



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Решите уравнение

$$5 \operatorname{tg} 2x - 1 = \operatorname{tg} \left(x - \frac{3\pi}{4} \right).$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{90} \cdot 19^{90}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2(x+3) - (x+2) \ln(3x+9) + (\ln 3) \ln(x+3) \geq 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = \frac{x^3}{4} + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = \frac{2x}{5}$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC . Лучи DE и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $\frac{CF}{DF} = \frac{2}{11}$.

6. [5 баллов] Числа x , y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{6}{y^3} = y^3 + \frac{6}{z^3} = z^3 + \frac{6}{x^3}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения $x y z$.

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = 5$, $AD = DC = \sqrt{10}$, $AC = 2\sqrt{5}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 5 + 2\sqrt{5}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB , SBC и ребра SD .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



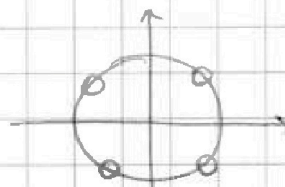
$$5 \operatorname{tg} 2x - 1 = \operatorname{tg} \left(x - \frac{3\pi}{4} \right)$$

ОДЗ: $\cos 2x \neq 0$

$$\cos^2 x - \sin^2 x \neq 0$$

$$|\cos x| \neq |\sin x| \Rightarrow \operatorname{tg} x \neq \pm 1$$

$$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



$$\frac{5 \sin 2x}{\cos 2x} - 1 = \frac{\sin \left(x - \frac{3\pi}{4} \right)}{\cos \left(x - \frac{3\pi}{4} \right)}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin \left(x - \frac{3\pi}{4} \right) = \sin x \cos \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{3\pi}{4} \cos x = -\frac{\sin x}{\sqrt{2}} - \frac{\cos x}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \left(x - \frac{3\pi}{4} \right) = \cos x \cos \frac{3\pi}{4} + \sin x \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\cos x}{\sqrt{2}} + \frac{\sin x}{\sqrt{2}}$$

Подставим:

$$\frac{5 \cdot 2 \sin x \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{-\sin x - \cos x}{\sin x - \cos x}$$

Решим ~~sin~~ на $\sin x - \cos x$, т.к. это не равно 0.

$$\frac{10 \sin x \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x}{-(\cos x + \sin x)} = -(\sin x + \cos x)$$

$-(\cos x + \sin x) \neq 0 \Rightarrow$ можем умножить обе части

$$10 \sin x \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x + 2 \cos x \sin x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

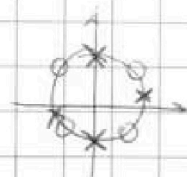
1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$8 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$$

$$1) \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$$



$$2) 8 \sin x - 2 \cos x = 0 \quad (\cos x \neq 0)$$

$$4 \sin x - \cos x = 0 \quad | : \cos x \quad (\cos x \neq 0)$$

$$4 \tan x = 1 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{4}$$

$$x = \arctan \frac{1}{4} + \pi m \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Answer: } \frac{\pi}{2} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}), \arctan \frac{1}{4} + \pi m \quad (m \in \mathbb{Z})$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(a, b, c)$$

$$b = a \cdot d$$

$$c = a \cdot d^2 = b \cdot d$$

$$a \cdot b \cdot c = a^3 \cdot d^3 = 2^{90} \cdot 19^{90} \Rightarrow \underline{ad = 2^{30} \cdot 19^{30}}$$

Заметим, что d может быть и положительным, и отрицательным. Если $d < 0$, то $a < 0$, если $d > 0$.

$$d = \pm 2^n \cdot 19^m$$

Замечим, что только существует вариантов d ,
только существует и троек, т.е. про b -ую можно
всегда определить, $a = \frac{b}{d}$, а $C = b \cdot d$.

~~$n \in [0, 60]$~~ ~~натур~~ ~~числа~~ $n \in [0, 30]$

~~$m \in [0, 30]$ $\Rightarrow$ $m \in [0, 30]$~~

~~bagian dari busana di~~ $2 \cdot \frac{121-121}{n} = \frac{121-121}{m} = 34/22$

3452
Ответ: ~~1111~~ вариантов.
 $m \in 30$ и $n \in 30$, т.к.
 a - целое.

