МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 6

1. [4 балла] Решите уравнение
$$4\operatorname{tg} 2x + 1 + \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $3^{240} \cdot 7^{240}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство
$$\ln^2(x+2) - (x+1)\ln(4x+8) + (\ln 4)\ln(x+2) \geqslant 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -2x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 5x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC. Лучи DE и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{11}}$.

6. [5 баллов] Числа x, y и z не все равны между собой, и при этом
$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} = z^3 + \frac{10}{x^3}.$$
Найдите максимально возможное значение произведения xyz.

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{10}$, $AD = DC = 2$, $AC = 2\sqrt{2}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10}$. Найдите:

   а) объём пирамиды;

   б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB, SBC и ребра SD.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$4\,tg\,2x + 1 + ctg\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 0$

$tg\,2x = \frac{2\,tgx}{1-tg^2x} = \frac{2\,tgx}{(1-tgx)(1+tgx)}$ $\quad ctg\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{ctgx\,ctg\frac{\pi}{4} - 1}{ctgx + ctg\frac{\pi}{4}}$

$ctg\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow ctg\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{ctgx - 1}{ctgx+1} = \frac{1-tgx}{1+tgx}$

$ctgx = \frac{1}{tgx}$

Тогда исходное уравнение перепишем как:

$\frac{8\,tgx}{(1-tgx)(1+tgx)} + \frac{1-tgx}{1+tgx} = -1$

$\cancel{8\,tgx(1+tgx) + 1 - tgx = -(1-tg^2x) = tg^2x}$

$\cancel{8\,tg^2x + 8\,tgx + 1 - tgx = tg^2x - 1}$

$\cancel{7\,tg^2x + 7\,tgx + 2 = 0}$

$8\,tgx + (1-tgx)^2 = -(1-tg^2x)$

$8\,tgx + 1 - 2tgx + tg^2x = tg^2x - 1$

$6\,tgx = -2 \Rightarrow tgx = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = arctg\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = arctg\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

a, b, c — геом. прогрессия $\downarrow$ a, aq, aq^2

q — шаг прогрессии
a — целое
q — рациональное и такое, что aq^2 — целое.

$abc = a^3q^3 = 3^{240}\cdot 7^{240}$
$(aq)^3 = (3^{80}\cdot 7^{80})^3 \Rightarrow aq = 3^{80}\cdot 7^{80}$

1) a целое и q целое $\Rightarrow a = \pm 3^m 7^n$ $q = \pm 3^{80-m} 7^{80-n}$

3 в степени от 0 до 80
7 в степени от 0 до 80
и знак числа „+" или „−"

вариантов $81\cdot 81\cdot 2$ = кол-во вариантов числа a

q — однозначно определяется a.

2) a целое; $q = \pm\frac{7^{80-t}}{3^n}$; $a = \pm 3^m 7^t$

$m - n = 80 = 2^4\cdot 5$ $\quad 1 \le n \le 80$ $(2n - n = 80)$
$m \ge 2n$ — чтобы aq^2 — целое $\quad n \in \mathbb{N}$
Чтобы n было целым:
$m - n = k\cdot n$, где $80 \vdots k \Rightarrow k = 5, 10, 2, 4, 40, 8, 20, 16, 80$
$\Rightarrow m = (81, 41, 21, 17, 11, 9, 6, 5, 3)\cdot n \to$ всего 9 вариантов

Значит $a = \pm 3^m 7^t$ где m — 9 вариантов, t — 81 вариант,
q от a определяется однозначно
$\Downarrow$
всего варианов $2\cdot 9\cdot 81$

3) a — целое; $q = \pm\frac{3^{80-t}}{7^n}$ — аналогично предыдущему случаю $2\cdot 81\cdot 9$ вариантов

4) $a = \pm 3^m 7^t$; $q = \pm\frac{1}{3^n 7^f}$ Тогда для m и n 9 вариантов, для t и f 9 варианов, всего $2\cdot 9\cdot 9$ вариантов

q от a определяется однозначно

$\Sigma = 2\cdot 81\cdot 81 + 4\cdot 9\cdot 81 + 2\cdot 81 = 2\cdot 81(81 + 18 + 2) = 2\cdot 81\cdot 101$
$= 162\cdot 100 + 162 = 16\,362$

Ответ: 16362

$\ln^2(x+2) - (x+1)\ln(4x+8) + \ln 4 \cdot \ln(x+2) \geq 0$

$\ln^2(x+2) - (x+1)\ln(4(x+2)) + \ln 4 \cdot \ln(x+2) \geq 0$

$\ln^2(x+2) - (x+1)\left(\ln 4 + \ln(x+2)\right) + \ln 4 \cdot \ln(x+2) \geq 0$

$\ln(x+2)\left(\ln(x+2) - (x+1)\right) + \ln 4\left(\ln(x+2) - (x+1)\right) \geq 0$

