqrt{5} - 2)^2 + h^4 - 2h^2(4\sqrt{5} - 2)$

$h^4 + 22h^2 + 4 \cdot 18 = (4\sqrt{5} - 2)^2 + h^4 - 2h^2(4\sqrt{5} - 2)$

$2h^2(18 - 4\sqrt{5}) = (4\sqrt{5} - 2)^2 - 4 \cdot 18 = 80 - 16\sqrt{5} - 72 = 8 - 16\sqrt{5}$

$h^2(18 - 4\sqrt{5}) = 6 - 8\sqrt{5}$

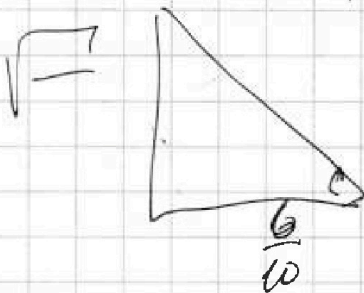
$h = \sqrt{\frac{6 - 8\sqrt{5}}{18 - 4\sqrt{5}}}$

$\lg \frac{1}{2} \rightarrow \lg d = \frac{2 \lg \frac{1}{2}}{1 - \lg^2 \frac{1}{2}}$

$DK \cdot \sqrt{10} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 2 = 6$
 $DK = \frac{6}{\sqrt{10}}$

$(1 - \lg^2 \frac{1}{2}) / \lg d = 2 \lg \frac{1}{2}$
 $\lg^2 \frac{1}{2} \lg d + 2 \lg \frac{1}{2} - \lg d = 0$

$\lg d = \frac{6 - 8\sqrt{5}}{7 + 8\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{6} = \frac{6 - 8\sqrt{5}}{7 + 8\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{6}$



$\sin \frac{d}{2} = \frac{\sin d}{2 \cos \frac{d}{2}} = \frac{\sin d}{2 \cdot \cos \frac{d}{2}}$
 $\sin \frac{d}{2} = \frac{\sin d}{2 \cdot \cos \frac{d}{2}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$SA^2 = h^2 + 4 \quad SB^2 = h^2 + 16$$

$$SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10} = \sqrt{2}(2 + \sqrt{5})$$

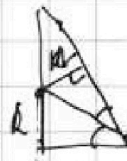
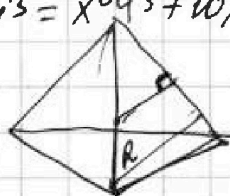
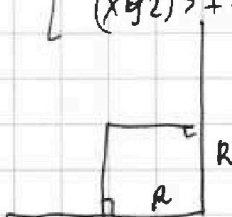
$$(SA + SB)^2 = 10 + 4\sqrt{10}$$

$$10 + 4\sqrt{10} = 10 + 4\sqrt{10}$$

$$(xyz)^3 + 10z^3 = y^6z^3 + 10y^3z^3$$

$$(xyz)^3 + 10x^3 = z^6x^3 + 10z^3x^3$$

$$(xyz)^3 + 10y^3 = x^6y^3 + 10x^3y^3$$



$$D = \frac{1}{n(n+1)}$$

2 отриц.,
1 пол.

$$x^6, y^6, z^6$$

$$2 < x, y$$

$$a = \frac{3^m}{2^t}$$

$$m - n = 80$$

$$m - n = 80$$

$$a = \frac{3}{13}$$

$$a = \frac{3}{13}$$

$$a = \frac{3}{13}$$

$$a = \frac{3}{13}$$

$$SB^2 = SA^2 + 14$$

$$\sqrt{h^2 + 4} + \sqrt{h^2 + 16} = 2\sqrt{2} + \sqrt{10}$$

$h \geq 2$ ~~много~~ много

$h \rightarrow$ близко к 0.

$$y^6z^3 + 10(y^3z^3 - z^3) = z^6x^3 + 10(z^3x^3 - x^3)$$

$$z^3(y^6 + z^3x^3) = 10(z^3x^3 - y^3)$$

$$z^3(y^6 + z^3x^3) = 10(z^3x^3 - y^3)$$

$$z^3(y^6 + z^3x^3) = 10(z^3x^3 - y^3)$$

$$z^3 = \frac{10y^3}{10 - y^6}$$

$$y^3 = \frac{10x^3}{10 - x^6}$$

$$x^3 = \frac{10z^3}{10 - z^6}$$

$$x^3 = \frac{10z^3}{10 - z^6}$$

$$(xyz)^3 = \frac{1000(xyz)^3}{(1)(1)(1)}$$

$$(1)(1)(1) = 1000$$

$$(10x^6 / (10 - y^6) (10 - z^6)) = 1000$$

$$(x^6 - 10 / (y^6 - 10) (z^6 - 10)) = 1000$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$SB^2 = SA^2 + 14$$

$$\sqrt{h^2 + 4} + \sqrt{h^2 + 16} = 2\sqrt{2} + \sqrt{10}$$

$h \geq 2$ ~~много~~ много

$h \rightarrow$ близко к 0.

$$y^6z^3 + 10(y^3z^3 - z^3) = z^6x^3 + 10(z^3x^3 - x^3)$$

$$z^3(y^6 + z^3x^3) = 10(z^3x^3 - y^3)$$

$$z^3(y^6 + z^3x^3) = 10(z^3x^3 - y^3)$$

$$z^3(y^6 + z^3x^3) = 10(z^3x^3 - y^3)$$

$$z^3 = \frac{10y^3}{10 - y^6}$$

$$y^3 = \frac{10x^3}{10 - x^6}$$

$$x^3 = \frac{10z^3}{10 - z^6}$$

$$x^3 = \frac{10z^3}{10 - z^6}$$

$$(xyz)^3 = \frac{1000(xyz)^3}{(1)(1)(1)}$$

$$(1)(1)(1) = 1000$$

$$(10x^6 / (10 - y^6) (10 - z^6)) = 1000$$

$$(x^6 - 10 / (y^6 - 10) (z^6 - 10)) = 1000$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$2.5^3$$

$$10 \rightarrow 2^6 \rightarrow 2$$

$$x^3 = \frac{10z^3}{10 - z^6} = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$x^3 = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

