



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 6

1. [4 балла] Решите уравнение

$$4 \operatorname{tg} 2x + 1 + \operatorname{ctg} \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел  $(a; b; c)$  таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение  $abc$  равно  $3^{240} \cdot 7^{240}$ ?

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2(x+2) - (x+1) \ln(4x+8) + (\ln 4) \ln(x+2) \geq 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции  $y = -2x^3 - ax$ . Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой  $y = 5x$ , а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра  $a$  и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника  $ABC$  описана окружность  $\Omega$ . Точки  $D$  и  $E$  – середины сторон  $AC$  и  $AB$  соответственно,  $CF$  – биссектриса треугольника  $ABC$ . Лучи  $DE$  и  $CF$  пересекаются в точке  $G$ , принадлежащей  $\Omega$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что  $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{11}}$ .

6. [5 баллов] Числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} = z^3 + \frac{10}{x^3}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения  $xyz$ .

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит четырёхугольник  $ABCD$ , в котором  $AB = BC = \sqrt{10}$ ,  $AD = DC = 2$ ,  $AC = 2\sqrt{2}$ . Ребро  $SD$  – высота пирамиды. Известно, что  $SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10}$ . Найдите:

- а) объём пирамиды;  
б) радиус шара, касающегося граней  $ABCD$ ,  $SAB$ ,  $SBC$  и ребра  $SD$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4 \operatorname{tg} 2x + 1 + \operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} x)} \quad \operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\operatorname{ctg} x - 1}{\operatorname{ctg} x + 1} = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Тогда исходное уравнение перепишем как:

$$\frac{8 \operatorname{tg} x}{(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} x)} + \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = -1$$

$$8 \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg} x) + 1 - \operatorname{tg} x = -(1 - \operatorname{tg}^2 x) = -\operatorname{tg}^2 x$$

$$8 \operatorname{tg}^2 x + 8 \operatorname{tg} x + 1 - \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^2 x - 1$$

$$7 \operatorname{tg}^2 x + 7 \operatorname{tg} x + 2 = 0$$

$$8 \operatorname{tg} x + (\operatorname{tg} x)^2 = - (1 - \operatorname{tg}^2 x)$$

$$8 \operatorname{tg} x + 1 - 2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 x - 1$$

$$6 \operatorname{tg} x = -2 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = \operatorname{arctg}(-\frac{1}{3}) + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $x = \operatorname{arctg}(-\frac{1}{3}) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c$  - члены прогрессии  
 $\downarrow$

$a, ag, ag^2$

$$abc = a^3 q^3 = 3^{240} \cdot 7^{240}$$
$$(ag)^3 = (3^{80} \cdot 7^{80})^3 \Rightarrow ag = 3^{80} \cdot 7^{80}$$

1)  $a$  член и  $q$  член  $\Rightarrow a = \pm 3^m 7^n$   $q = \pm 3^{80-m} 7^{80-n}$

3 в степени от 0 до 80 вариантов  $81 \cdot 81$  - 2

7 в степени от 0 до 80 вариантов кол-во вариантов числа  $a$  и знак числа "+ или -"

$q$ -однозначно определяется  $a$ .

2)  $a$  член;  $q = \pm \frac{7^{80-t}}{3^n}$ ;  $a = \pm 3^m 7^t$

$$m-n=80=2^4 \cdot 5$$

$$1 \leq n \leq 80 \quad (2n-n=80)$$

$m \geq 2^4 n$  - чтобы  $ag^2$ -член  $n \in \mathbb{N}$

Чтобы  $n$  было целым:

$m-t = k \cdot n$ , где  $80 \vdots k \Rightarrow k=5, 10, 2, 4, 40, 8, 20, 16, 80$   
 $\Rightarrow m = (81, 41, 21, 18, 11, 9, 6, 5, 3)_m$  всего 9 вариантов

значит  $a = \pm 3^m 7^t$  где  $m$  - 9 вариантов,  $t$  - 81 вариант,  
 $q$  от  $a$  однозначно определяется  
всего вариантов  $2 \cdot 9 \cdot 81$

3)  $a$  - член;  $q = \pm \frac{3^{80-t}}{7^n}$  - аналогично предыдущему случаю  $2 \cdot 81 \cdot 9$  вариантов