$\left(\ln(x+2) - (x+1)\right)\left(\ln(x+2) + \ln 4\right) \geq 0$ $\qquad x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$

$(\ln(x+2) \nearrow)$

$\ln(x+2) = -\ln 4$

$\ln(x+2) = \ln\frac{1}{4}$ т.к. $\ln(t)$ монотонно возрастает при $t>0$

$\Rightarrow x+2 = \frac{1}{4}$ $\qquad x = -\frac{7}{4}$

$\ln(x+2) = x+1$

$x+2 = e^{x+1}$ $\qquad$ Возьмем ф-цию $f(x) = e^{x+1} - x - 2$

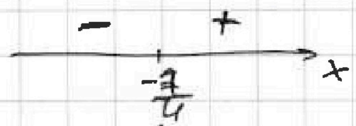
$f'(x) = e^{x+1} - 1 = 0 \Rightarrow e^{x+1} = 1 \Rightarrow x = -1$

$\left.\begin{array}{l} x > -1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ возрастает} \\ x < -1 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ убывает} \end{array}\right\} \Rightarrow$ $x=-1$ ~~точка~~ минимум $f(x)$

$f(-1) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow$ при всех $x \neq -1$ $f(x) > 0 \Rightarrow e^{x+1} > x+2$

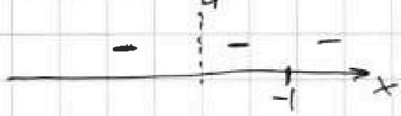
$\Rightarrow x = -1$ единственное решение ур-ния $x+2 = e^{x+1}$

$\ln(x+2) + \ln 4$



(сравниваем с 0)

$\ln(x+2) - (x+1)$



(сравниваем с 0)

$\left(\ln(x+2) - (x+1)\right)\left(\ln(x+2) + \ln 4\right) \geq 0$

$\Downarrow$

$-2 < x \leq -\frac{7}{4}$ и $x = -1$

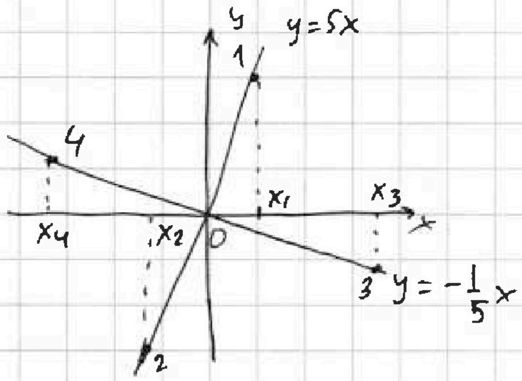
Ответ: $x \in \left(-2; -\frac{7}{4}\right] \cup \{-1\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Диагонали квадрата перпендикулярны => вторая диагональ лежит на прямой $\perp$ $y=5x$ => это прямая $y=-\frac{1}{5}x$

т.к. $-\frac{1}{5}\cdot 5=-1$ $(k_1\cdot k_2=-1)$

$-2x^3-ax=5x$ $\quad x=0$ нас не интересует т.к. ищем ~~точки~~ ~~пересе~~ координаты вершин квадрата

$-2x^2-a=5$

$2x^2=-a-5$

$x^2=\frac{-5-a}{2}$ $\qquad x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{-5-a}{2}}$ $\Rightarrow a\le -5$

$-2x^3-ax=-\frac{1}{5}x$

$2x^2=\frac{1}{5}-a \Rightarrow x^2=\frac{1-5a}{10}$ $\qquad x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{1-5a}{10}}$ $\Rightarrow a\le\frac{1}{5}$

Чтобы это был квадрат, расстояние от центра до каждой из вершин должно быть одинаково.
От 1 и 2 вершин оно одинаково т.к. они лежат на одной прямой и расстояние от x_1 и x_2 до 0 одинаково. Аналогично для 3 и 4 вершин. Тогда достаточно ~~доказать, что~~ потребовать, чтобы расстояние от 1 и 3 вершин равно: $x_1^2+y_1^2=x_3^2+y_3^2$

$y_1^2=25x_1^2=-\frac{25}{2}(a+5)$ $\qquad y_3^2=\frac{1}{25}x_3^2=\frac{1-5a}{250}$

$-\frac{25}{2}(a+5)-\frac{a+5}{2}=\cancel{-13(a+5)}=\frac{1-5a}{250}+\frac{1-5a}{10}$