вариантов выбора д. $\frac{2 \cdot 31 \cdot 31}{(+, -)} = 1922$

October 1927

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\ln^2(x+3) - (x+2) \ln(3x+9) + (\ln 3) \cdot \ln(x+3) \geq 0$$

$$\ln a + \ln b = \ln ab$$

$$\ln^2(x+3) - (x+2) (\ln 3 + \ln(x+3)) + (\ln 3) \cdot \ln(x+3) \geq 0$$

$$\ln^2(x+3) - (x+2) \ln(x+3) - (x+2) \ln 3 + (\ln 3) \ln(x+3) \geq 0$$

$$y = \ln(x+3)$$

$$y^2 + y(\ln 3 - (x+2)) - (x+2) \ln 3 \geq 0$$

Парабола ветвится вверх. Если у неё нет корней,
то она всегда больше 0.

$$1) D < 0 \quad ((\ln 3) - (x+2))^2 + 4(x+2) \ln 3 < 0$$

$$((\ln 3) + (x+2))^2 < 0 \quad \text{— противоречие.}$$

$$2) y = 0 \Rightarrow \ln(x+3) = 0 \Rightarrow x+3 = 1 \Rightarrow x = -2$$

$$(x+2) = 0 \quad \text{— не подходит} \Rightarrow x = -2 \quad \text{— в отв.}$$

$$3) D = (\ln 3 + (x+2))^2 = 0 \quad \text{— парабола касается осей.}$$

$$\ln 3 = -(x+2) \Rightarrow x = -2 - \ln 3$$

В ос. случаях у параболы есть 2 пересечения с
осью $\ln(x+3)$.

$$\text{Заметим, что } e > 0 \Rightarrow x+3 > 0 \text{ — всегда} \Rightarrow x \in (-3, +\infty)$$

$\ln 3 > 1 \quad x+2 > -1 \Rightarrow (\ln 3 + (x+2))^2 > 0 \Rightarrow \text{парабола всегда}$
~~больше 0 и не имеет корней. Ответ: $x \in (-3, +\infty)$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

* $D > 0$ - всегда, т.к. $x = -2 - \ln 3 < -3$ - не принадлежит ODZ .

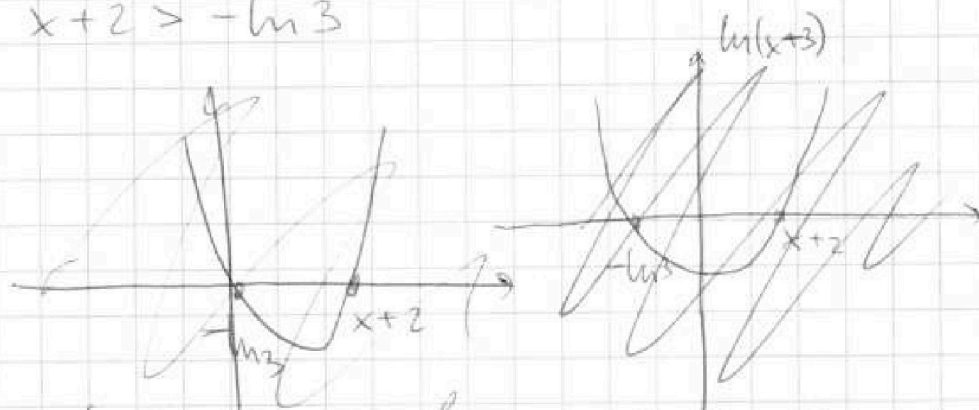
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = (x+2) - \ln 3$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -(x+2) \ln 3$$

$$x_1 = -\ln 3; x_2 = (x+2)$$

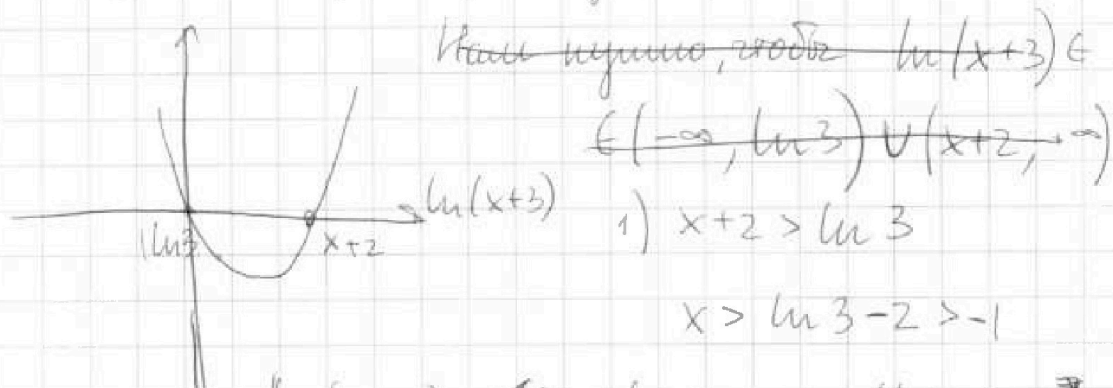
~~Нужно, чтобы $-\ln 3 < -1$~~ $x+2 > -1 \Rightarrow$

$$x+2 > -\ln 3$$



$-\ln 3$ - фиксированные точки, а $x+2$ движется вдоль оси x в зависимости от x .

