



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 7

1. [4 балла] Решите уравнение

$$5 \operatorname{tg} 2x - 1 = \operatorname{tg} \left(x - \frac{3\pi}{4} \right).$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{90} \cdot 19^{90}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2(x+3) - (x+2) \ln(3x+9) + (\ln 3) \ln(x+3) \geq 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = \frac{x^3}{4} + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = \frac{2x}{5}$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC . Лучи DE и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $\frac{CF}{DF} = \frac{2}{11}$.

6. [5 баллов] Числа x , y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{6}{y^3} = y^3 + \frac{6}{z^3} = z^3 + \frac{6}{x^3}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения xyz .

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = 5$, $AD = DC = \sqrt{10}$, $AC = 2\sqrt{5}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 5 + 2\sqrt{5}$. Найдите:

- а) объём пирамиды;
б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB , SBC и ребра SD .



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Проблема:

$$5 + \tg^2 x - 2 = \tg(x - \frac{3\pi}{5})$$

$$\tg^3 x - \tg^2 x - \tg x - 2 = 0$$

$$5 \cdot \frac{\tg x}{1 - \tg^2 x} - \frac{\sin x + \cos x}{-\sin x + \cos x} = \frac{\tg x + 1}{-\tg x + 1}$$

$$5 \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4} + 1}{\frac{1}{4} - 1} \quad \text{tg } x = 1$$

$$\frac{5 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4} + 1}{\frac{1}{4} - 1}$$

$$(z - \frac{1}{4})(z + \frac{1}{4}) \quad z = \tg x$$

$$\frac{5 \cdot 2z}{(z-1)(z+1)} = \frac{z+1}{z-1} \Rightarrow 10z = (z+1)^2$$

$$10z = z^2 + 2z + 1$$

$$z^2 - 8z + 1 = 0$$

$$z = \frac{8 \pm \sqrt{64-7}}{2} = 4 \pm \sqrt{15}$$

$$x = \arctg (4 \pm \sqrt{15}) + 2\pi k$$

*? Ответ: $\arctg (4 \pm \sqrt{15}) + 2\pi k$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\tan\left(x - \frac{3\pi}{9}\right) = \frac{\sin\left(x - \frac{3\pi}{9}\right)}{\cos\left(x - \frac{3\pi}{9}\right)} =$$

$$= \frac{\sin x \cos \frac{3\pi}{9} + \sin \frac{3\pi}{9} \cos x}{\cos x \cos \frac{3\pi}{9} + \sin x \sin \frac{3\pi}{9}} \quad \begin{aligned} \sin \frac{3\pi}{9} &= \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos \frac{3\pi}{9} &= -\alpha \\ (\alpha \neq 0) \end{aligned}$$

$$\tan\left(x - \frac{3\pi}{9}\right) = \frac{-\alpha \sin x - \alpha \cos x}{-\alpha \cos x + \alpha \sin x} = \frac{-\sin x - \cos x}{-\cos x + \sin x} =$$

(поскольку $\sin x + \cos x \neq 0$)

$$= \frac{\sin x + \cos x}{-\sin x + \cos x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{-(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)} =$$

$$= \frac{1 + \sin 2x}{1 + \cos 2x}$$

$$\text{Пусть } \alpha = \sin 2x, \quad \beta = \cos 2x$$

Из исходного уравнения получаем?

$$5 \cdot \frac{\alpha}{\beta} - 1 = \frac{1 + \alpha}{1 + \beta}$$

$$5\alpha - \beta = 1 + \alpha + \beta \quad \begin{aligned} \alpha &= 2\sin x \cos x \quad \alpha = \cos^2 x - \sin^2 x \\ 1 &= \sin^2 x + \cos^2 x \end{aligned}$$

$$\sin x \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x = -(\sin^2 - \cos^2) - 2\sin x \cos x$$

$$\sin x \cos x = \frac{\cos}{1 + \sin^2 x}$$

$$\begin{cases} \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \text{не подходит для} \\ 1 + \sin^2 x = 0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть q, ab, ab^2 - члены математической прогрессии
(b - член математической прогрессии с $b \neq 0$ из условия)
математической прогрессии. a - член математической прогрессии.