$-13(a+5)=\frac{1-5a+25-125a}{250}$

$-13\cdot 250(a+5)=26-130a$

$-13\cdot 250(a+5)=13(2-10a)$

$-250a-250\cdot 5=2-10a$

$240a=-250\cdot 5-2$

$240a=-1252$

$a=-\frac{313}{60}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{d}{2}$ – длина половины диагонали

$$S = \frac{d}{2}\cdot\frac{d}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4 = 2\left(\frac{d}{2}\right)^2 = 2\left(-13(a+5)\right) = -26\left(-\frac{313}{60}+5\right) =$$

$$= -26\left(\frac{-313+300}{60}\right) = \frac{-26\cdot(-13)}{60} = \frac{169\cdot 2}{60} = \frac{169}{30}$$

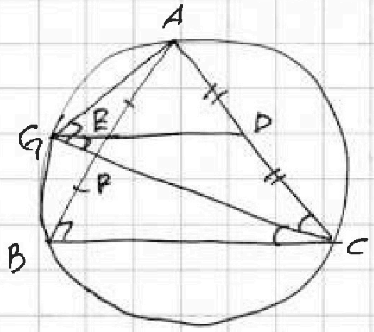
Ответ: $a = -\frac{313}{60}$ $\quad S = \frac{169}{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Пусть $\angle C = 2\alpha \Rightarrow \angle GCD = \alpha = \angle GCB$

$\angle DGC = \angle GCB = \alpha$ как накрест лежащие при параллельных прямых.

$\Rightarrow \triangle GDC$ - равнобедренный

$\Rightarrow CD = DC = AD$ (D - середина AC)

$\angle ADG = \angle C = 2\alpha$

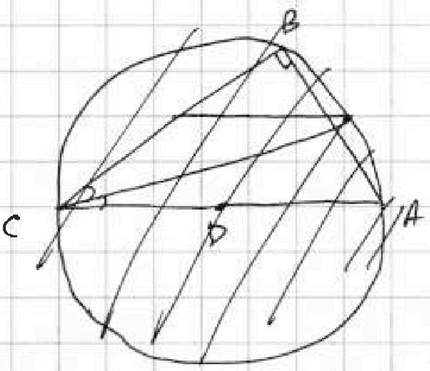
т.к. $\angle ADG = 2\angle ACG$ и $AD = DG$ ~~$\Rightarrow$ D - это центр окружности~~

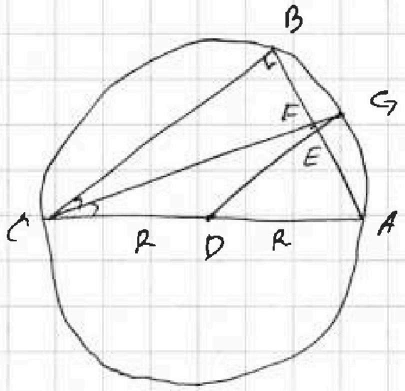
~~$\Rightarrow \angle ABC = 90°$ т.к. опирается на диаметр~~

$\Rightarrow$ D - центр окружности, описанной около AGC

$\Rightarrow \angle AGC = 90°$ т.к. опирается на диаметр этой окружн.

~~Но $\angle$ AD~~ $\angle ABC = \angle AGC$ т.к. они опираются на одну дугу $\Rightarrow \angle ABC = 90° \Rightarrow D$ центр Ω.





Ответ: $\angle B = 90°$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Преобразуя каждое из 3х уравнений, получим:

$$\begin{cases} (xyz)^3 + 10z^3 = y^6z^3 + 10y^3 \\ (xyz)^3 + 10x^3 = z^6x^3 + 10z^3 \\ (xyz)^3 + 10y^3 = x^6y^3 + 10x^3 \end{cases}$$

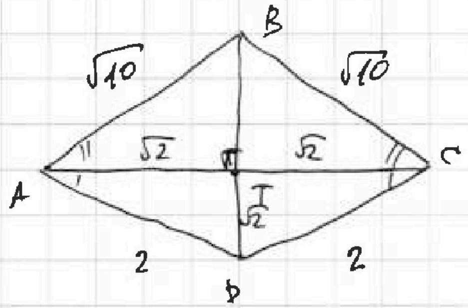
$$y^6z^3 + 10y^3 - 10z^3 = z^6x^3 + 10z^3 - 10x^3 = x^6y^3 + 10x^3 - 10y^3$$

$$y^6z^3 + 10y^3 + 10x^3 = z^6x^3 + 20z^3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$BT^2 + 2 = 10 \Rightarrow BT = 2\sqrt{2}$