4)  $a = \pm 3^m 7^t$ ;  $q = \pm \frac{1}{3^n 7^f}$  Тогда для  $m$  и  $n$  9 вариантов,  
 $q$  от  $a$  определяется однозначно для  $t$  и  $f$  9 вариантов,  
всего  $2 \cdot 9 \cdot 9 = 162$  вариантов

$$\begin{aligned} \sum &= 2 \cdot 81 \cdot 81 + 4 \cdot 9 \cdot 81 + 2 \cdot 81 = 2 \cdot 81 / (81 + 18 + 2) = 2 \cdot 81 \cdot 101 \\ &= 162 \cdot 100 + 162 = 16362 \end{aligned}$$

Ответ: 16362

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- 1    2    3    4    5    6    7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\ln^2(x+2) - (x+1) \ln(4x+8) + \ln 4 \cdot \ln(x+2) \geq 0$$

$$(\ln^2(x+2) - (x+1) \ln(4(x+2)) + \ln 4 \cdot \ln(x+2) \geq 0$$

$$\ln^2(x+2) - (x+1)(\ln 4 + \ln(x+2)) + \ln 4 \cdot \ln(x+2) \geq 0$$

$$(\ln(x+2)(\ln(x+2) - (x+1)) + \ln 4 / (\ln(x+2) - (x+1)) \geq 0$$

$$(\ln(x+2) - (x+1)) / (\ln(x+2) + \ln 4) \geq 0 \quad x+2 > 0 \Rightarrow x > -2 \\ (\ln(x+2) \nearrow)$$

$$\ln(x+2) = -\ln 4$$

$$\ln(x+2) = \ln \frac{1}{4} \quad \text{т.к. } \ln(t) \text{ монотонно возрастает при } t > 0$$

$$\Rightarrow x+2 = \frac{1}{4} \quad x = -\frac{7}{4}$$

$$\ln(x+2) = x+1$$

$$x+2 = e^{x+1} \quad \text{Возьмем функцию } f(x) = e^{x+1} - x - 2$$

$$f'(x) = e^{x+1} - 1 = 0 \Rightarrow e^{x+1} = 1 \Rightarrow x = -1$$

$$x > -1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ возрастает} \Rightarrow x = -1 \text{ точка}$$

$$x < -1 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ убывает} \Rightarrow \text{极大имум } f(x)$$

$$f(-1) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \text{при всех } x \neq -1 \quad f(x) > 0 \Rightarrow e^{x+1} > x + 2$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ единственный корень ур-ия } x+2 = e^{x+1}$$

$$\ln(x+2) + \ln 4 \quad \begin{array}{c} - \\ \hline -\frac{7}{4} \\ + \end{array} \quad (сравниваем с 0)$$

$$\ln(x+2) - (x+1) \quad \begin{array}{c} - \\ | \\ - \end{array} \quad (сравниваем с 0)$$

$$(\ln(x+2) - (x+1)) / (\ln(x+2) + \ln 4) \geq 0$$

$$\downarrow \quad -2 < x \leq -\frac{7}{4} \quad \text{и} \quad x = -1$$

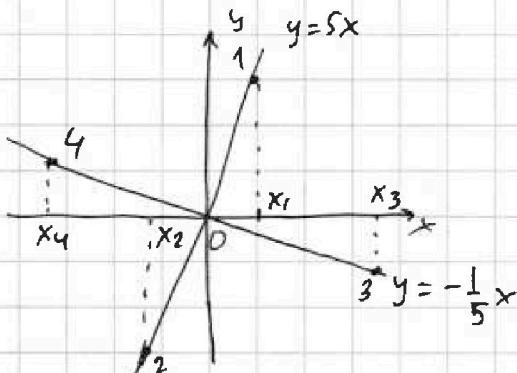
$$\text{Ответ: } x \in (-2; -\frac{7}{4}] \cup \{-1\}$$



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Диагонали квадрата перпендикулярны  $\Rightarrow$  вторая диагональ лежит на прямой  $1 \ y = 5x$   
 $\Rightarrow$  это прямая  $y = -\frac{1}{5}x$

$$\text{т.н. } -\frac{1}{5} \cdot 5 = -1 \quad (k_1 \cdot k_2 = -1)$$

$-2x^3 - ax = 5x \quad x=0$  нас не интересует тк иначе точки  
 $-2x^2 - a = 5$  пересече координаты вершин квадрата

$$2x^2 = -a - 5$$

$$x^2 = \frac{-5-a}{2} \quad x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-5-a}{2}} \Rightarrow a \leq -5$$

$$-2x^3 - ax = -\frac{1}{5}x$$

$$2x^2 = \frac{1}{5} - a \Rightarrow x^2 = \frac{1-5a}{10} \quad x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{1-5a}{10}} \Rightarrow a \leq \frac{1}{5}$$

Чтобы это было квадрат, расстояние от центра до каждой из вершин должно быть одинаково.

