



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Решите уравнение

$$4 \operatorname{tg} 2x + 1 + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $3^{240} \cdot 7^{240}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2(x+2) - (x+1)\ln(4x+8) + (\ln 4)\ln(x+2) \geq 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -2x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 5x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC . Лучи DE и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{11}}$.

6. [5 баллов] Числа x , y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} = z^3 + \frac{10}{x^3}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения xyz .

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{10}$, $AD = DC = 2$, $AC = 2\sqrt{2}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB , SBC и ребра SD .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4 \operatorname{tg} 2x + 1 + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$
$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} x)} \quad \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}}$$
$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{ctg} x - 1}{\operatorname{ctg} x + 1} = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$$
$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Тогда исходное уравнение перепишем как:

$$\frac{8 \operatorname{tg} x}{(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} x)} + \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = -1$$

$$\cancel{8 \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg} x)} + \cancel{1 - \operatorname{tg} x} = \cancel{(1 - \operatorname{tg}^2 x)} = \operatorname{tg}^2 x$$

$$\cancel{8 \operatorname{tg}^2 x} + \cancel{8 \operatorname{tg} x} + 1 - \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^2 x - 1$$

$$\cancel{7 \operatorname{tg}^2 x} + \cancel{7 \operatorname{tg} x} + 2 = 0$$

$$8 \operatorname{tg} x + (1 - \operatorname{tg} x)^2 = -(1 - \operatorname{tg}^2 x)$$

$$8 \operatorname{tg} x + 1 - 2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 x - 1$$

$$6 \operatorname{tg} x = -2 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = \arctg \left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \arctg \left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порядк QR-кода непустым!



a, b, c - геом. прогрессия

q - шаг прогрессии

a, aq, aq^2

a - целое

q - рациональное и такое, что aq^2 - целое.

$$abc = a^3 q^3 = 3^{240} \cdot 7^{240}$$

$$(aq)^3 = (3^{80} \cdot 7^{80})^3 \Rightarrow aq = 3^{80} \cdot 7^{80}$$

1) a целое и q целое $\Rightarrow a = \pm 3^m 7^n, q = \pm 3^{80-m} 7^{80-n}$

3 в степени от 0 до 80 вариантов 81

7 в степени от 0 до 80

и знак числа $+$ или $-$

кол-во вариантов числа a

q - однозначно определяется a .

2) a целое; $q = \pm \frac{3^{80-t}}{7^t}; a = \pm 3^m 7^t$

$$m - t = 80 = 2^4 \cdot 5$$

$$1 \leq t \leq 80 \quad (2t - t = 80)$$

$$m \geq 2t \text{ - чтобы } aq^2 \text{ - целое}$$

$$t \in \mathbb{N}$$

Чтобы n было целым:

$$m - t = k \cdot n, \text{ где } 80 : k \Rightarrow k = 5, 10, 2, 4, 40, 8, 20, 16, 80$$

$\Rightarrow m = (81, 41, 21, 18, 11, 9, 6, 5, 3)_n \rightarrow$ всего 9 вариантов

Значит $a = \pm 3^m 7^t$ где m - 9 вариантов, t - 81 вариант, q от a определяется однозначно
 всего вариантов $2 \cdot 9 \cdot 81$

3) a - целое; $q = \pm \frac{3^{80-t}}{7^t}$ - аналогично предыдущему случаю $2 \cdot 81 \cdot 9$ вариантов

4) $a = \pm 3^m 7^t; q = \pm \frac{1}{3^n 7^f}$ Тогда для m и n 9 вариантов, для t и f 9 вариантов, всего $2 \cdot 9 \cdot 9 = 162$ вариантов

$$\sum = 2 \cdot 81 \cdot 81 + 4 \cdot 9 \cdot 81 + 2 \cdot 81 = 2 \cdot 81 (81 + 18 + 2) = 2 \cdot 81 \cdot 101 = 162 \cdot 100 + 162 = 16362$$