~~$x < x+2$, но нам нужно, чтобы~~



~~Нужно, чтобы $\ln(x+3) \in$~~

$$\in (-\infty, \ln 3) \cup (x+2, \infty)$$

$$1) x+2 > \ln 3$$

$$x > \ln 3 - 2 > -1$$

$$\ln(x+3) \leq \ln 3 \Rightarrow x \in (\ln 3 - 2; 0]$$

в об



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

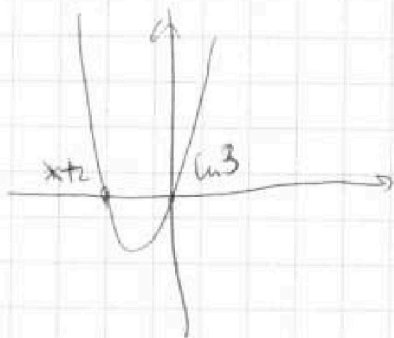
7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\ln(x+3) \geq x+2 > \ln 3 \Rightarrow x \in (0; +\infty) - \text{в отб.}$$

$$2) \quad x+2 < \ln 3 \Rightarrow x < \ln 3 - 2 \Rightarrow x \in (-3, \ln 3 - 2)$$



$$\ln(x+3) \leq x+2 \in (-1; \ln 3)$$

$$x \in \left[\frac{1}{e} - 3; \ln 3 - 2\right) - \text{в отб.}$$

$$\ln(x+3) \geq \ln 3 \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$\text{Ответ: } x \in (\ln 3 - 2; +\infty)$$

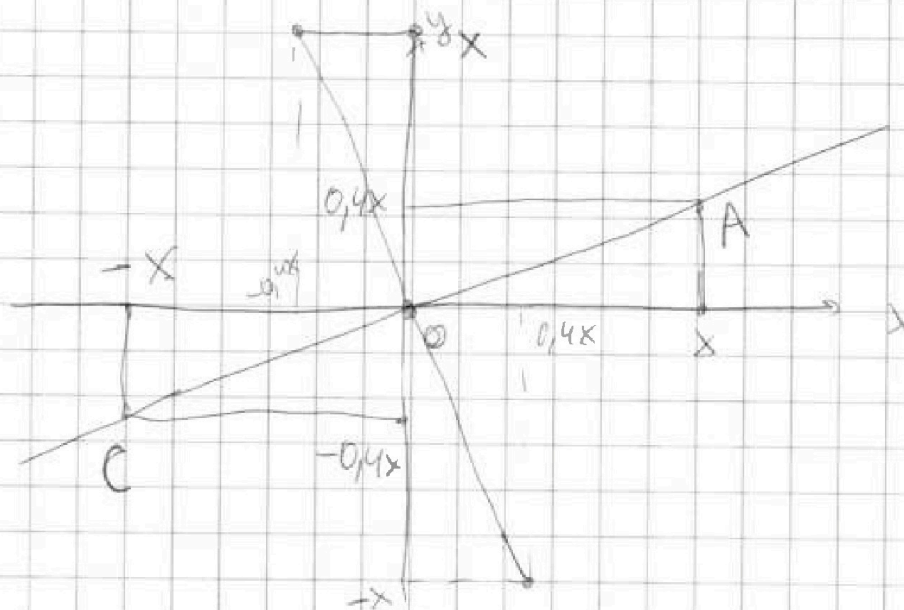
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



У нас есть квадрат ABCD, допустим, диагональ
лежит на прямой $y = \frac{2x}{5}$

т.к. $A = (x; \frac{2x}{5})$, т.к. O - центр квадрата $O = (0; 0)$,
то т.к. диагонали квадрата равны, а середина
обеих диагоналей - это O, то $C = (-x; -\frac{2x}{5})$

Диагонали $AC \perp BD \Rightarrow$ найдем BD, проведем
перпендикуляр к AC в т. O. $y'(x) = \frac{5}{2}x = kx$

$$B = (-0,4x; x); D = (0,4x; -x)$$

Все точки лежат на $y = \frac{x^3}{4} + ax$

$$A: \frac{2x}{5} = \frac{x^3}{4} + ax$$

$$B: x = -\frac{8}{125 \cdot 4} + a \cdot (-0,4x) =$$

$$= -\frac{2}{125} - 0,4ax$$

$$C: -\frac{2x}{5} = \frac{-x^3}{4} - ax$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$D: -X = \frac{8x^3}{125 \cdot 4} + a \cdot \frac{2}{5}x = \frac{2x^3}{125} + \frac{a \cdot 2x}{5}$$

Заметим, что уравнения A и C, B и D симметричны,
просто с противоположными знаками.