От 1 и 2 вершин оно одинаково тк они лежат на одной прямой и расстояние от  $x_1$  и  $x_2$  до 0 одинаково.  
Аналогично для 3 и 4 вершин. Тогда достаточно доказать, что потребовать, чтобы расстояние от 1 и 3 вершин равно:  $x_1^2 + y_1^2 = x_3^2 + y_3^2$

$$y_1^2 = 25x_1^2 = -\frac{25}{2}(a+5) \quad y_3^2 = \frac{1}{25}x_3^2 = \frac{1-5a}{250}$$

$$-\frac{25}{2}(a+5) - \frac{a+5}{2} = \cancel{15(a+5)} \Rightarrow \frac{1-5a}{250} + \frac{1-5a}{10}$$

$$-(3(a+5)) = \frac{1-5a+25-125a}{250}$$

$$-13 \cdot 250(a+5) = 26 - 130a \quad | \quad a = -\frac{313}{60}$$

$$-13 \cdot 250(a+5) = 13(2 - 10a)$$

$$-250a - 250 \cdot 5 = 2 - 10a$$

$$240a = -250 \cdot 5 - 2$$

$$240a = -1252$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{d}{2}$  — длина половины диагонали

$$S = \frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 2 (-13(a+5)) = -26 \left(-\frac{313}{60} + 5\right) = \\ = -26 \left(-\frac{313}{60} + \frac{300}{60}\right) = \frac{-26 \cdot (-13)}{60} = \frac{169 \cdot 2}{60} = \frac{169}{30}$$

Ответ:  $a = -\frac{313}{60}$        $S = \frac{169}{30}$



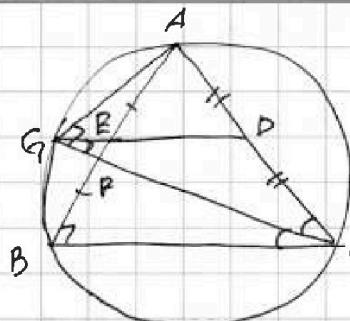
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим  $\angle C = 2d \Rightarrow \angle CGC = d = \angle GCB$

$\angle DGC = \angle GCB = d$  как ~~каквест лежат~~  
~~на~~ на одной прямой при параллельных  
линиях предполож.

$\Rightarrow \triangle GDC$  - равнобедренный

$\Rightarrow CD = OC = AD$  ( $D$  - середина  $AC$ )

$\angle ADG = \angle C = 2d$

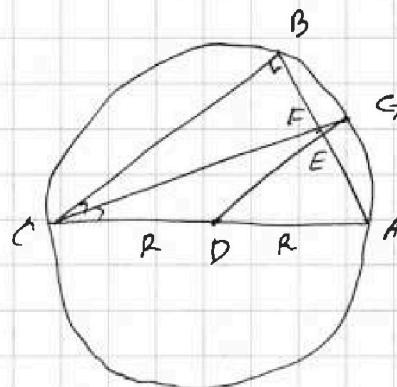
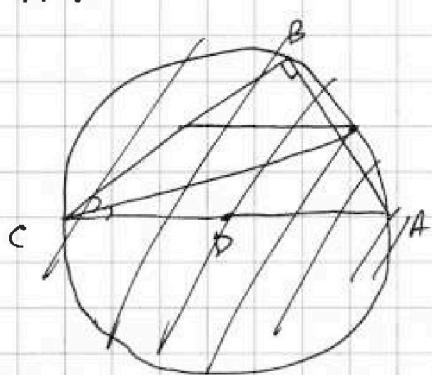
т.к.  $\angle ADG = 2\angle ACG$  и  $AD = DG \Rightarrow D$  - центр описанной  
окружности

$\Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$  т.к. опирается на диаметр

$\Rightarrow D$  - центр окружности, описанной около  $AGC$

$\Rightarrow \angle AC_1C = 90^\circ$  т.к. опирается на диаметр этой окружности.

но  $\angle ADG = \angle ABC = \angle AGC$  т.к. они опираются на одну  
куружность  $\Rightarrow \angle ABC = 90^\circ \Rightarrow D$  центр  $\Sigma$ .