Рассмотрим случаи:

1) $b = 1$

т.к. $ab \in \mathbb{Z} \wedge a \in \mathbb{Z} \wedge a \neq 0 \Rightarrow b \in \mathbb{Q}$

Пусть $a \in \mathbb{P}$ ($\mathbb{P} \neq 2 \wedge \mathbb{P} \neq 19$). Тогда т.к. $a, ab, ab^2 \in \mathbb{P}$
 \mathbb{P} в данном случае содержит в знаменателе p .

Пусть $b = \frac{q}{r}$ $HOR(q, r) = 1$ $q \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N}$
т.к. $ab \in \mathbb{Z}$ $\deg_p(a) > \deg_p(b)$. $ab^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \deg_p(ab) > \deg_p(r) =$
 $\Rightarrow \deg_p(a \cdot ab \cdot ab^2) = 3 \deg_p(a) - 3 \deg_p(r) > 0$ - противоречие

т.к. $2^{90} \cdot 19^{90} \nmid p$ ($\mathbb{P} \neq 2 \wedge \mathbb{P} \neq 19$) $\Rightarrow a = 2^k \cdot 19^l \neq 1$
 $\Rightarrow q = 2^k \cdot 19^l$

Рассмотрим случаи: или $q \neq 2$ и $r \neq 2$

a) $\forall q \neq 2$ тогда $r \neq 2$ т.к. $\nexists HOR(q, r) = 1$. Пусть $x = \deg_2(a)$
 $y = \deg_2(q)$, $\deg_2(a \cdot ab \cdot ab^2) = 3\deg_2(a) + 3\deg_2(q) =$
 $= 3x + 3y = 90 \Rightarrow x + y = 30$ т.к. $x \in \{0, 1, \dots, 30\}$ члены
и $y \in \{0, 1, \dots, 30\}$ члены з1 подпоследовательности пары
(x, y) - пары

2) $r \neq 2$ тогда $q \neq 2$. Пусть $x = \deg_2(a)$ $y = \deg_2(r)$

т.к. $\begin{cases} ab \in \mathbb{Z} \Rightarrow x > y \\ ab^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x > 2y \end{cases} \Rightarrow x > 2y$

$$\deg_2(a \cdot ab \cdot ab^2) = 3x - 3y = 90 \Rightarrow x - y = 30$$

$$\text{т.к. } x > 2y \Rightarrow x - 2y > 0 \Rightarrow x > 30$$

Получаем, что $y \in \{0, 1, \dots, 29, 30\}$. Так же имеем
 y - члены $x = 30 + y \Rightarrow$ Получаем з1 подпоследовательности
пар.

также имеем пары: $q \neq 19$ и $r \neq 19$

б) $\forall 19 \nmid 19$ тогда $(r \neq 19)$ $x = \deg_{19}(a)$ $y = \deg_{19}(q)$
 $\deg_2(a \cdot ab \cdot ab^2) = 3x + 3y$

Абсолютно аналогично получаем, что у нас
есть з1 случаи когда $q \neq 19$ и $r \neq 19$ или $q \neq 19$ и $r \neq 19$
и 30 случаев, когда $q \neq 19$ и $r \neq 19$ (просто во всех
предыдущих рассуждениях нужно з1 значение пары 19)



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Чтого находим: $(31+30)(31+30) = 61^2$ скаков
располагаем вдвоем синими 2 и 19 между 9, 9 и
также 61^2 раз а и в то есть 61^2 скаков
получившим чисел (a, ab, ab^2) . Каждой
такой тройке можно соотносить
тройку $(-a, ab, -ab^2)$ и скаковом. \Rightarrow

Следо получившие скаков будем $2 \cdot 61^2$
имет. $2 \cdot 61^2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\ln^2(x+3) - (x+2) \ln(3x+9) + \ln(3) \cdot \ln(x+3)$$