$$\frac{2x}{5} = \frac{x^3}{4} + ax \quad | :x \rightarrow 0,4 = \frac{x^2}{4} + a \Rightarrow x^2 = 1,6 - 4a$$

$$-x = \frac{2x^3}{125} + ax \cdot \frac{2}{5} \quad | :x \rightarrow -1 = \frac{2x^2}{125} + \frac{2a}{5} \Rightarrow x^2 = -\frac{125}{2} - 25a$$

$$1,6 - 4a = -82,5 - 25a$$

$$21a = -64,1 \Rightarrow a = -\frac{64,1}{21}$$

$$x^2 = 1,6 + \frac{4 \cdot 64,1}{21} = \frac{1,6 \cdot 21 + 4 \cdot 64,1}{21} = \frac{290}{21}$$

$$AO^2 = x^2 + \frac{4}{25}x^2 = \frac{29}{25}x^2 = \frac{29}{25} \cdot \frac{290}{21} = \frac{29^2 \cdot 2}{5 \cdot 21}$$

$$AB = \sqrt{2} AO = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{29^2 \cdot 2}{5 \cdot 21}}$$

$$S = AB^2 = 2 \cdot \frac{29^2 \cdot 4}{25 \cdot 21} = \frac{8 \cdot 29^2}{5 \cdot 21} = \frac{4 \cdot 29^2}{5 \cdot 21}$$

$$\text{Ответ: } a = -\frac{64,1}{21}; S = \frac{4 \cdot 29^2}{5 \cdot 21}$$



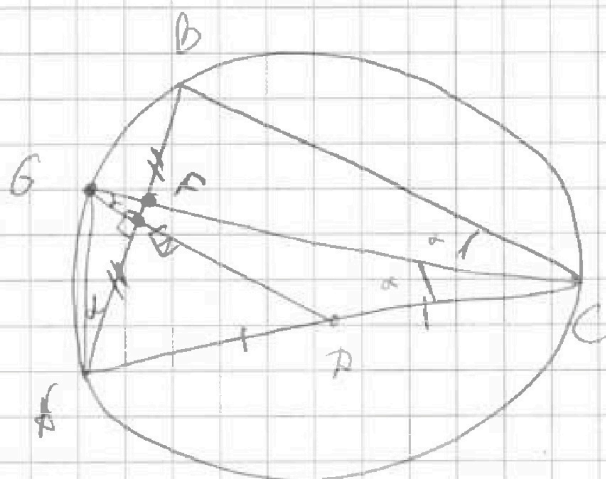
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Т.к. $\angle GCB = \angle GCA$, то они опираются на GB и GA, которые также равны, т.к. радиусы окружности постоянны $\left(2R = \frac{GB}{\sin \alpha} = \frac{GA}{\sin \alpha} \right)$

GE - медиана в равнобедренном треугольнике, значит и высота. $\angle DEB = 90^\circ$. PE - средняя линия $\triangle ABC \Rightarrow PE \parallel BC$ и $\angle AEC = 180 - \angle DEB = 90^\circ$. Т.к. $\angle ABC = 90^\circ$, то AC - диаметр окружности, а PA = PC - радиусы. $\angle AGA = 90^\circ$, т.к. опирается на AC.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 + \frac{6}{y^3} = y^3 + \frac{6}{z^3} = z^3 + \frac{6}{x^3}$$

$$1 \text{ и } 2: \quad x^3 - y^3 = \frac{6}{z^3} - \frac{6}{y^3} = \frac{6(y^3 - z^3)}{z^3 y^3} \quad (4)$$

$$2 \text{ и } 3: \quad y^3 - z^3 = \frac{6}{x^3} - \frac{6}{z^3} = \frac{6(z^3 - x^3)}{x^3 z^3} \quad (5)$$

$$1 \text{ и } 3: \quad x^3 - z^3 = \frac{6}{x^3} - \frac{6}{y^3} = \frac{6(y^3 - x^3)}{x^3 y^3} \quad (6)$$

$$(4) \cdot (5) \cdot (6) = (x^3 - y^3) \cdot (y^3 - z^3) \cdot (x^3 - z^3) = \frac{6^3}{x^6 y^6 z^6} \times (y^3 - z^3) \times (z^3 - x^3) \times (y^3 - x^3) = (y^3 - x^3)(z^3 - x^3)(y^3 - z^3)$$

Т.к. не все числа x, y, z равны между собой, то хотя бы одно из уравнений $(y^3 - x^3)$, $(z^3 - x^3)$, $(y^3 - z^3)$ будет не равно 0. Поэтому обе части можно сократить на $(y^3 - x^3)(z^3 - x^3)(y^3 - z^3)$

$$1 = \frac{6^3}{x^6 y^6 z^6} \Rightarrow x^6 y^6 z^6 = 6^3 \Rightarrow x^2 y^2 z^2 = 6$$

$$xyz = \pm 6 \text{ или } xyz = -6$$

Ответ: ± 6 .