Ответ:  $\angle B = 90^\circ$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

*МФТИ.*

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Преобразуя каждое из 3x выражений, получим:

$$\begin{cases} (xy_2)^3 + 10z^3 = y^6 z^3 + 10y^3 \\ (xy_2)^3 + 10x^3 = z^6 x^3 + 10z^3 \\ (xy_2)^3 + 10y^3 = x^6 y^3 + 10x^3 \end{cases}$$

$$y^6 z^3 + 10y^3 - 10z^3 = z^6 x^3 + 10z^3 - 10x^3 = x^6 y^3 + 10x^3 - 10y^3$$

$$y^6 z^3 + 10y^3 + 10x^3 = z^6 x^3 + 20z^3$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

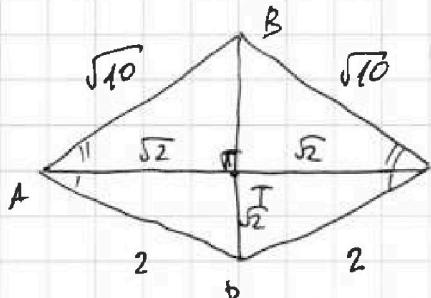
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Ничего QR-кода недопустим!



$$BT^2 + 2 = 10 \Rightarrow BT = 2\sqrt{2}$$

$$DT^2 + 2 = 4 \Rightarrow DT = \sqrt{2}$$

Пусть  $SD = h$

$$\begin{aligned} a) S_{\text{основания}} &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \\ &= 2 + 4 = 6 \end{aligned}$$

$$\text{Пусть } SD = h \Rightarrow SB^2 = h^2 + 2^2 = h^2 + 4$$

$$(SA + SB)^2 = 8 + 10 + 8\sqrt{5} = AS^2 + SB^2 + 2SA \cdot SB = 2h^2 + 4 + 18 + 2SA \cdot SB$$

$$8\sqrt{5} = 2h^2 + 4 + 2 \cdot SA \cdot SB$$

$$4\sqrt{5} = h^2 + 2 + SA \cdot SB$$

$$2(2\sqrt{5}-1) - h^2 = SA \cdot SB$$

возведем в квадрат, помните,  
что левая часть должна быть  
不小于 0.

$$4(2\sqrt{5}-1)^2 - 4h^2(2\sqrt{5}-1) + h^4$$

!!

$$h^4 + 22h^2 + 4 \cdot 18$$

$$22h^2 + 4h^2(2\sqrt{5}-1) = 4(10+1-4\sqrt{5}) - 72$$

$$2h^2(11-4+8\sqrt{5}) = 12-16\sqrt{5}$$

$$h^2(7+8\sqrt{5}) = 6-8\sqrt{5}$$

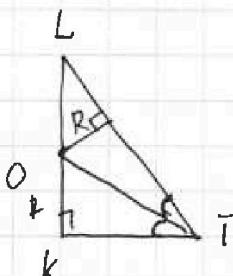
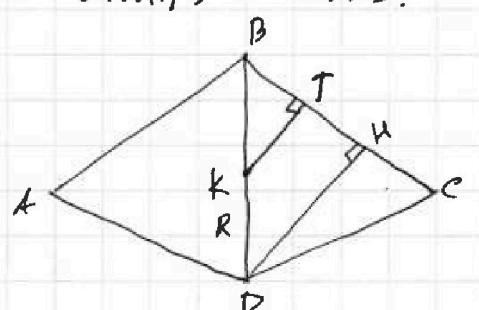
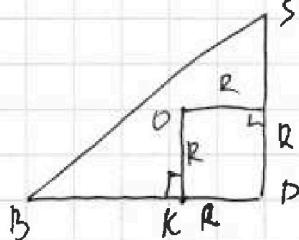
$$h = \sqrt{\frac{6-8\sqrt{5}}{7+8\sqrt{5}}}$$

$h^2 < 0 \Rightarrow$  подходит под

Вот только  
 $6-8\sqrt{5} < 0$ ,  
значит  $h$ -  
не существует.

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \sqrt{\frac{6-8\sqrt{5}}{7+8\sqrt{5}}} = 2 \sqrt{\frac{6-8\sqrt{5}}{7+8\sqrt{5}}}$$

б) Т.к. шар касается  $SAB$  и  $SBC$   $\Rightarrow$  он лежит в биссектрисе  
центра шара лежит в биссектрисе трапеции  $\Rightarrow$   $O$  (центр)  $\in$   $BDS$ .