Пусть $a = x+3$. Тогда выражение можно переписать так:

$$\ln^2 a - (a-1) (\ln 3 + \ln a) + \ln 3 \cdot \ln a =$$

$$= \ln^2 a - a \ln 3 - a \ln a + \ln 3 \cdot \ln a + (\ln 3 + \ln a) =$$

$$= \ln a (\ln a - a) + \ln 3 (\ln a - a) + (\ln 3 + \ln a) =$$

$$= (\ln a - a) (\ln a + \ln 3) + (\ln 3 + \ln a) =$$

$$= (\ln a + \ln 3) (\ln a - a + 1) \quad \text{от} \quad a > 0$$

$$\ln a + \ln 3 = 0 \quad \ln a - \text{линейная} \quad \ln 3 - \text{линейная}$$

$\Rightarrow \ln a + \ln 3 - \text{линейная} \Rightarrow$ есть не более одной корни. Он удаляется, подставляем $a = \frac{1}{3}$

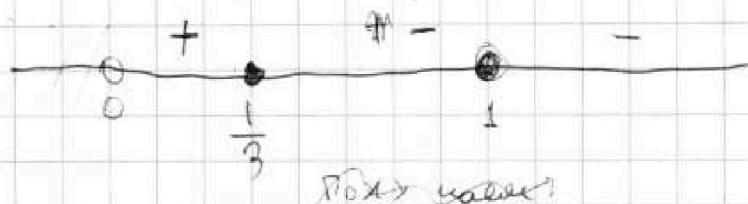
$$\ln a - a + 1 = 0 \quad \ln a = a - 1$$

$$(\ln a)' = \frac{1}{a} - (\ln 1)' = 1 \Rightarrow \text{линейная}$$

к $\ln a$ в точке $(1, \ln 1) = (1, 0)$ имеет угловой коэффициент 1, то $a-1$ проходит через $(1, 0)$ и имеет угловой коэффициент 1. $a-1$ - касательная к $\ln a$ $(\ln a)'' = -a^{-2} < 0$ (при $a > 0$) \Rightarrow выпуклая

\Rightarrow касательная должна не пересекать $\ln a$ иначе говорят $\ln a = a-1$ имеет только один корень, $a=1$

Возможные методы интервалов





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

По 1) получим $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}$ $\Leftrightarrow -3 < x \leq -2 \frac{2}{3}$

$\alpha = 1$

$x = -2$

Ответ: $x \in (-3 ; -2 \frac{2}{3}] \cup \{-2\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

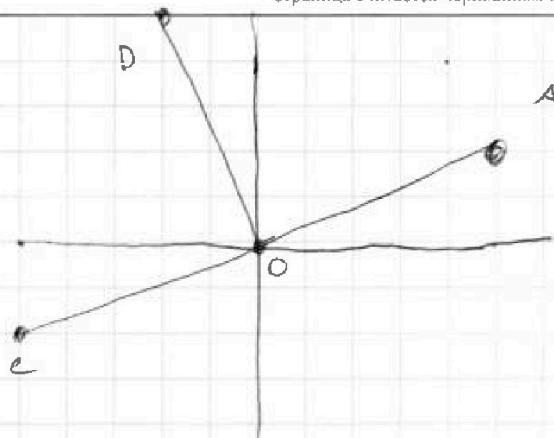
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) При $x > 6$ A, C - вершины квадрата

лежащие на второй квадранте прямой $y = \frac{2x}{5}$

A, C - симметричные относительно угла квадрата $\Rightarrow A = (5x_0, 2y_0)$ $C = (-5x_0, -2y_0)$

$$2y_0 = \frac{2 \cdot 5x_0}{5} \Rightarrow y_0 = x_0$$

и $DO = 40$

$DO + CA = \Rightarrow DO$ прямой $D = (-2x_0, 5x_0)$

$$\text{и.к. } A \in \frac{x^3}{9} + ax \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{125x_0^3}{9} + a \cdot 5x_0 = 2x_0 \\ -\frac{3x_0^3}{9} + a \cdot 2x_0 = 5x_0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{250x_0^3}{9} + 10ax_0 = 9x_0 \quad (*) \\ -\frac{40x_0^3}{9} - 10ax_0 = 25x_0 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{210x_0^3}{9} = 29x_0$$