Ответ: 16362

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\ln^2(x+2) - (x+1) \ln(4x+8) + \ln 4 \cdot \ln(x+2) \geq 0$$

$$\ln^2(x+2) - (x+1) \ln(4(x+2)) + \ln 4 \cdot \ln(x+2) \geq 0$$

$$\ln^2(x+2) - (x+1) (\ln 4 + \ln(x+2)) + \ln 4 \cdot \ln(x+2) \geq 0$$

$$\ln(x+2) (\ln(x+2) - (x+1)) + \ln 4 (\ln(x+2) - (x+1)) \geq 0$$

$$(\ln(x+2) - (x+1)) (\ln(x+2) + \ln 4) \geq 0 \quad \begin{array}{l} x+2 > 0 \Rightarrow x > -2 \\ (\ln(x+2) \nearrow) \end{array}$$

$$\ln(x+2) = -\ln 4$$

$$\ln(x+2) = \ln \frac{1}{4} \quad \text{т.к. } \ln(t) \text{ монотонно возрастает при } t > 0$$

$$\Rightarrow x+2 = \frac{1}{4} \quad x = -\frac{7}{4}$$

$$\ln(x+2) = x+1$$

$$x+2 = e^{x+1}$$

возьмем ф-цию $f(x) = e^{x+1} - x - 2$

$$f'(x) = e^{x+1} - 1 = 0 \Rightarrow e^{x+1} = 1 \Rightarrow x = -1$$

$$x > -1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ возрастает}$$

$$x < -1 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ убывает} \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow x = -1 \text{ точка} \\ \text{максимум } f(x) \end{array} \right\}$$

$$f(-1) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \text{при всех } x \neq -1 \quad f(x) > 0 \Rightarrow e^{x+1} > x+2$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ единственное решение ур-ния } x+2 = e^{x+1}$$

$$\ln(x+2) + \ln 4 \quad \begin{array}{c} - \quad + \\ \hline x \end{array} \quad \text{(сравниваем с 0)}$$

$$\ln(x+2) - (x+1) \quad \begin{array}{c} - \quad - \quad - \\ \hline x \end{array} \quad \text{(сравниваем с 0)}$$

$$(\ln(x+2) - (x+1)) (\ln(x+2) + \ln 4) \geq 0$$

$$\Downarrow \\ -2 < x \leq -\frac{7}{4} \quad \text{и} \quad x = -1$$

$$\text{Ответ: } x \in (-2; -\frac{7}{4}] \cup \{-1\}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

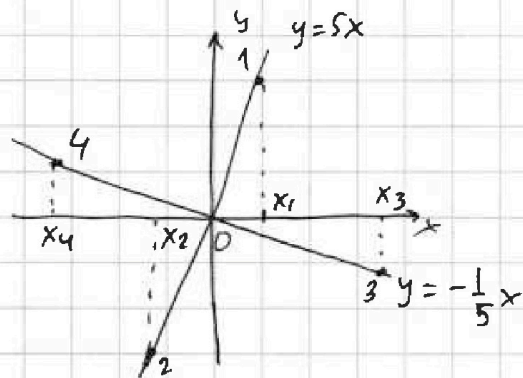
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Диагонали квадрата перпендикулярны \Rightarrow вторая диагональ лежит на прямой $\perp y=5x$
 \Rightarrow это прямая $y = -\frac{1}{5}x$

т.к. $-\frac{1}{5} \cdot 5 = -1$ ($k_1 \cdot k_2 = -1$)

$-2x^3 - ax = 5x$ $x=0$ нас не интересует т.к. ищем точки пересечения координата вершин квадрата

$-2x^2 - a = 5$

$2x^2 = -a - 5$

$x^2 = \frac{-a-5}{2}$

$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-a-5}{2}} \Rightarrow a \leq -5$

$-2x^3 - ax = -\frac{1}{5}x$

$2x^2 = \frac{1}{5} - a \Rightarrow x^2 = \frac{1-5a}{10}$ $x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{1-5a}{10}} \Rightarrow a \leq \frac{1}{5}$

Чтобы это был квадрат, расстояние от центра до каждой из вершин должно быть одинаково. От 1 и 2 вершин оно одинаково т.к. они лежат на одной прямой и расстояние от x_1 и x_2 до 0 одинаково. Аналогично для 3 и 4 вершин. Тогда достаточно доказать, что потребовать, чтобы расстояния от 1 и 3 вершин равно: $x_1^2 + y_1^2 = x_3^2 + y_3^2$

$y_1^2 = 25x_1^2 = -\frac{25}{2}(a+5)$ $y_3^2 = \frac{1}{25}x_3^2 = \frac{1-5a}{250}$