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AL^2 = 10 - x^2$$

$$AL^2 = 5 - (5-x)^2$$

$$10 - x^2 = 5 - 25 + 10x - x^2$$

$$10x = 30 \Rightarrow x = 3$$

$$AL^2 = 10 - 9 = 1 \Rightarrow AL = 1$$

$$\cos d = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5} \Rightarrow \sin d = \frac{\sqrt{5}}{4} \quad \cos d = \frac{1}{4}$$

$$\tan \frac{d}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos d}{1 + \cos d}} = \sqrt{\frac{0,75}{1,25}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$n = 0,1k \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \Rightarrow 0,1k = \frac{n}{\sqrt{\frac{3}{5}}} = \frac{\sqrt{5}n}{\sqrt{3}}$$

$$BO_1 = BA - n = \sqrt{5} - n$$

$$\frac{0,1k}{LA} = \frac{BO_1}{BA} \Rightarrow 0,1k = \frac{n}{\sqrt{\frac{3}{5}}} = \frac{\sqrt{5} - n}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}n}{\sqrt{3}}$$

$$n\sqrt{5} = \sqrt{3} - \sqrt{\frac{3}{5}}n$$

$$n\left(\sqrt{5} + \sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \sqrt{3}$$

$$n = \frac{\sqrt{15}}{5 + \sqrt{3}}$$

$$\sqrt{5} - \sqrt{3}n = 5n$$

$$n = \frac{\sqrt{15}}{5 + \sqrt{3}}$$

Ответ: а) $\frac{5\sqrt{15}}{3}$ б) $\frac{\sqrt{15}}{5 + \sqrt{3}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

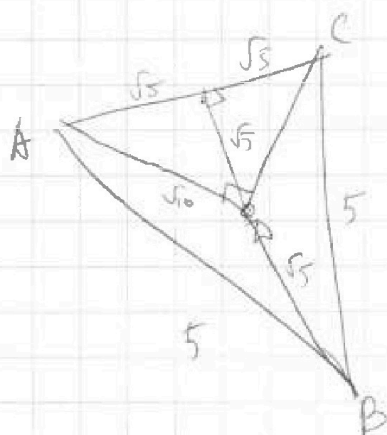
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$SA^2 = SB^2 - 45 = (20 - 6\sqrt{5})^2 - 45 = 400 - 240\sqrt{5} + 180 - 45 =$$

$$= 535 - 240\sqrt{5} < 0$$

Есть корректный ответ целого числа.



$$BS^2 = SA^2 + BD^2 = SA^2 + 5$$

$$SD^2 = SA^2 + AD^2 = SA^2 + 10$$

$$SA^2 - SB^2 = 5 \Rightarrow SA + SB \cdot SA - SB = \frac{5}{5 + 2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{5(5 - 2\sqrt{5})}{5} = 5 - 2\sqrt{5}$$

$$SA - SB = 5 - 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow SA = 5 \cdot SB = 2\sqrt{5}$$

$$SA + SB = 5 + 2\sqrt{5}$$

$$SD^2 = \frac{SA^2 + SB^2}{2} = \frac{25 + 20}{2} = 22.5 \Rightarrow SD = \sqrt{22.5}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{15} \cdot 15 = 5\sqrt{15} \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = \frac{1}{2} (\sqrt{10})^2 = 5$$

$$V = \frac{1}{3} \sqrt{15} \cdot 5 = \frac{5\sqrt{15}}{3}$$

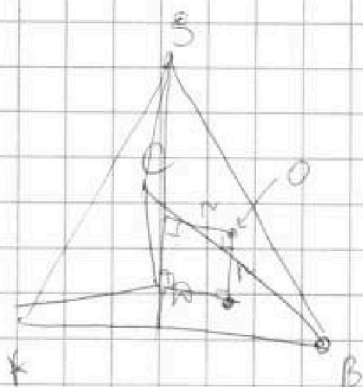
На одной странице можно оформлять **только одну задачу.**

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7


МФТИ

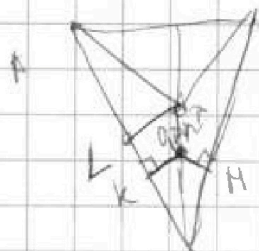
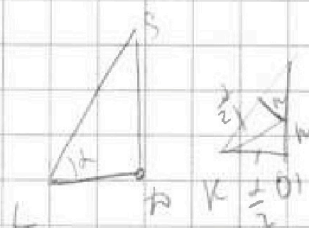
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



O_1 - промислен О на АВСД

Центр шара O : он находится на расстоянии r от $ABCD$ и на расстоянии r от SP .