(x_0 - оставшись не равен 0)

$$210x_0^2 = 29 \cdot 9$$

$$x_0 = \pm \sqrt{\frac{29 \cdot 9}{210}} \quad \text{подставим в (*)}$$

$$\frac{250 \cdot \frac{29 \cdot 9}{210} x_0}{9} + 10ax_0 = 9x_0 \Rightarrow \frac{25 \cdot 29}{21} + 10a = 9$$
$$a = \frac{9}{10} - \frac{25 \cdot 29}{210}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 ~~№5~~ №7 но и. Рассмотрим

$$S = AD^2 = (5x_0 + 2x_0)^2 + (2x_0 - 5x_0)^2 = (4x_0)^2 + (3x_0)^2 = \\ = 9x_0^2 + 9x_0^2 = 58x_0^2 = 58 \cdot \frac{29 \cdot 4}{210}$$

Однако: $\alpha = \frac{4}{10} = \frac{25 \cdot 29}{210}$

$$S = 58 \cdot \frac{29 \cdot 6}{210}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} \quad (\text{m-k. } \beta < \frac{\pi}{2}) = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \angle}{121}} =$$
$$r_1 = \sqrt{121 - \cos^2 \angle}$$

$$\sin \angle = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \angle}{\cos^2 \angle}} \quad (\text{m-k. } \angle < \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{AF}{FB} = 1 + r_1 \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \angle} = \frac{\sqrt{121 - \cos^2 \angle}}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \angle}{\cos^2 \angle}}} = \frac{\sqrt{121 - \frac{1 + \cos^2 \angle}{2}}}{\sqrt{1 - \frac{1 + \cos^2 \angle}{2}}}$$

Несоблюдается

Решение верное

$$\text{m-k. } \frac{AF}{FB} = \frac{1}{\cos^2 \angle}$$

$$\frac{121 - 1 - \cos^2 \angle}{1 - \cos^2 \angle} = \frac{1}{\cos^2 \angle} \quad (\text{из условия задачи-} \\ \text{верно})$$

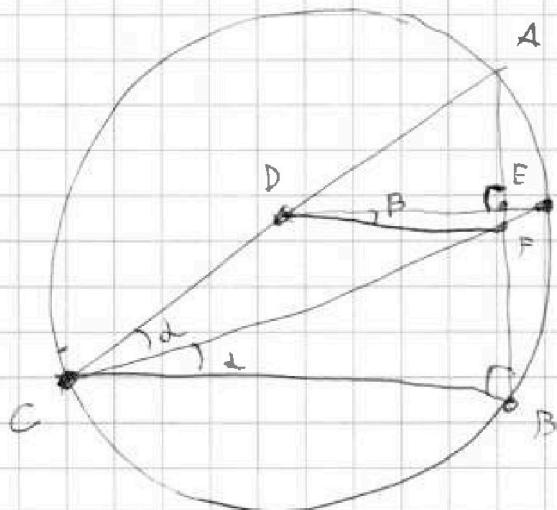
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) $\angle MKC = \angle MCF$

M - середина дуги AB

М не содержит точку C.
(т.к. $\angle FCB = \angle FCA \Rightarrow$ Фигура
заключена между двумя
касательными)

2) $ME \perp AM = BM$ (хорда

смешивающие равные
дуги. \Rightarrow ME - биссектриса в равноделегированной тре-

угольнике \Rightarrow высота $\Rightarrow ME \perp AB \Rightarrow ED \perp AB$

$\Rightarrow CB \perp AB$ (т.к. DE || CB т.к. DE - горизонталь
линия) $\Rightarrow \angle B = 90^\circ$

$CF = 2x \quad DF = 11x$

3) $\angle FCB = \alpha \quad \angle FDE = \beta \quad \cos \alpha = \frac{CB}{CF} = \frac{CB}{2x}$

$\cos \beta = \frac{DE}{DF} = \frac{\frac{OB}{2}}{11x} = \frac{CB}{22x} \Rightarrow \cos \beta = \frac{\cos \alpha}{44}$

$BF = CF \cdot \sin \alpha = 2x \sin \alpha; \quad EF = DF \cdot \sin \beta =$

$= 11x \sin \beta$

$\frac{AF}{FB} = \frac{AE + EF}{FB} = \frac{BE + EF}{FB} = \frac{FB + 2EF}{FB} = 1 + 2 \cdot \frac{EF}{FB}$

$= 1 + 2 \cdot \frac{11x \sin \beta}{2x \sin \alpha} = 1 + \frac{11 \sin \beta}{\sin \alpha}$

С другой стороны $\frac{AF}{FB} = \frac{CA}{CB} = \frac{1}{\cos \alpha}$ (но т. одн.)