$-\frac{25}{2}(a+5) - \frac{a+5}{2} = \frac{1-5a}{250} + \frac{1-5a}{10}$

$-(3(a+5)) = \frac{1-5a+25-125a}{250}$

$-13 \cdot 250(a+5) = 26 - 130a$ $a = -\frac{313}{60}$

$-13 \cdot 250(a+5) = 13(2-10a)$

$-250a - 250 \cdot 5 = 2 - 10a$

$240a = -250 \cdot 5 - 2$

$240a = -1252$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{d}{2}$ — длина половины диагонали

$$S = \frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 2(-13(a+5)) = -26\left(-\frac{313}{60} + 5\right) =$$
$$= -26\left(\frac{-313 + 300}{60}\right) = \frac{-26 \cdot (-13)}{60} = \frac{169 \cdot 2}{60} = \frac{169}{30}$$

Ответ: $a = -\frac{313}{60}$ $S = \frac{169}{30}$

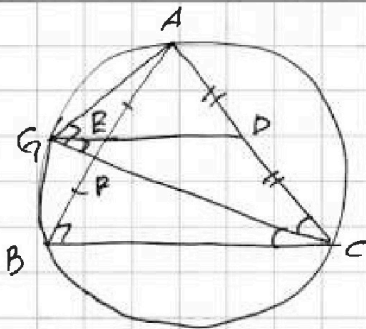
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $\angle C = 2d \Rightarrow \angle GCD = d = \angle GCB$
 $\angle DGC = \angle GCB = d$ как как рассматриваемые при параллельных прямых.

$\Rightarrow \triangle GDC$ - равнобедренный
 $\Rightarrow CD = GC = AD$ (D - середина AC)
 $\angle ADG = \angle C = 2d$

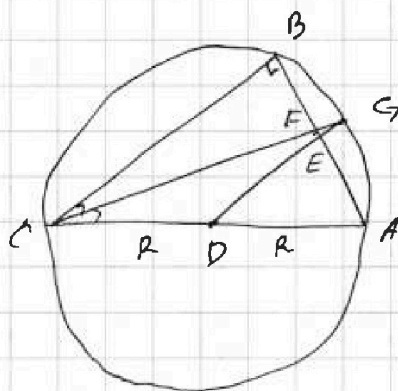
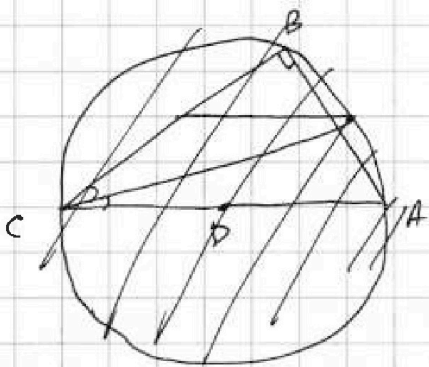
т.к. $\angle ADG = 2\angle ACG$ и $AD = DG \Rightarrow D$ - это центр окружности

$\Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$ т.к. опирается на диаметр

$\Rightarrow D$ - центр окружности, описанной около $\triangle AGC$

$\Rightarrow \angle AGC = 90^\circ$ т.к. опирается на диаметр этой окруж.

ко $\leftarrow AD \angle ABC = \angle AGC$ т.к. они опираются на одну дугу $\Rightarrow \angle ABC = 90^\circ \Rightarrow D$ центр Ω .



Ответ: $\angle B = 90^\circ$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Преобразуя каждое из 3х уравнений, получим:

$$\begin{cases} (xy^2)^3 + 10z^3 = y^6z^3 + 10yz^3 \\ (xy^2)^3 + 10x^3 = 2^6x^3 + 10z^3 \\ (xy^2)^3 + 10y^3 = x^6y^3 + 10x^3 \end{cases}$$

$$y^6z^3 + 10y^3 - 10z^3 = 2^6x^3 + 10z^3 - 10x^3 = x^6y^3 + 10x^3 - 10y^3$$
$$y^6z^3 + 10y^3 + 10x^3 = 2^6x^3 + 20z^3$$

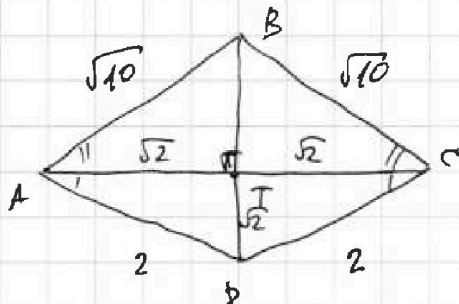
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!



$$BT^2 + 2 = 10 \Rightarrow BT = 2\sqrt{2}$$

$$PT^2 + 2 = 4 \Rightarrow PT = \sqrt{2}$$

Площадь $SPD =$

$$a) S_{\text{основания}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 2 + 4 = 6$$