изверху:


$$C \quad O, K \perp AB$$
$$O_1M \perp BC$$


Lyrics ~~SAB~~ m - rd SAB ~~SAB~~

компонента под углом α к ~~горизонту~~^{АВСД},

$$\log \frac{1}{2} = \frac{n}{0,4}$$

Заметим, что O лежит на BD — а это биссектриса

$\angle ABC \Rightarrow O, K \approx O, M$ и на-тб S СВ равные наклонные

ног және қ. Мағейм қ.

$$\sin 2 = \frac{SD}{AL} \quad (AL \perp AB)$$



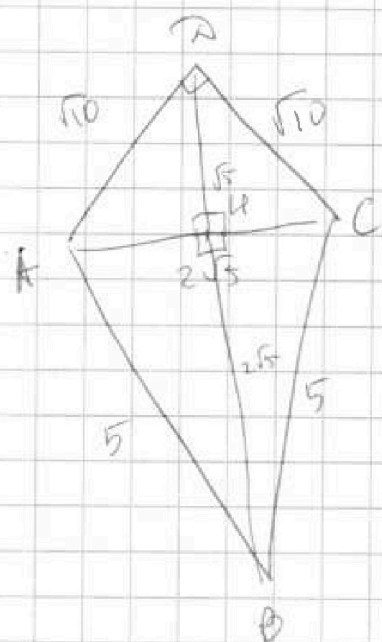
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AC = \sqrt{2} \cdot AD \Rightarrow \angle ADC = 90^\circ$$

DM - медиана и высота в $\triangle ADC$,

BN' - медиана и высота в $\triangle ABC$,

замечаем, что $N' = N$, т.к. $\angle DAC =$

$$= \angle ABC \text{ и } AN' = AN$$

$$BN = \sqrt{25 - 5} = 2\sqrt{5}$$

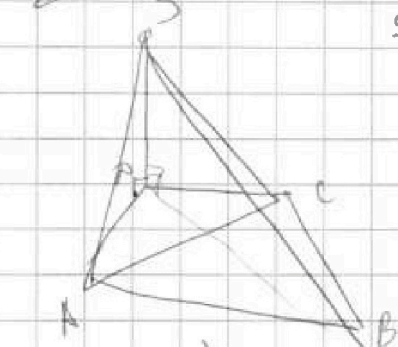
$$AN = \sqrt{10 - 5} = \sqrt{5}$$

SD - высота пирамиды $\Rightarrow SD \perp ABCD$.

$$V = \frac{1}{3} h \cdot S = \frac{1}{3} SD \cdot S_{ABCD}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{10})^2 + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = \frac{1}{2} \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 20 = 15$$

$$SA^2 =$$



$$SA^2 = SN^2 + AN^2 = SN^2 + 10$$

$$SB^2 = SN^2 + BN^2 = SN^2 + 20$$

$$SB^2 - SA^2 = 10 = (SA + SB) \cdot (SB - SA) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SB - SA = \frac{10}{5 + 2\sqrt{5}} = \frac{10(5 - 2\sqrt{5})}{5} = 2(5 - 2\sqrt{5})$$

$$= 10 - 4\sqrt{5}$$

$$SB + SA = 5 + 2\sqrt{5} \Rightarrow SB = 10 - 2\sqrt{5}$$

$$SB - SA = 10 - 4\sqrt{5} \Rightarrow SA = 2\sqrt{5} - 5$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

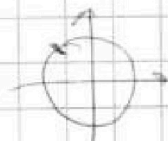
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$\sin 2x$~~
 ~~$\cos 2x$~~



$$\frac{10 \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\sin x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \cos x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\cos x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} =$$

$$= \frac{-\sin x - \cos x}{\sin x - \cos x}$$

$$\frac{10 \sin x \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x}{-(\cos x + \sin x)} = -(\cos x + \sin x)$$

$$- \cos^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = \cos^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x \cos x$$

$$2 \cos^2 x$$

$$\ln(x+3)$$

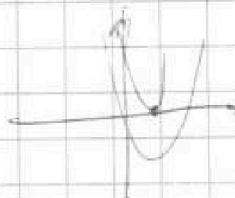
$$b = a \cdot d$$

$$c = a \cdot d^2$$

$$(a; ad; ad^2)$$

$$abc = a^3 d^3 = 2^{90} \cdot 19^{90}$$

$$ad = 2^{30} \cdot 19^{30} = b$$



$$\ln 3 = -(x+2)$$

$$x =$$

$$a=1$$

$$d = 2^{30} \cdot 19^{30}$$

$$\ln^2(x+5) - (x+2) \ln(3x+9) + \ln 3 \ln 19$$

$$\ln^4/x$$

$$\ln 3 \cdot (x+3)$$

$$\ln(x+3) (\ln(x+5) - 3(x+2) + \ln 5) \geq 0$$

$$\ln(x+3) (\ln 3(x+3))$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1 + \tan^2 2}{\tan^2 2 \left(\frac{1}{\cos^2 2} - 1 \right)} = \frac{1}{121}$$