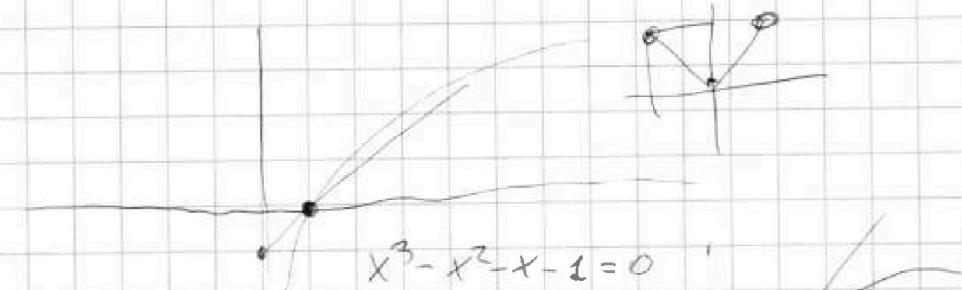
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} \alpha \operatorname{tg} x \\ 1 - \operatorname{tg}^2 x \end{aligned}$$

$$\sin(x - \frac{3\pi}{4}) = \underbrace{\sin x \cos \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{3\pi}{4} \cos x}_{=}$$

$$\operatorname{tg} x \cos(x - \frac{3\pi}{4}) = \cos x \cos \frac{3\pi}{4} + \sin x \sin \frac{3\pi}{4}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} x \cos \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{3\pi}{4}}{\cos \frac{3\pi}{4} + \operatorname{tg} x \sin \frac{3\pi}{4}}$$

$$2 \operatorname{tg}^2 x \sin \frac{3\pi}{4} = (\operatorname{tg} x \cos \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{3\pi}{4})(1 - \operatorname{tg}^2 x)$$

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \alpha \quad \cos \frac{3\pi}{4} = -\alpha$$

$$2 \operatorname{tg}^2 x = -(+\operatorname{tg} x + \alpha)(1 - \operatorname{tg}^2 x) =$$

$$= -(+\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x + \alpha - \operatorname{tg}^2 x)$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x +$$

$$\alpha \operatorname{tg}^3 x = -\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - \alpha$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a^3 \geq \ln^2(x+3) - (x+3)(\ln 3 + \ln(x+3)) + \ln(3) \ln(x+3)$$

$$a = ab = ab^2$$

$$\ln a = \alpha - 1$$

$$a^3 b^3 = 2^{90} \cdot 19^{90}$$

$$e^{\alpha-1} = \alpha$$

$$\frac{3 \sin x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x + \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \quad a = 2^{\frac{90}{-11}}$$
$$= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \quad b = 2^{\frac{-11}{9}}$$

$$a = \frac{1}{3}$$

$$4) \quad p_a; \quad p_b$$

$$\ln(a) + \ln 3 = 0$$

$$3p_a + 3p_b = 90$$

$$p_a + p_b = 30 \rightarrow 30 \text{ выражение}$$

$$2) \quad p_a;$$

$$\frac{1}{x} x^{-2} - x^{-2}$$

$$p_a - p_b > 0$$

$$p_a - 2p_b > 0$$

$$\frac{3}{2} \frac{6}{6}$$

$$3p_a - 5p_b = 90$$

$$216 - 36 - 6 = 114$$

$$p_a - p_b = 30$$

$$\ln^2 a - a \ln 3 - a \ln a + \ln 3 \cdot \ln a$$

X2

$$\ln a (\ln a - a) + \ln 3 (\ln a - a) =$$

$$= (\ln a - a) (\ln a + \ln 3) > 0$$

$$\ln^2(a) - (a-1)(\ln 3 + \ln a) + \ln 3 \cdot \ln a$$

$$\ln^2(a) - a \ln 3 + \ln 3 - a \ln 3 - a \ln a + \ln 3 \cdot \ln a$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$205 \sin x \cos x +$$