$DT^2 + 2 = 4 \Rightarrow DT = \sqrt{2}$

~~Пусть $SD =$~~

а) S основания $= \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} + \sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}$

$= 2 + 4 = 6$

Пусть $SD = h \Rightarrow SB^2 = h^2 + 9\cdot 2 = h^2 + 18$

$SA^2 = h^2 + 4$

$(SA+SB)^2 = 8 + 10 + 8\sqrt{5} = AS^2 + SB^2 + 2SA\cdot SB = 2h^2 + 4 + 18 + 2SASB$

$8\sqrt{5} = 2h^2 + 4 + 2\cdot SA\cdot SB$

$4\sqrt{5} = h^2 + 2 + SA\cdot SB$

$2(2\sqrt{5}-1) - h^2 = SA\cdot SB$ возведем в квадрат, помня, что левая часть должна быть больше 0.

$4(2\sqrt{5}-1)^2 - 4h^2(2\sqrt{5}-1) + h^4$

$\parallel$

$h^4 + 22h^2 + 4\cdot 18$

$22h^2 + 4h^2(2\sqrt{5}-1) = 4(20+1-4\sqrt{5}) - 72$

$2h^2(11 - 4 + 8\sqrt{5}) = 12 - 16\sqrt{5}$

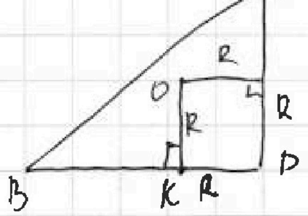
$h^2(7 + 8\sqrt{5}) = 6 - 8\sqrt{5}$

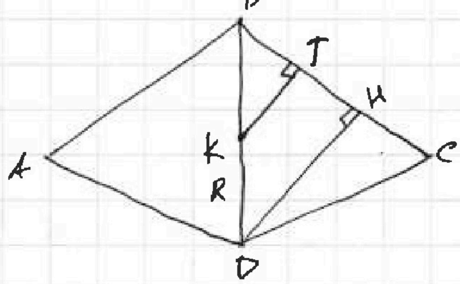
$h = \sqrt{\dfrac{6-8\sqrt{5}}{7+8\sqrt{5}}}$ $h^2 < 0 \Rightarrow$ подходит под

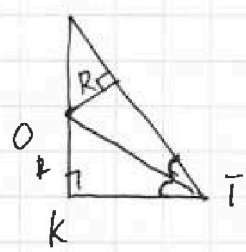
$V = \frac{1}{3} S\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 6\cdot \sqrt{\dfrac{6-8\sqrt{5}}{7+8\sqrt{5}}} = 2\sqrt{\dfrac{6-8\sqrt{5}}{7+8\sqrt{5}}}$

Вот только $6 - 8\sqrt{5} < 0$, поэтому h — не существует.

б) Т.к. шар касается SAB и $SBC \Rightarrow$ ~~он лежит~~ ~~в биссектр~~ центр шара лежит в биссекторной плоскости этих плоскостей $\Rightarrow O$ (центр) $\in BDS$.







$\angle KTL$ — это угол между SBC и DBC.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

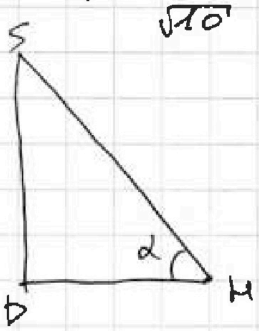
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{1}{2} DH \cdot BC = \frac{1}{2} BD \cdot DC \cdot \sin\angle BDC$ из $\triangle DTC$ (пункт а) $\angle BDC = 45°$

$DH \cdot \sqrt{10} = 3\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 6$

$\Rightarrow DH = \frac{6}{\sqrt{10}}$



$tg\,\alpha = \frac{SD}{DH} = \sqrt{\frac{6-8\sqrt{5}}{7+8\sqrt{5}}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{6}$

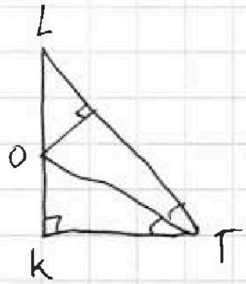
$tg\,\alpha = \frac{2\,tg(\alpha/2)}{1 - tg^2(\alpha/2)} \Rightarrow tg^2(\alpha/2)\cdot tg\,\alpha + 2\,tg(\alpha/2) - tg\,\alpha = 0$

$\Downarrow$

$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-2 + \sqrt{4 + 4tg^2\alpha}}{2\,tg\,\alpha}$

$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-1 + \sqrt{1 + tg^2\alpha}}{tg\,\alpha}$ (берем „+" т.к. $\alpha < 90°$)

$\frac{KT}{DH} = \frac{BK}{BD} = \frac{3\sqrt{2} - R}{3\sqrt{2}} \Rightarrow KT = DH - \frac{DH}{3\sqrt{2}} R = \frac{6}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{5}} R$



$\angle OTK = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{R}{KT} = tg\,\frac{\alpha}{2}$

$tg\,\frac{\alpha}{2}$ – это число

KT – линейно зависит от R $\Rightarrow$ если подставить числа, то отсюда можно найти R.