Пусть $SD = h \Rightarrow$

$$SB^2 = h^2 + 8 \cdot 2 = h^2 + 18$$

$$SA^2 = h^2 + 4$$

$$(SA + SB)^2 = 8 + 10 + 8\sqrt{5} = SA^2 + SB^2 + 2SA \cdot SB = 2h^2 + 4 + 18 + 2SA \cdot SB$$

$$8\sqrt{5} = 2h^2 + 4 + 2 \cdot SA \cdot SB$$

$$4\sqrt{5} = h^2 + 2 + SA \cdot SB$$

$$2(2\sqrt{5} - 1) - h^2 = SA \cdot SB$$

возведем в квадрат, помним, что левая часть должна быть больше 0.

$$4(2\sqrt{5} - 1)^2 - 4h^2(2\sqrt{5} - 1) + h^4$$

$$h^4 + 22h^2 + 4 \cdot 18$$

$$22h^2 + 4h^2(2\sqrt{5} - 1) = 4(10 + 1 - 4\sqrt{5}) - 72$$

$$2h^2(11 - 4 + 8\sqrt{5}) = 12 - 16\sqrt{5}$$

$$h^2(7 + 8\sqrt{5}) = 6 - 8\sqrt{5}$$

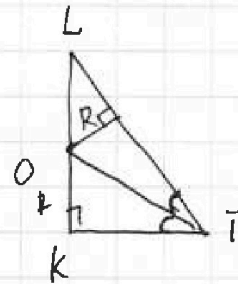
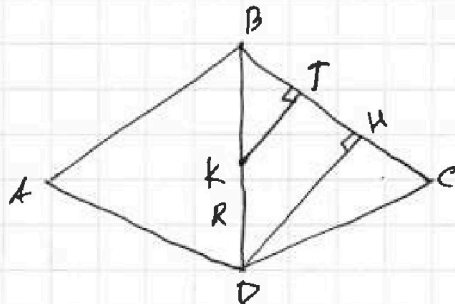
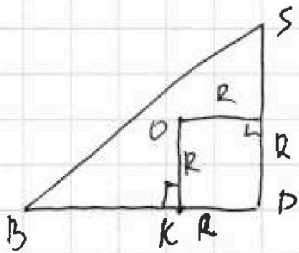
$$h = \sqrt{\frac{6 - 8\sqrt{5}}{7 + 8\sqrt{5}}}$$

$h^2 < 0 \Rightarrow$ подходит пог

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \sqrt{\frac{6 - 8\sqrt{5}}{7 + 8\sqrt{5}}} = 2 \sqrt{\frac{6 - 8\sqrt{5}}{7 + 8\sqrt{5}}}$$

Вот только $6 - 8\sqrt{5} < 0$, поэтому h не существует.

б) Т.к. шар касается SAB и $SBC \Rightarrow$ он лежит в биссектрисе $\angle B$ и центр шара лежит в биссекторной плоскости $\angle B$ этих плоскостей $\Rightarrow O$ (центр) \in BDS .



$\angle KTL$ - это угол между SBC и DBC .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

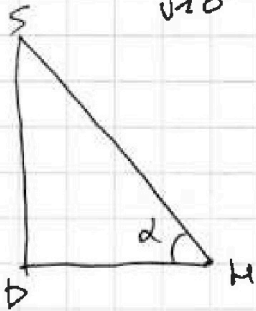


$$\frac{1}{2} BK \cdot BC = \frac{1}{2} BD \cdot DC \cdot \sin \angle BDC \quad \text{из } \triangle DTC \text{ (пункт а)}$$

$$\angle BDC = 45^\circ$$

$$DK \cdot \sqrt{10} = 3\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 6$$

$$\Rightarrow DK = \frac{6}{\sqrt{10}}$$



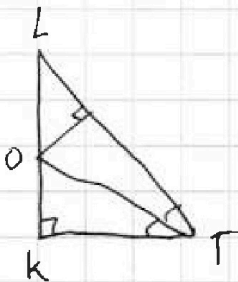
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{SD}{DH} = \frac{6 - 8\sqrt{5}}{7 + 8\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{6}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha/2)} \Rightarrow \operatorname{tg}^2(\alpha/2) \cdot \operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{tg}(\alpha/2) - \operatorname{tg} \alpha = 0$$