$$5\alpha - \theta = -\pi - \alpha$$

$$\frac{\alpha}{\alpha + \alpha} = \frac{-\theta}{\theta}$$

$$= \sin^2$$

$$\begin{aligned} & \frac{-\alpha \sin x - \alpha \cos x}{-\alpha \sin x + \alpha \cos x} = \frac{-\alpha \cos x + \alpha \sin x}{\sin x + \cos x} \\ & = \frac{\sin x \cos \frac{3\pi}{2} + \sin x \sin \frac{\pi}{2}}{\cos x \cos \frac{3\pi}{2} + \sin x \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{\sin x \cos \frac{3\pi}{2} + \sin x \sin \frac{\pi}{2}}{\cos x \cos \frac{3\pi}{2} + \sin x \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{1 - \tan x}{\cot x} = \frac{1 - \tan x}{\cot x} = \frac{1 - \tan x}{\cot x} = \end{aligned}$$

$$6 \cdot 6 \cdot 6$$

$$x = (2-x)(1+x+z)$$

$$x = (1+x+z) + (1+x+z)(1-x)$$

$$0 = x - x - z - z$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

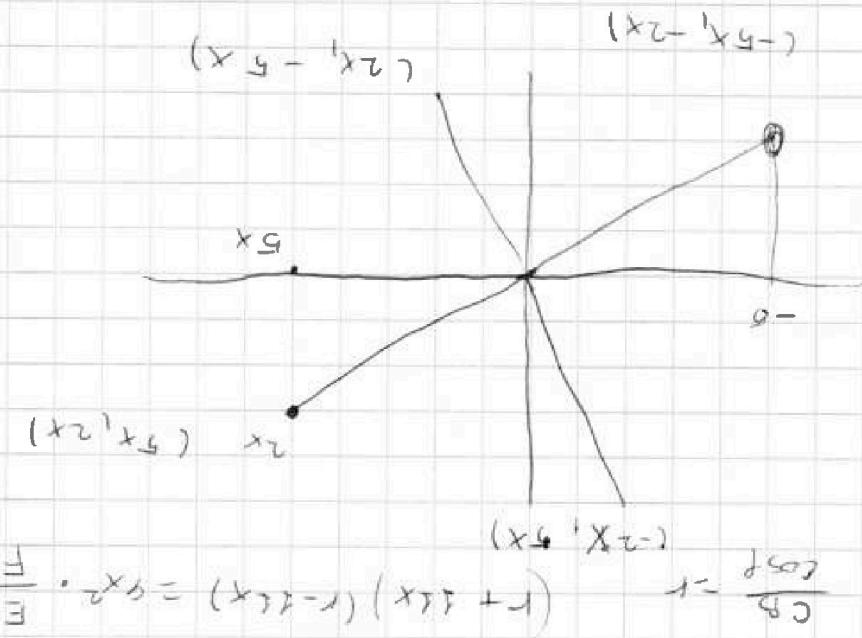
5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(r + 2x)(r - 2x) = 4x^2 \cdot \frac{FB}{CB} = \cos^2 \theta$$

$$4x^2 \cdot \frac{FB}{CB} = A_F \cdot F_B$$

$$x^2 = \frac{MF}{FE} = \frac{FB}{CE}$$

$$x^2 = \frac{6}{(x+1)^2} \quad 0 = 1 + x + x^2(1-x)(1+x) + x^3$$

$$\frac{4}{(x+1)^2} + 4x = 2x \quad 0 = 1 - x + x^2(1-x)(1+x) + x^3$$

$$(x-1)(x+1)(x-1+x)(x-1-x) = 0$$

$$x_1 = 1 + \frac{6}{x^2}$$

$$\frac{\tau_{2502}}{1} = \frac{\tau_{2502} - 1 - 1}{\tau_{2502} - 1 - 2(1-x)}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