$$1 + \tan^2 2 = \frac{1}{\cos^2 2}$$

$$\frac{1}{\sin^2 2 \left(\frac{1}{\cos^2 2} - 1 \right)} = \frac{1}{121}$$

$$121 = \sin^2 2 \left(\frac{1}{\cos^2 2} - 1 \right)$$

$$121 = \frac{\sin^2 2 (1 - \cos^2 2)}{\cos^2 2} = \frac{\sin^2 2 \cdot \sin^2 2}{\cos^2 2}$$

$$11 = \frac{\sin 2 \cdot 2 \sin 2 \cdot \cos 2}{\cos^2 2 - \sin^2 2}$$

$$11 \cos^2 2 - 11 \sin^2 2 = 2(1 - \cos^2 2) \cos 2$$

$$11 \cos^2 2 - 11 + 11 \cos^2 2 = 2 \cos 2 - 2 \cos^3 2$$

$$2 \cos^3 2 + 22 \cos^2 2 - 2 \cos 2 - 11 = 0$$

$$2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{22}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} - 11$$

$$\cos^2 2 = \frac{1}{2} \quad -\sqrt{2}$$

$$\cos^2 2 = 1$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 1,6 \\ \hline 126 \\ + 21 \\ \hline 33,6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64,1 \\ \times 4 \\ \hline 256,4 \\ + 33,6 \\ \hline 290,0 \end{array}$$

$$\frac{290}{21}$$



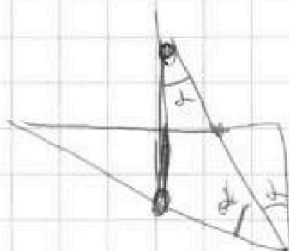
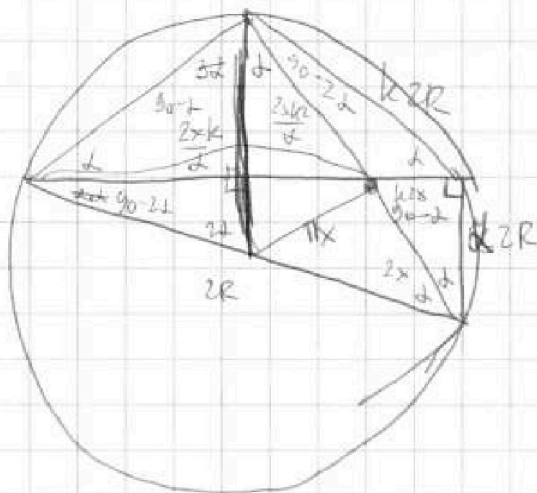
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{2R \cdot \sin 2d \cdot \sin d}{2}$$