$R = \frac{6}{\sqrt{10}}\, tg\,\frac{\alpha}{2} - \frac{tg\,\alpha/2}{\sqrt{5}} R \Rightarrow R\left(1 + \frac{tg\,\alpha/2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{6}{\sqrt{10}}\, tg\,\frac{\alpha}{2}$

$R\left(\frac{\sqrt{5} + tg\,\alpha/2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{6}{\sqrt{2}}\, tg\,\frac{\alpha}{2}$

$R = \frac{6\; tg\,\alpha/2}{\sqrt{2}(\sqrt{5} + tg\,\alpha/2)} = \frac{3\sqrt{2}\; tg\,\alpha/2}{\sqrt{5} + tg\,\alpha/2}$

Ответ: а) $2\sqrt{\frac{6-8\sqrt{5}}{7+8\sqrt{5}}}$ б) $\frac{3\sqrt{2}\; tg\,\alpha/2}{\sqrt{5} + tg\,\alpha/2}$, $tg\,\alpha/2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + tg^2\alpha}}{tg\,\alpha}$,

$tg\,\alpha = \sqrt{\frac{6-8\sqrt{5}}{7+8\sqrt{5}}}\, \frac{\sqrt{10}}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$tg\,2x = \dfrac{2tgx}{1-tg^2x}$ $\quad ctg(x+\frac{\pi}{4}) = \dfrac{ctgx-1}{ctgx+1} = \dfrac{\frac{1}{tgx}-1}{\frac{1}{tgx}+1} = \dfrac{1-tgx}{1+tgx}$

$\dfrac{8\,tgx}{1-tg^2x} + 1 + \dfrac{ctgx-1}{ctgx+1} = 0$

$\dfrac{8tgx}{(1-tgx)(1+tgx)} + 1 + \dfrac{1-tgx(1-tgx)}{1+tgx} \Rightarrow \dfrac{8\,tgx + (1-tgx)^2}{(1-tgx)(1+tgx)} = -1$

$tg^2x + 6tgx + 1 = tg^2x - 1$

$6tgx = -2$

$tgx = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$

$x = arctg(-\frac{1}{3}) + \pi k$

№2 a, b, c — геом.прог $\quad a \quad aq \quad aq^2$

$\in \mathbb{Z}$

$a^3 q^3 = 3^{240} \cdot 7^{240} \to (aq)^3 = (3^{80}\cdot 7^{80})^3 \leadsto aq = 3^{80}\cdot 7^{80}$

$q = \pm 3^{80} \cdot 7^{80}$

$a = \pm 1$

$a = \pm 3^n \quad q = \pm 3 \quad 160$

$a = \pm 7^n \quad q = \pm 3^{80}\cdot 7^{80-n} \quad 160$

$\to \quad a = \ldots \quad \to 81^2 \cdot 2$

№3 $\ln^2(x+2) - (x+1)\ln(4x+8) + \ln 4 \ln(x+2) \geq 0$ $\quad \boxed{x \geq -2}$

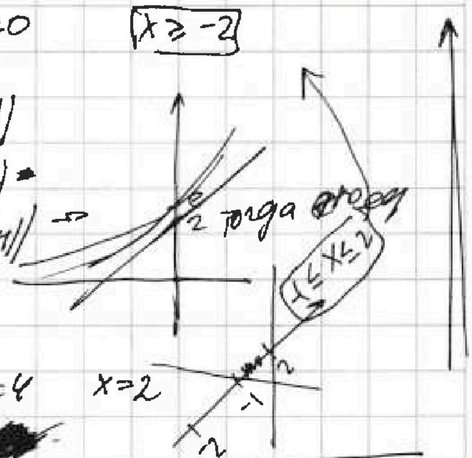
$\ln^2(x+2) - (x+1)\ln(4(x+2)) + \ln 4 \ln(x+2)$