$$\operatorname{tg}(\alpha/2) = \frac{-2 + \sqrt{4 + 4 \operatorname{tg}^2 \alpha}}{2 \operatorname{tg} \alpha}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha/2) = \frac{-1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (\text{берем } + \sqrt{} \text{ т.к. } \alpha < 90^\circ)$$

$$\frac{KT}{DK} = \frac{BK}{BD} = \frac{3\sqrt{2} - R}{3\sqrt{2}} \Rightarrow KT = DK - \frac{DK}{3\sqrt{2}} R = \frac{6}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{5}} R$$



$$\angle OKT = \alpha/2 \Rightarrow \frac{R}{KT} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ — это число

KT — линейно зависит от R \Rightarrow если подставить числа, то отсюда можно найти R.

$$R = \frac{6}{\sqrt{10}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \frac{\operatorname{tg} \alpha/2}{\sqrt{5}} R \Rightarrow R \left(1 + \frac{\operatorname{tg} \alpha/2}{\sqrt{5}} \right) = \frac{6}{\sqrt{10}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$R \left(\frac{\sqrt{5} + \operatorname{tg} \alpha/2}{\sqrt{5}} \right) = \frac{6}{\sqrt{10}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$R = \frac{6 \operatorname{tg} \alpha/2}{\sqrt{2} (\sqrt{5} + \operatorname{tg} \alpha/2)} = \frac{3\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha/2}{\sqrt{5} + \operatorname{tg} \alpha/2}$$

Ответ: а) $2 \frac{\sqrt{6 - 8\sqrt{5}}}{7 + 8\sqrt{5}}$ б) $\frac{3\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha/2}{\sqrt{5} + \operatorname{tg} \alpha/2}$, $\operatorname{tg} \alpha/2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha}$,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{6 - 8\sqrt{5}}}{7 + 8\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{6}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{tg } 2x = \frac{2 \text{tg } x}{1 - \text{tg}^2 x} \quad \text{ctg}(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\text{ctg } x - 1}{\text{ctg } x + 1} = \frac{\frac{1}{\text{tg } x} - 1}{\frac{1}{\text{tg } x} + 1} = \frac{1 - \text{tg } x}{1 + \text{tg } x}$$

$$\frac{8 \text{tg } x}{1 - \text{tg}^2 x} + 1 + \frac{\text{ctg } x - 1}{\text{ctg } x + 1} = 0$$

$$\frac{8 \text{tg } x}{(1 - \text{tg } x)(1 + \text{tg } x)} + 1 + \frac{1 - \text{tg } x(1 - \text{tg } x)}{1 + \text{tg } x} = \frac{8 \text{tg } x + (1 - \text{tg } x)^2}{(1 - \text{tg } x)(1 + \text{tg } x)} = -1$$

$$x = \arctan(\frac{1}{3}) + \pi k$$

$$\begin{aligned} \text{tg}^2 x + 6 \text{tg } x + 1 &= \text{tg}^2 x - 1 \\ 6 \text{tg } x &= -2 \\ \text{tg } x &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

12 a, b, c - вещ. числа

a aq aq^2

$$a^3 \cdot q^3 = 3^{240} \rightarrow (aq)^3 = 3^{80} \rightarrow aq = 3^{80/3}$$

$$a = \pm 3^n \quad q = \pm 3^m$$

$$a = \pm 7^n \quad q = \pm 3^m$$

$$\ln^2(x+2) - (x+1) \ln(4x+8) + \ln 4 \ln(x+2) \geq 0 \quad [x \geq -2]$$

$$\ln^2(x+2) - (x+1) \ln(4(x+2)) + \ln 4 \ln(x+2)$$

$$\ln^2(x+2) - (x+1)(\ln 4 + \ln(x+2)) + \ln 4 \ln(x+2)$$

$$\ln^2(x+2) - (x+1) \ln 4 - (x+1) \ln(x+2) + \ln 4 \ln(x+2) =$$

$$\ln(x+2) (\ln(x+2) - (x+1)) + \ln 4 (\ln(x+2) - (x+1)) \geq 0$$

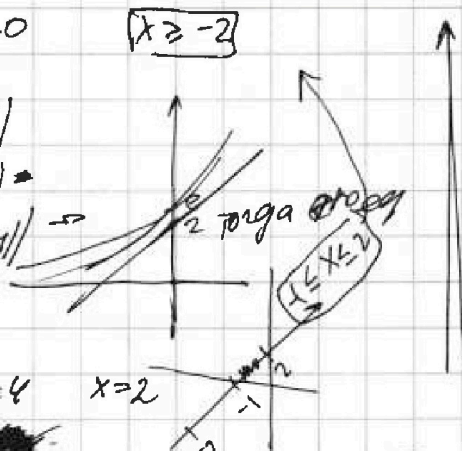
$$(\ln(x+2) - (x+1)) / (\ln(x+2) + \ln 4) \geq 0$$