$$\frac{2xk^2}{2xk^2 + 2x}$$

$$2R \cos 2d$$

$$R \cdot 2 \sin^2 d \cdot \cos d$$

$$R$$

$$\frac{k \cdot 2R}{2xk^2 + 2x}$$

$$= \frac{k \cdot 2x}{d \cdot 2R} = \frac{x \cdot k^2}{x \cdot R}$$

$$\frac{xk}{Rd} = \frac{kx}{Rd} = \frac{kRd}{xk^2 + xd}$$

$$k^3 x^2 + kx^2 d = kR^2 d^2$$

$$x^3 + \frac{6}{y^3} = y^3 + \frac{6}{z^3} = z^3 + \frac{6}{x^3}$$

$$x^3 - y^3 + \frac{6}{y^3} - \frac{6}{z^3} = 0 \quad (x^3 - y^3) =$$

$$x^3 - y^3 = \frac{6}{y^3 z^3} (y^3 - z^3) \quad 1 = \frac{6^3}{x^6 y^6 z^6}$$

$$x^3 - z^3 = \frac{6}{x^3 y^3} (y^3 - x^3) \quad (xyz)^6 = 6^3$$

$$y^3 - z^3 = \frac{6}{x^3 z^3} (z^3 - x^3) \quad || \quad xyz = \sqrt[6]{6^3}$$



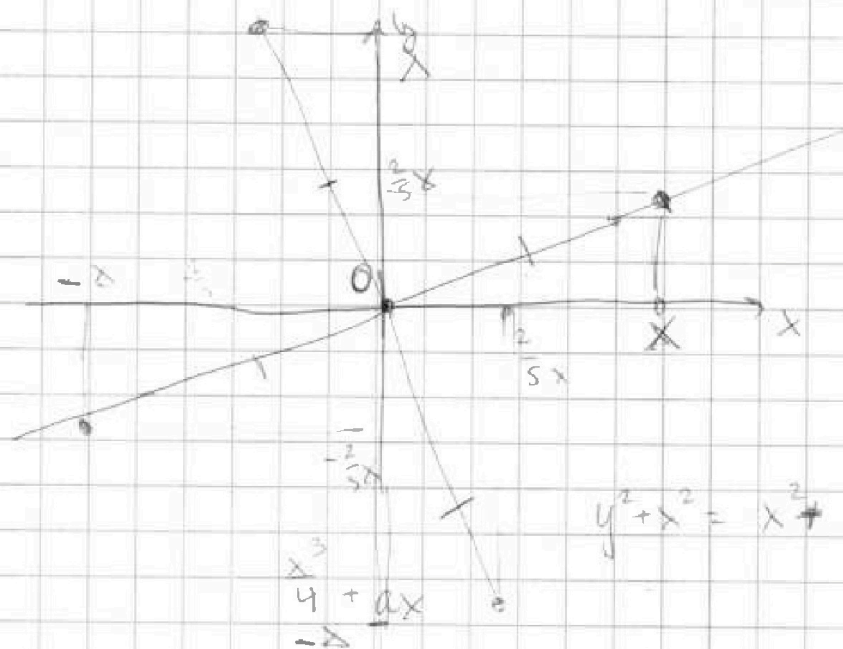
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y^2 + x^2 = x^2 + \frac{4}{25}x^2 = \frac{29}{25}x^2$$

$$y \in \frac{2}{5}x = \frac{x^3}{4} + ax$$

$$x = \frac{\left(-\frac{2}{5}x\right)^3}{4} - \frac{2}{5}x \cdot a = -\frac{8x^3}{125 \cdot 4} - \frac{2}{5}x \cdot a$$

$$-x = \frac{8x^3}{125 \cdot 4} + \frac{2}{5}x \cdot a$$

$$-\frac{2}{5}x = \frac{-x^3}{4} + xa$$

$$\frac{x^3}{4} + \left(a - \frac{2}{5}\right)x = 0$$

$$= \frac{-625 - 16}{5} = -142a$$

$$\frac{2x^3}{125} + x\left(\frac{2}{5}a + 1\right) = 0$$

$$x = 0$$

$$x^2 + 4a - \frac{8}{5} = 0$$

$$x = \sqrt{\frac{8}{5} - 4a}$$

$$42a = -125 - \frac{16}{5}$$

$$\frac{2x^2}{125} + \frac{2}{5}a + 1 = 0$$

$$2x^2 = -125 - 50a = \frac{16}{5} - 8a$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ED = R \cdot \cos 2\alpha$$

$$BC = 2R \cdot \cos 2\alpha$$

$$4x^2 = \frac{4R^2 \sin^2 \alpha \cos^4 2\alpha}{\cos^4 \alpha} + 4R^2 \cos^2 2\alpha$$

$$11x^2 = R^2 \cos^2 2\alpha + 4R^2 \cdot \frac{\sin^6 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{11}{4} = \frac{\cos^2 2\alpha + 4 \frac{\sin^6 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{4 \sin^2 \alpha \cos^2 2\alpha}{\cos^2 \alpha} + 4 \cos^2 2\alpha}$$

$$\frac{11 \sin^2 \alpha \cos^2 2\alpha}{\cos^2 \alpha} + 11 \cos^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha + 4 \frac{\sin^6 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{11 \sin^2 \alpha \cos^2 2\alpha}{\cos^2 \alpha} + 10 \cos^2 2\alpha - 4 \frac{\sin^6 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 0$$

$$11 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 2\alpha + 10 \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 2\alpha - 4 \sin^6 \alpha = 0$$

$$11 \sin^2 \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha)^2 + 10 (1 - \sin^2 \alpha)^2 (1 - 2 \sin^2 \alpha)^2 - 4 \sin^6 \alpha = 0$$

$$11 \sin^2 \alpha (1 - 4 \sin^2 \alpha + 4 \sin^4 \alpha) + 10 (1 - 2 \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha) \times$$

$$\times (1 - 4 \sin^2 \alpha + 4 \sin^4 \alpha) - 4 \sin^6 \alpha = 0$$

$$(1 - 6 \sin^2 \alpha + 13 \sin^4 \alpha - 12 \sin^6 \alpha + 4 \sin^8 \alpha)$$

$$11 \sin^2 \alpha - 44 \sin^4 \alpha + 44 \sin^6 \alpha + 10 - 20 \sin^2 \alpha + 10 \sin^4 \alpha$$

$$10 - 60 \sin^2 \alpha + 130 \sin^4 \alpha - 120 \sin^6 \alpha + 40 \sin^8 \alpha - 4 \sin^6 \alpha =$$

$$= 40 \sin^8 \alpha - 124 \sin^6 \alpha - 80 \sin^4 \alpha + 26 \sin^2 \alpha - 49 \sin^2 \alpha + 10$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