$\ln^2(x+2) - (x+1)(\ln 4 + \ln(x+2)) + \ln 4 \ln(x+2)$

$\ln^2(x+2) - (x+1)\ln 4 - (x+1)\ln(x+2) + \ln 4 \ln(x+2)$

$\ln(x+2)(\ln(x+2) - (x+1)) + \ln 4(\ln(x+2) - (x+1)) \to$

$(\ln(x+2) - (x+1))(\ln(x+2) + \ln 4) \geq 0$

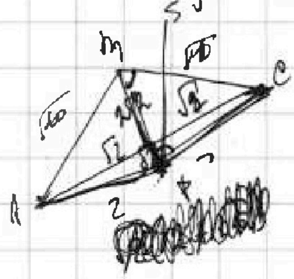


$\ln(x+2) = (x+1) \qquad \ln(x+2) = \ln(4) \Rightarrow x+2=4 \quad x=2$

$x+2 = e^{x+1} \qquad (x^4 - x - 2)' = e^{x+1} - 1$

$x = -1$

$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} \to (xyz)^3 + 10z^3 = y^3 \cdot y^3 z^3 + 10y^3$



$SA^2 = h^2 + 4 > \sqrt{8}$

$SB^2 = h^2 + 18 > \sqrt{8}$

$SA + SB > 2 + \sqrt{18}$

$\sqrt{18} + \sqrt{10}$

$(SA+SB)^2 = SA^2 + SB^2 + 2SASB = 8 + 10 + 8\sqrt{5}$

$2\sqrt{2}\sqrt{10}$

$2h^2 + 22 + 2\sqrt{()} = 18 + 8\sqrt{5}$

$2\sqrt{()} = (8\sqrt{5} - 4) - 2h^2$

$\sqrt{2} \sim 1{,}4$

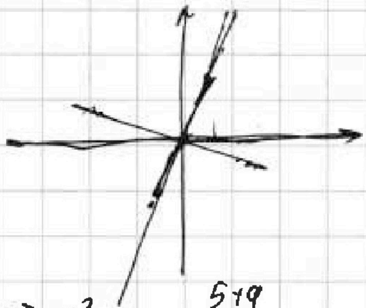
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4



$d_1 \to 5x$

$d_2 \to -\frac{1}{5}x$

$-2x^2 - ax = 5x$ 2 реш. отличных от 0.

$2x^2 = -5-a$ $\Rightarrow$ $-5-a>0$ $a\le -5$

$x^2 = \frac{-5-a}{2}$

$-2x^2 - ax = -\frac{1}{5}x$ $\frac{1}{5}-a>0$ $\frac{1}{5}\ge a$

$2x^2 = \frac{1}{5}-a$

$d_1 \Rightarrow x^2 = -\frac{5+a}{2}$

$d_2 \Rightarrow x^2 = \frac{1-5a}{10}$

$x_1^2+y_1^2 = x_2^2+y_2^2$

$y_1^2 = 25x^2 = -\frac{25}{2}(5+a)$ $y_2^2 = \frac{1}{25}x^2 = \frac{1-5a}{250}$

$-\frac{(5+a)}{2} - \frac{25}{2}(5+a) = -13(5+a) = \frac{1-5a}{10} + \frac{1-5a}{250} = \frac{25-125a+1-5a}{250}$

$= \frac{26-130a}{250}$

$-13(5+a) = \frac{26-130a}{250}$

$-13\cdot250\cdot5 - 13\cdot250\cdot a = 26-130a$

$-13\cdot250\cdot5 - 26 = a(13\cdot250-130) = 13a(250-10) = 13\cdot240\cdot a$

$-13(250\cdot5+2)$ $a = \frac{-(250\cdot5+2)}{240} = -\frac{1252}{240} = -\frac{313}{2^2\cdot5\cdot3}$ не уд.