$$\ln(x+2) = (x+1)$$

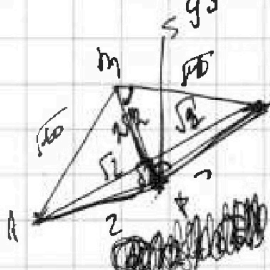
$$x+2 = e^{x+1}$$

$$\ln(x+2) = \ln(4) \Rightarrow x+2 = 4 \quad x = 2$$

$$(e^{x+1} - x - 2)' = e^{x+1} - 1$$



$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} \rightarrow (xy^2)^3 + 10z^3 = y^3 \cdot y^3 + 10y^3$$



$$SA^2 = h^2 + 4 > \sqrt{8}$$

$$SB^2 = h^2 + 18 > \sqrt{8}$$

$$SA + SB > 2\sqrt{18}$$

$$\sqrt{18} + \sqrt{18} = 2\sqrt{18}$$

$$(SA+SB)^2 = SA^2 + SB^2 + 2SA \cdot SB = 8 + 10 + 8\sqrt{5}$$

$$2h^2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{18} = 18 + 8\sqrt{5}$$

$$(8\sqrt{5} - 4) - 2h^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

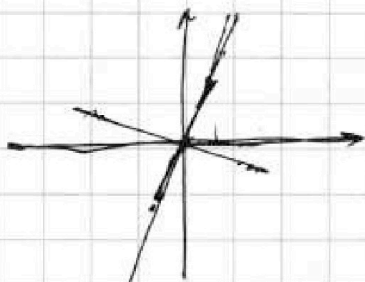
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



14



$$d_1 \rightarrow 5x$$

$$d_2 \rightarrow -\frac{1}{5}x$$

$$-2x^2 - ax = 5x$$

2 реж. отличных от 0.

$$2x^2 = -5 - a \Rightarrow a \leq -5$$

$$x^2 = -\frac{5+a}{2} \quad -5-a > 0 \quad a < -5$$

$$-2x^2 - ax = -\frac{1}{5}x \quad \frac{1}{5} - a > 0 \quad \frac{1}{5} \geq a$$

$$2x^2 = \frac{1}{5} - a$$

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$$

$$y_1 = -\frac{a}{2}(5+a)$$

$$y_2 = \frac{5a+a}{50}$$

$$y_2 = \frac{1}{25}x^2 = \frac{1-5a}{250}$$

$$\frac{1-5a}{10} + \frac{1-5a}{250} = \frac{25-125a+1-5a}{250}$$

$$= \frac{26-130a}{250}$$

$$-13(5+a) = \frac{26-130a}{250}$$

$$-13 \cdot 250 \cdot 5 - 13 \cdot 250 \cdot a = 26 - 130a$$

$$-13 \cdot 250 \cdot 5 - 26 = a(13 \cdot 250 - 130) = 13a(250 - 10) = 13 \cdot 240 \cdot a$$