$\angle KTL = 90^\circ$  угол между  $SBC$  и  $DBC$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

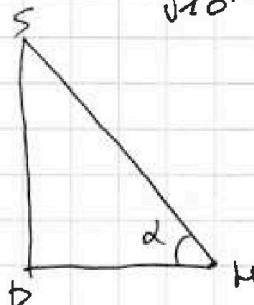
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{2} DK \cdot BC = \frac{1}{2} BD \cdot DC \cdot \sin \angle BDC \quad \text{из } \triangle DTC \text{ (учитывая } a) \\ \angle BDC = 45^\circ$$

$$DK \cdot \sqrt{10} = 3\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 6$$

$$\Rightarrow DK = \frac{6}{\sqrt{10}}$$



$$\tan \alpha = \frac{BD}{DK} = \frac{\sqrt{6-8\sqrt{5}}}{\sqrt{7+8\sqrt{5}}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{6}$$

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan(\alpha/2)}{1 - \tan^2(\alpha/2)} \Rightarrow \tan^2(\alpha/2) \cdot \tan \alpha + 2 \tan(\alpha/2) - \tan \alpha = 0$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-2 + \sqrt{4 + 4\tan^2 \alpha}}{2 \tan \alpha}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-1 + \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha} \quad (\text{берем } +\sqrt{\phantom{x}} \text{ т.к. } \alpha < 90^\circ)$$

$$\frac{KT}{DK} = \frac{BK}{BD} = \frac{3\sqrt{2}-R}{3\sqrt{2}} \Rightarrow KT = DK - \frac{DK}{3\sqrt{2}} R = \frac{6}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{5}} R$$

$$\cancel{\angle OTK = \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \frac{R}{KT} = \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{2}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} - \text{Число}$$

KT линейно зависит от R  $\Rightarrow$  если поделить  
на R, то получится константа, то есть отсюда можно найти

$$R = \frac{6}{\sqrt{10}} \tan \frac{\alpha}{2} - \frac{\tan \alpha/2}{\sqrt{5}} R \Rightarrow R \left(1 + \frac{\tan \alpha/2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{6}{\sqrt{10}} \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$R \left( \frac{\sqrt{5} + \tan \alpha/2}{\sqrt{5}} \right) = \frac{6}{\sqrt{10}} \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$R = \frac{6 \tan \alpha/2}{\sqrt{2} (\sqrt{5} + \tan \alpha/2)} = \frac{3\sqrt{2} \tan \alpha/2}{\sqrt{5} + \tan \alpha/2}$$

$$\text{Однозначно } a) 2 \sqrt{\frac{6-8\sqrt{5}}{7+8\sqrt{5}}} \quad b) \frac{3\sqrt{2} \tan \alpha/2}{\sqrt{5} + \tan \alpha/2}, \quad \tan \alpha/2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha}$$

$$\tan \alpha = \sqrt{\frac{6-8\sqrt{5}}{7+8\sqrt{5}}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{6}$$

На одной странице можно оформлять ТОЛЬКО ОДНУ задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{y}{2x} = \frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x} \quad \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\operatorname{ctg}x - 1}{\operatorname{ctg}x + 1} = \frac{\frac{1}{\operatorname{tg}x} - 1}{\frac{1}{\operatorname{tg}x} + 1} = \frac{1 - \operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}x}$$

$$\frac{8\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x} + 1 + \frac{\operatorname{ctg}x - 1}{\operatorname{ctg}x + 1} = 0$$

$$\frac{8\operatorname{tg}x}{(1-\operatorname{tg}x)(1+\operatorname{tg}x)} + 1 + \frac{1-\operatorname{tg}x(1+\operatorname{tg}x)}{1+\operatorname{tg}x} \Rightarrow \frac{8\operatorname{tg}x + (1-\operatorname{tg}x)^2}{(1-\operatorname{tg}x)(1+\operatorname{tg}x)} = -1$$

$$4\operatorname{tg}^2x + 6\operatorname{tg}x + 1 = \operatorname{tg}^2x - 1$$

$$x = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + k\pi$$

$$6\operatorname{tg}x = -2$$

$$\operatorname{tg}x = -\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

12 a, b, c - решения

a  $\operatorname{arq}$   $\operatorname{arq}^2$

$$a^3 q^3 = 3^{200} \cdot 7^{200}$$

$$q = \pm 3^{200} \cdot 7^{200}$$

$$a = \pm 3^n$$

$$a = \pm 7^n \quad q = \pm 3^{200} \cdot 7^{200}$$

$$2$$

$$160$$

$$160$$

$$160$$

$$160$$

$$160$$

$$160$$

$$160$$

$$160$$

$$160$$

$$160$$

$$\sim 3 \ln(x+2) - (x+1) \ln(4x+8) + \ln 4 \ln(x+2) \geq 0$$

$$x \geq -2$$

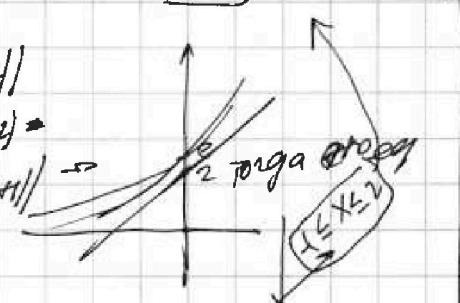
$$\ln^2(x+2) - (x+1) \ln(4(x+2)) + \ln 4 \ln(x+2)$$