$240 = 2^4\cdot5\cdot3$

1252 | 2, 626 | 2, 313

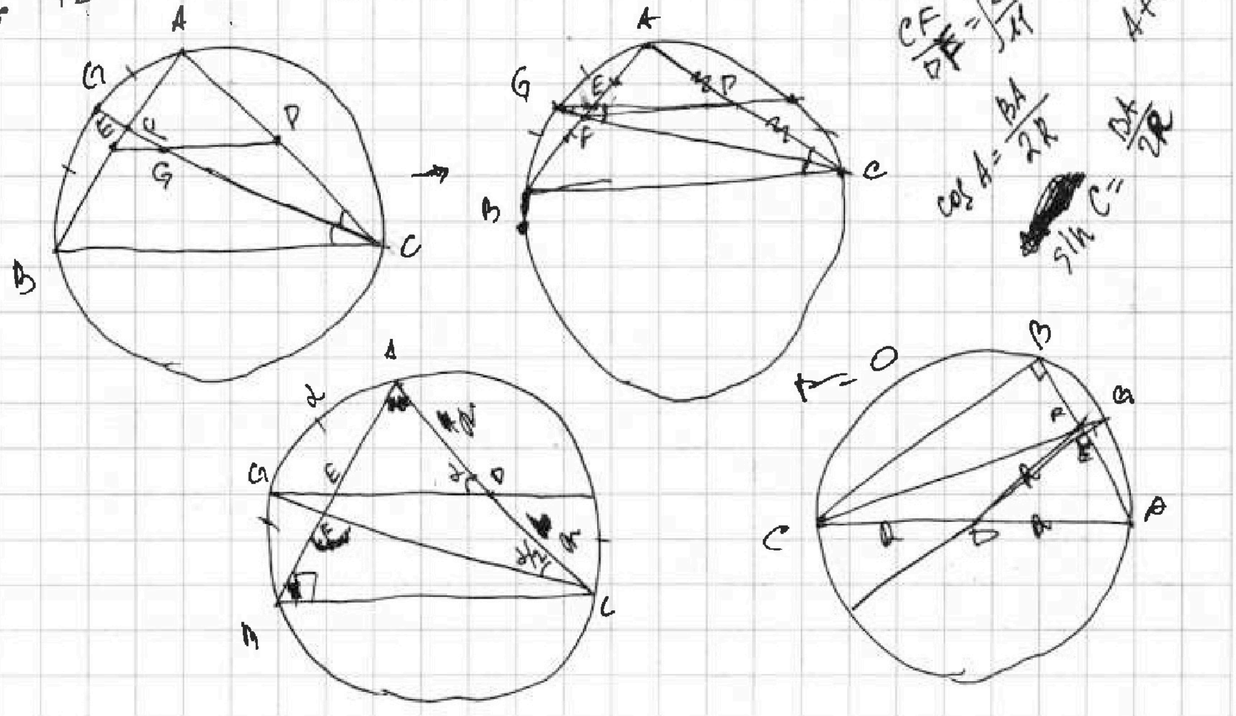
$60\cdot5=300$

$y_1 = -\frac{5}{2}(5+a)$

$y_2 = \frac{5a-1}{50}$

$y_6 2^3 + 10y^3 + 10x^3 = 2^{6}x^3 + 20$

№5



$\frac{CF}{DF} = \frac{2}{11}$

$A+C = 90°$

$\cos A = \frac{BA}{2R}$

$\sin C = \frac{BA}{2R}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

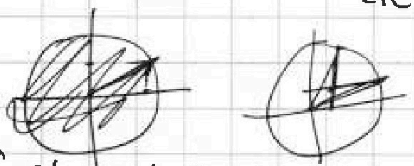
$\angle \frac{C}{2} \rightsquigarrow \frac{BF}{CF}$ ~~F — не середи~~

$\frac{BF}{FA} = \frac{CB}{2R}$

$\cos A = \frac{BA}{2R}$ $\sin C = \frac{BA}{2R}$

$A + C = 90^\circ$

$\cos(A) = \cos(\frac{\pi}{2} - C) = \sin C$



$\frac{BA}{2R} = \frac{BA}{2R}$ верно

$\frac{3\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}}$

$\frac{KT}{FH} =$ ... $1+\beta R$

$h^2 + 4 = SA^2$ $SB^2 = h^2 + 18$

$SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10}$ $(SA+SB)^2 = 2h^2 + 22 + 2\,SA\,SB$

$8 + 10 + 8\sqrt{5}$

$\frac{R}{7+\beta R} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

$2\,SA \cdot SB = \frac{(8\sqrt{5}-4)}{4} - 2h^2$ ОБЗ!?

$\frac{6-8\sqrt{5}}{7+8\sqrt{5}}$

$(h^2+4)(h^2+18) = (4\sqrt{5}-2)^2 + h^4 - 2h^2(4\sqrt{5}-2)$

$\cancel{h^4} + 22h^2 + 4 \cdot 18 = (4\sqrt{5}-2)^2 + \cancel{h^4} - 2h^2(4\sqrt{5}-2)$

$\frac{7-8\sqrt{5}}{7+8\sqrt{5}} - \frac{1}{7+8\sqrt{5}}$

$2h^2(11 + 2 - 4\sqrt{5}) = (4\sqrt{5}-2)^2 - 4 \cdot 18 = 80 + 4 - 16\sqrt{5} - 72 =$

$= 12 - 16\sqrt{5}$

$h^2(13 - 4\sqrt{5}) = 6 - 8\sqrt{5}$

$h = \sqrt{}$

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \rightsquigarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha/2}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha/2}$