$$-\frac{13(250 \cdot 5 + 2)}{12}$$

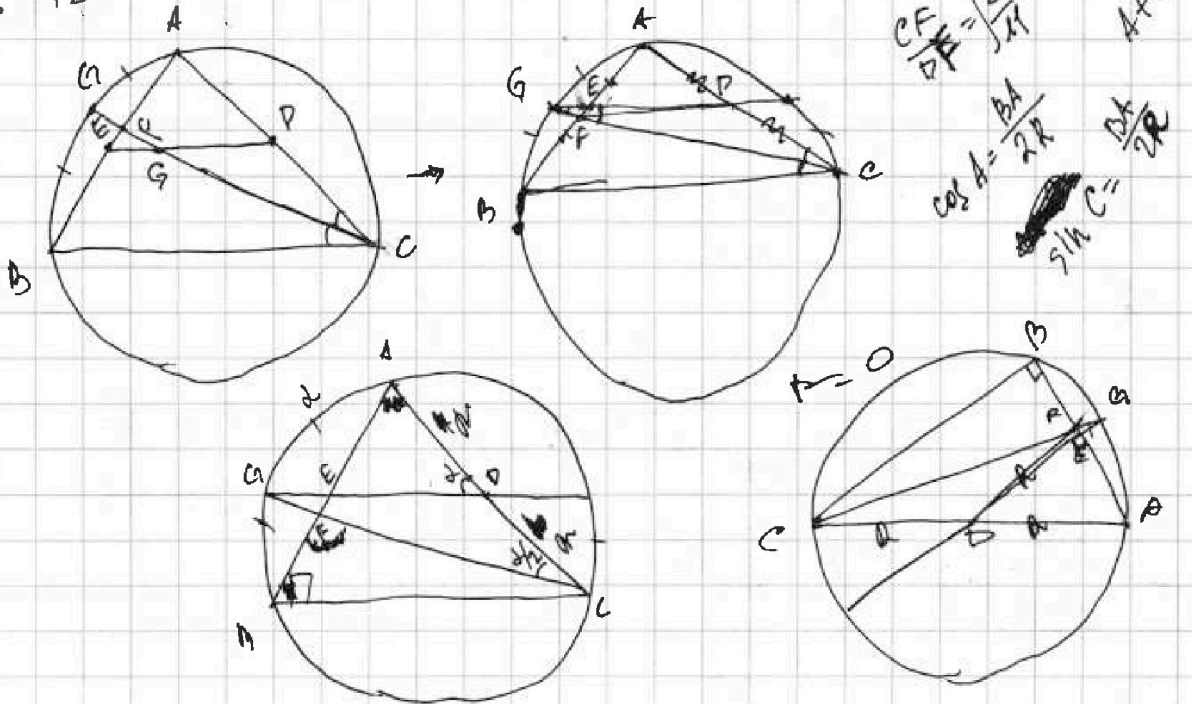
$$a = -\frac{(250 \cdot 5 + 2)}{240} = -\frac{1252}{240} = -\frac{313}{60}$$

$$\frac{1252}{12} \begin{array}{r} \frac{12}{12} \\ \frac{2}{26} \\ \frac{4}{12} \end{array} \Big| \frac{2}{313}$$

$$240 = 24 \cdot 5 \cdot 3$$

$$60 \cdot 5 = 300$$

15



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\angle C \rightarrow$ ~~BF~~ $\frac{BF}{CF}$ ~~f-ke sereruy~~ $\frac{BF}{FA} = \frac{CB}{2R}$

$\cos A = \frac{BA}{2R}$ ~~sin C =~~ $\frac{BA}{2R}$

$A + C = 90^\circ$

$\cos(A) = \cos(\frac{A}{2} - C) = \sin C$

$h^2 + 4 = SA^2$ $SB^2 = h^2 + 18$

$SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10}$ $(SA + SB)^2 = 2h^2 + 22 + 2SA \cdot SB$

$2SA \cdot SB = \frac{(8\sqrt{5}-4)^2}{4} - 2h^2$

$(h^2 + 4)(h^2 + 18) = (4\sqrt{5}-2)^2 + h^4 - 2h^2(4\sqrt{5}-2)$

$h^4 + 22h^2 + 4 \cdot 18 = (4\sqrt{5}-2)^2 + h^4 - 2h^2(4\sqrt{5}-2)$

$2h^2(11 + 4\sqrt{5}) = (4\sqrt{5}-2)^2 - 4 \cdot 18 = 80 + 4 - 16\sqrt{5} - 72 = 12 - 16\sqrt{5}$

$h^2(11 + 4\sqrt{5}) = 6 - 8\sqrt{5}$

$h = \sqrt{\dots}$

$\text{DK} \Rightarrow \sqrt{10} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 2 = 6$

$\text{DK} = \frac{6}{\sqrt{10}}$

$\text{tg } d = \sqrt{\frac{6-8\sqrt{5}}{7+8\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{6}}$

$\text{tg } \frac{d}{2} = \frac{2 \text{tg } \frac{d}{2}}{1 + \text{tg}^2 \frac{d}{2}}$

$(1 - \text{tg}^2 \frac{d}{2}) \text{tg } d = 2 \text{tg} \frac{d}{2}$

$\text{tg}^2 \frac{d}{2} \text{tg } d + 2 \text{tg} \frac{d}{2} - \text{tg } d = 0$