$$\ln^2(x+2) - (x+1)(\ln 4 + \ln(x+2)) + \ln 4 \ln(x+2)$$

$$\ln^2(x+2) - (x+1)\ln 4 - (x+1)\ln(x+2) + \ln 4 \ln(x+2) =$$

$$\ln(x+2)(\ln(x+2) - (x+1)) + \ln 4 (\ln(x+2) - (x+1)) =$$

$$(\ln(x+2) - (x+1)) / (\ln(x+2) + \ln 4) \geq 0$$



$$\ln(x+2) = (x+1)$$

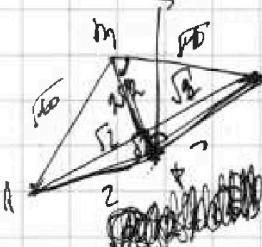
$$x+2 = e^{x+1}$$

$$\ln(x+2) = \ln(4) \Rightarrow x+2=4 \Rightarrow x=2$$

$$(e^{x+1} - x - 2)' = e^{x+1} - 1$$

$$x =$$

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} \Rightarrow (xy)^3 + 10z^3 = y^3 \cdot y^3 + 10y^3$$



$$SA^2 = h^2 + 4^2$$

$$SB^2 = h^2 + 18^2$$

$$SC^2 = h^2 + 20^2$$

$$(SA + SB)^2 = SA^2 + SB^2 + 2SA \cdot SB = 8 + 10 + 8\sqrt{5}$$

$$2h^2 + 2\sqrt{180} = 18 + 8\sqrt{5}$$

$$\sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

$$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$(8\sqrt{5}-4) - 2h^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

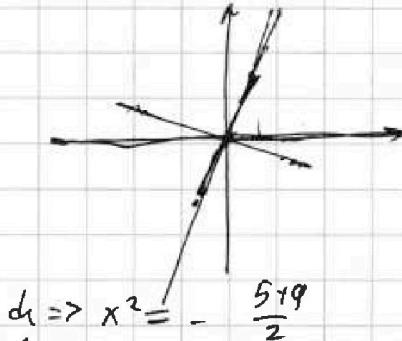


- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4



$$d_1 \Rightarrow x^2 = -\frac{5+a}{2}$$

$$d_2 \Rightarrow x^2 = \frac{1-5a}{10}$$

~~$x \neq \sqrt{1-5a}$~~

$$y_1^2 = 25x^2 = -\frac{25}{2}(5+a)$$

$$-\frac{(5+a)}{2} - \frac{25}{2}(5+a) = -13(5+a) = \frac{1-5a}{10} + \frac{1-5a}{250} = \frac{25-125a+1-5a}{250} = \frac{26-130a}{250}$$

$$-13(5+a) = \frac{26-130a}{250}$$

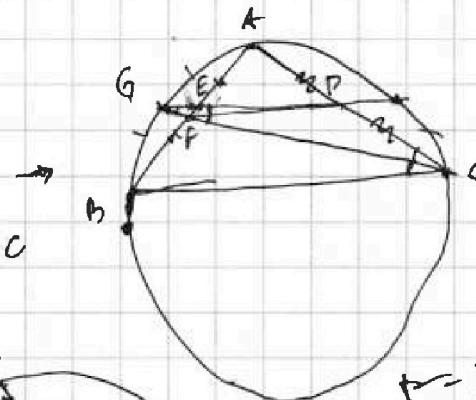
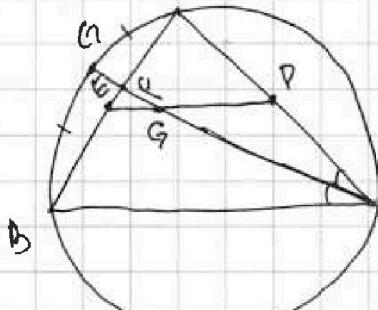
$$-13 \cdot 250 \cdot 5 - 13 \cdot 250 \cdot a = 26 - 130a$$

$$-13 \cdot 250 \cdot 5 - 26 = a(13 \cdot 250 + 10) = 13a(250 + 10) = 13a \cdot 260 = 13 \cdot 260 \cdot a$$

$$-13(250 \cdot 5 + 2) = 260 = \frac{a = -\frac{(250 \cdot 5 + 2)}{260}}{260} = -\frac{1252}{260} = -\frac{313}{22 \cdot 5 \cdot 3} \text{ my w.}$$