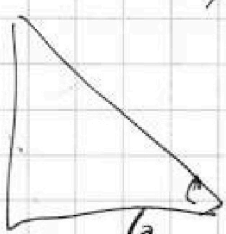
$(1 - \operatorname{tg}^2\alpha/2)\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha/2$

$DH \cdot \sqrt{10} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, 3\sqrt{2} \cdot 2 = 6$

$DH = \frac{6}{\sqrt{10}}$

$\operatorname{tg}^2\alpha/2\, \operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha/2 - \operatorname{tg}\alpha = 0$

$\operatorname{tg}\alpha/2 = \frac{-2 + \sqrt{4 + 4\operatorname{tg}^2\alpha}}{2\operatorname{tg}\alpha}$



$\frac{6}{10}$

$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{6-8\sqrt{5}}{7+8\sqrt{5}}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{6}$ — тело дан

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2} \cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}}$

$\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$SA^2 = h^2+4$ $SB^2 = h^2+18$ $SB^2 = SA^2+14$

$SA+SB = 2\sqrt{2}+\sqrt{10} = \sqrt{2}(2+\sqrt{5})$ $\sqrt{h^2+4}+\sqrt{h^2+18} = 2\sqrt{2}+\sqrt{10}$

$(SA+SB)^2 =$ ладно

$h \geq 2$ ~~чуже~~ не много

$h \to$ близко ко.

$(xyz)^3+10z^3 = y^6z^3+10y^3$

$(xyz)^3+10x^3 = z^6x^3+10z^3$

$(xyz)^3+10y^3 = x^6y^3+10x^3$

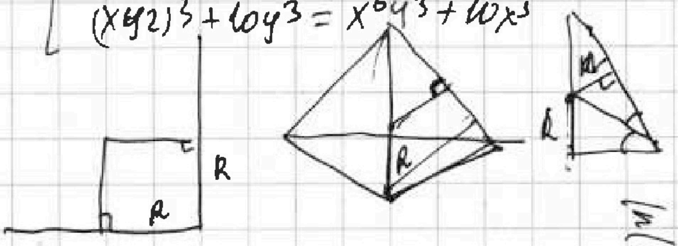
$y^6z^3+10(y^3-z^3) = z^6x^3+10(z^3-x^3)$

$z^3(y^6+z^3x^3) = 10(2z^3-x^3-y^3)$

$z^3(10-y^6) = 10y^3$

$z^3 = \frac{10y^3}{10-y^6}$ $y^3 = \frac{10x^3}{10-x^6}$

$x^3 = \frac{10z^3}{10-z^6}$



1) ~~$10-z^6 \ldots$~~

$(xyz)^3 = \frac{1000(xyz)^3}{(\ )(\ )(\ )}$

$(\ )(\ )(\ ) = 1000$

$(10-x^6)(10-y^6)(10-z^6) = 1000$

$(x^6-10)(y^6-10)(z^6-10) = -1000$

$2^2 \cdot 5^3$ $2^3 5^3$

2,5

2 отриц, 1 пол.

$x^6, y^6 > 10$

$z^6 < 10$

$z < x, y$

$x^3 = \frac{10z^3}{10-z^6} = \frac{100y^3}{(10-y^6)\left(10-\frac{100y^6}{(10-y^6)^2}\right)}$

$\frac{100y^3(10-y^6)}{10(10-y^6)-100y^6}$

$\frac{6-8\sqrt{5}}{2+8\sqrt{5}}$

$aq \to$

1) a – целое и q целое $81 \cdot 2 \cdot 2$ вар.

$0 \leq t \leq 80 \to 81$ вар

2) a целое $q = \frac{7^k}{3^n}$ $a = 3^m 7^t$ $m \geq 3n$

$m-n = 80$

n и $3n$	n и $9n$
n и $5n$	n и $11n$
n и $7n$ X	n и $13n$ X
n и $31n$ X	n и $15n$ X
n и $33n$ X	n и $17n$
⋮	n и $19n$ X
$n=1$	n и $21n$ $(n=4)$
$n=2$ X	n и $23n$ X
$n=3$	n и $25n$ X
	n и $27n$ X
	n и $29n$ X

3) a целое $q = \frac{3^k}{7^n}$ ~~аналогично~~

4) a целое $q = \frac{1}{7^k \cdot 3^n}$

$m-k = 10$

$n-m = 80$

16362 162 16200 $162 \cdot 100 =$ $81 \cdot 2 = 162$ $a = 3^{13}$ 60 $60 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ 1252 3^{13} 3^{14} 60

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!