$\text{tg} \frac{d}{2} = \frac{-2 + \sqrt{4 + \text{tg}^2 d}}{\text{tg } d}$

$\sin \frac{d}{2} = \frac{\sin d}{2 \cos \frac{d}{2}} = \frac{\sin d}{\sqrt{2} \cdot 2 \cos \frac{d}{2}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$SA^2 = h^2 + 4$$

$$SB^2 = h^2 + 16$$

$$SD^2 = SA^2 + 14$$

$$SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10} = \sqrt{2}(2 + \sqrt{5})$$

$$\sqrt{h^2 + 4} + \sqrt{h^2 + 16} = 2\sqrt{2} + \sqrt{10}$$

$$(SA + SB)^2 = \dots$$

$h \geq 2$ ~~чуть~~ много

$h \rightarrow$ близко к 0.

$$y^6 z^3 + 10(y^3 z^3 - z^3) = z^6 x^3 + 10(z^3 - x^3)$$

$$\begin{cases} (xyz)^3 + 10z^3 = y^6 z^3 + 10y^3 \\ (xyz)^3 + 10x^3 = z^6 x^3 + 10z^3 \\ (xyz)^3 + 10y^3 = x^6 y^3 + 10x^3 \end{cases}$$

$$z^3(y^6 + z^3 x^3) = 10(z^3 - x^3 - y^3)$$

$$z^3(10 - y^6) = 10y^3$$

$$z^3 = \frac{10y^3}{10 - y^6}$$

$$y^3 = \frac{10x^3}{10 - x^6}$$

$$x^3 = \frac{10z^3}{10 - z^6}$$

$$(xyz)^3 = \frac{1000(xyz)^3}{(1)(1)(1)}$$

$$(1)(1)(1) = 1000$$

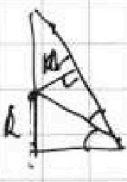
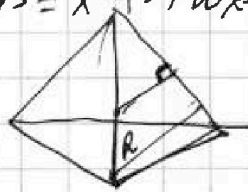
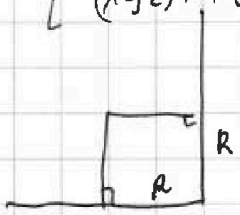
$$\frac{(10x^6)(10y^6)(10z^6)}{(x^6 - 10)(y^6 - 10)(z^6 - 10)} = 1000$$

$$\frac{10^9 x^6 y^6 z^6}{(x^6 - 10)(y^6 - 10)(z^6 - 10)} = 1000$$

$$2^2 \cdot 5^3 \quad \parallel \quad 2^3 \cdot 5^3$$

2 отхит, "1 пол."
 $1, y^6 \neq 10$
 $2^6 \neq 10$
 $2 < x, y$

$$\frac{6 - \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}}$$



$$1) \frac{10}{2^6} \rightarrow \frac{2^6}{2^6} = 1$$

$$x^3 = \frac{10z^3}{10 - z^6} = \frac{100y^3}{(10 - y^6)(10 - 100y^6)}$$

$$\frac{100y^3(10 - y^6)}{10(10 - y^6) - 100y^6}$$

$a, q \rightarrow$

1) a - целое $q = 2^k$ целое

2) a целое $q = \frac{7^k}{3^k}$

3) a целое $q = \frac{3^k}{2^k} \sim$ аккордовено

4) a целое $q = \frac{1}{2^k \cdot 3^k}$

$81 \cdot 2$ вар.

$$a = \frac{3^m}{2^t} \quad m > 3n$$

$$m - n = 80$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$h = 1$$

$$h = 2$$

$$h = 3$$

$0 \leq t \leq 80 \rightarrow 81$ вар.	$n \cup 3n$	$n \cup 9n$
	$n \cup 9n$	$n \cup 11n$
	$n \cup 27n$ X	$n \cup 13n$ X
	$n \cup 81n$ X	$n \cup 15n$ X
	$n \cup 243n$ X	$n \cup 17n$
		$n \cup 19n$ X
		$n \cup 21n$ (n=4)
		$n \cup 23n$ X
		$n \cup 25n$ X
		$n \cup 27n$ X
		$n \cup 29n$ X

$$\begin{aligned} a &= 3/13 \\ \frac{60}{60} \\ 2 \cdot 81 &= 162 \\ 162 - 100 &= 62 \\ 16200 \\ 162 \\ 16362 \end{aligned}$$

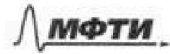
$$\frac{100}{60} \cdot \frac{1}{3} = \frac{100}{180}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