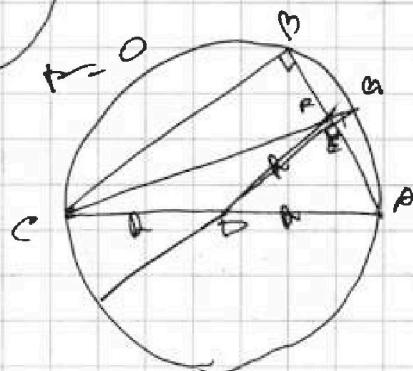
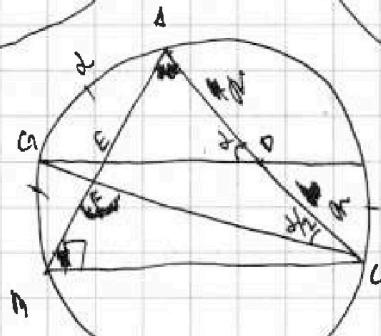
$$\frac{1252}{260} \frac{1^2}{626} \frac{1}{2} \frac{1}{313} \quad 260 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \quad 100 \quad 100 \cdot 5 = 500$$

5



$$\frac{CP}{AP} = \frac{\sqrt{1-\cos \alpha}}{\sin \alpha}$$

$$\cos \alpha = \frac{AP^2 + CP^2 - AC^2}{2 \cdot AP \cdot CP}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle \frac{c}{2} \sim \frac{BF}{CF} \quad \text{т.к. середи}$$

$$\frac{BF}{FA} = \frac{CB}{2R}$$

$$\cos A = \frac{BA}{2R} \quad \sin C = \frac{BA}{2R}$$

$$A + C = 90^\circ$$

$$\cos \frac{a}{2} = \cos(A - C) = \sin C$$



$$\frac{BA}{2R} = \frac{BA}{2R} \text{ верно}$$

$$h^4 + 4 = SA^2 \quad SB^2 = h^4 + 18$$

$$SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10}$$

$$(SA + SB)^2 = 2h^2 + 2 \cdot 18 + 2SA \cdot SB$$

$$2SA \cdot SB = \frac{(8\sqrt{5}-4)}{4} - 2h^2$$

$$8\sqrt{10} + 8\sqrt{5}$$

$$0 \cdot 3 \cdot 7$$

$$(h^2 + 4)(h^2 + 18) = (4\sqrt{5} - 2)^2 + h^4 - 2h^2(4\sqrt{5} - 2)$$

$$\frac{6-8\sqrt{5}}{2+8\sqrt{5}} - \frac{1}{2+8\sqrt{5}}$$

$$h^4 + 22h^2 + 4 \cdot 18 = (4\sqrt{5} - 2)^2 + h^4 - 2h^2(4\sqrt{5} - 2)$$

$$\frac{2-8\sqrt{5}}{2+8\sqrt{5}}$$

$$2h^2(14 + 2 - 4\sqrt{5}) = (4\sqrt{5} - 2)^2 - 4 \cdot 18 = 80 + 4 - 16\sqrt{5} - 32 =$$

$$= 12 - 16\sqrt{5}$$

$$h^2(13 - 4\sqrt{5}) = 6 - 8\sqrt{5}$$

$$h = \sqrt{?}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

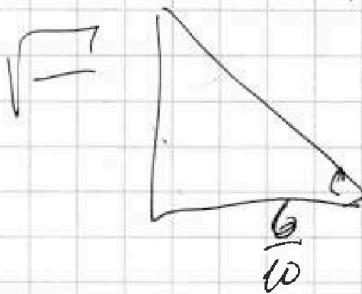
$$DN = \sqrt{10} = \sqrt{2} \quad 3\sqrt{2} \cdot 2 = 6$$

$$(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}) \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \alpha = 0$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -2 + \sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{6-8\sqrt{5}}{7+8\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{6} = \text{тако заменить } \operatorname{tg} \alpha$$



$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sin} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cos} \frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{sin} \alpha}{2 \operatorname{cos} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cos} \frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{sin} \alpha}{2 \operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$SA^2 = h^2 + 4$$

$$SB^2 = h^2 + 18$$

$$SD^2 = SA^2 + 14$$

$$SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10} = \sqrt{2}(2 + \sqrt{5})$$

$$\sqrt{h^2 + 4} + \sqrt{h^2 + 18} = 2\sqrt{2} + \sqrt{10}$$

$$(SA + SB)^2 = \text{[redacted]} \quad \text{одно}$$

$h \geq 2$  ~~нужно менять~~  
 $h \rightarrow$  ~~плоско~~ ~~ко~~.

$$(xyz)^3 + 10x^3 = y^6z^3 + 10y^3$$

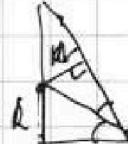
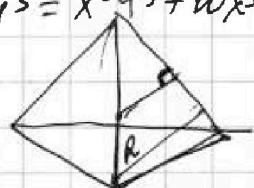
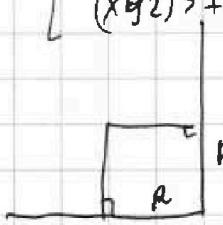
$$y^6z^3 + 10(y^3 - z^3) = z^6x^3 + 10(z^3 - x^3)$$

$$(xyz)^3 + 10x^3 = z^6x^3 + 10x^3$$

$$z^3(y^6 + z^3x^3) = 10(2z^3 - x^3 - y^3)$$

$$(xyz)^3 + 10y^3 = x^6y^3 + 10x^3$$

$$z^3(y^6 + z^3x^3) = 10(2z^3 - x^3 - y^3)$$



$$\ln(x+2)$$

$$z^3(y^6 + z^3x^3) = 10(2z^3 - x^3 - y^3)$$

$$z^3(y^6 + z^3x^3) = 10(2z^3 - x^3 - y^3)$$

$$z^3(y^6 + z^3x^3) = 10(2z^3 - x^3 - y^3)$$

$$z^3(y^6 + z^3x^3) = 10(2z^3 - x^3 - y^3)$$

$$z^3(y^6 + z^3x^3) = 10(2z^3 - x^3 - y^3)$$

$$10 \cancel{z^6} \cancel{x^3} \cancel{y^3} \cancel{z^3} \cancel{x^3} \cancel{y^3}$$

$$(xyz)^3 = \frac{1000(xyz)^3}{(x)(y)(z)}$$

$$x^3 = \frac{102^3}{10-2^6} = \frac{100y^3}{(10-y^6)(10-2^6)}$$

$$(x)(y)(z) = 1000$$

$$x^3 = \frac{102^3}{10-2^6} = \frac{100y^3}{(10-y^6)(10-2^6)}$$

$$(10x^6)/(10-y^6)(10-2^6) = 1000$$

$$\frac{100y^3(10-y^6)}{10(10-y^6)-10y^6}$$

$$(x^6-10)(y^6-10)(z^6-10) = 1000$$

$$2^3 \cdot 5^3 \quad || \quad 2^3 \cdot 5^3$$

$$a^2 \rightarrow$$

$$\frac{6 - 6\sqrt{5}}{2 + 8\sqrt{5}}$$

$$2,5$$

$$1) \quad a - \text{число} \Rightarrow a^2 - \text{число}$$

$$817.2 \text{ кв.}$$

$$0 \leq t \leq 80 \rightarrow 81 \text{ кв.}$$

$$2) \quad a \text{ число} \quad q = \frac{3^k}{3^n}$$

$$a = \frac{3^m}{3^n} \quad m > n$$

$$n \leq 3 \text{ кв.}$$

$$3) \quad a \text{ число} \quad q = \frac{3^k}{3^n} \sim \text{окончено}$$

$$n \leq 9 \text{ кв.}$$

$$4) \quad \text{аналог} \quad q = \frac{1}{7k, 3kn} \quad m-k=10 \quad n-m=90$$

$$n \leq 13 \text{ кв.}$$

$$5) \quad \text{аналог} \quad q = \frac{1}{7k, 3kn} \quad m-k=10 \quad n-m=90$$

$$n \leq 15 \text{ кв.}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{3}{13} \\ a &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ a &= 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= 1 \\ n &= 2 \\ n &= 3 \quad X \\ &\vdots \\ n &= 19 \text{ кв.} \\ n &= 21 \text{ кв.} \\ n &= 23 \text{ кв.} \\ n &= 25 \text{ кв.} \\ n &= 27 \text{ кв.} \\ n &= 29 \text{ кв.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16362 &= 16200 \\ 162 &+ 162 \cdot 100 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16362 &= 16200 \\ 162 &+ 162 \cdot 100 = \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!