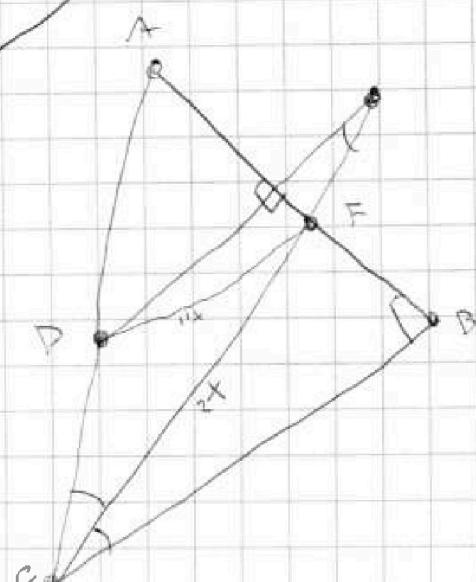
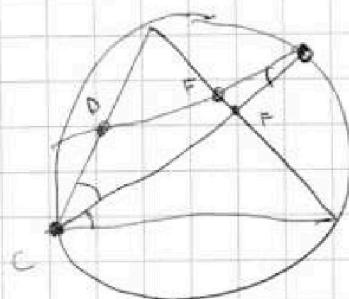
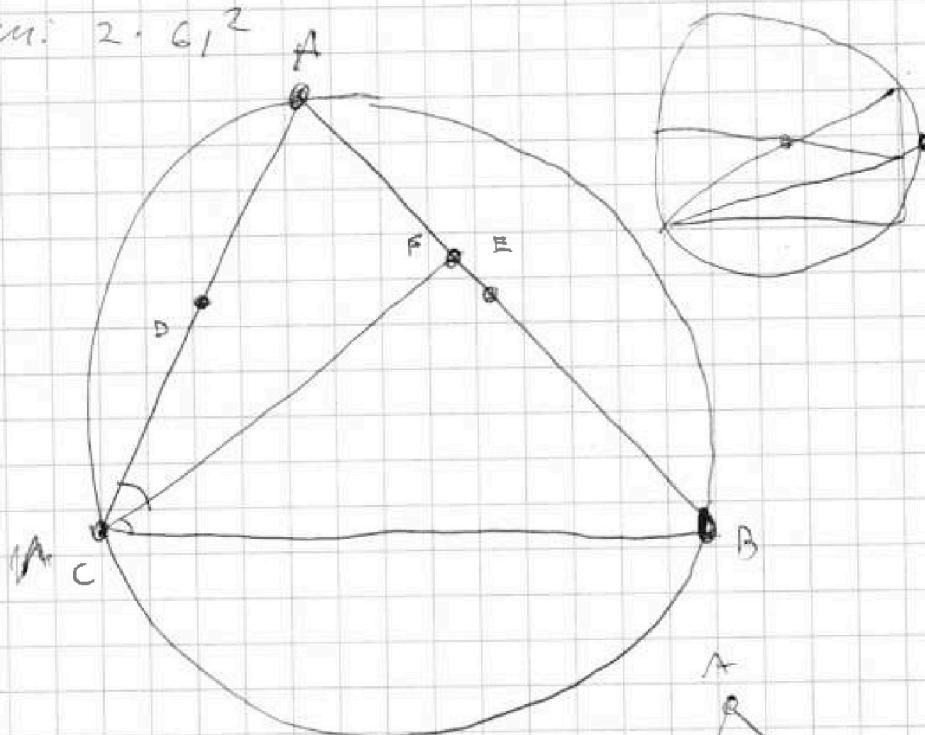
Число искаемое:

$$36 \cdot 30 = 32 \cdot 36 + 30 \quad (32+30)(31+30) = 61^2 \text{ ошибочно}$$

Число кратное трех чисел (a, ab, ab^2) значит,
что $a \cdot ab \cdot ab^2 = 2^{10} \cdot 15^2$, что в задаче сказано
также про члены числовых чисел. Поэтому
искомое число $2 \cdot 61^2$ т.е. кратное числу

(a, ab, ab^2) состоящему из цифр $(-a, ab, -ab)$

Следим: $2 \cdot 61^2$





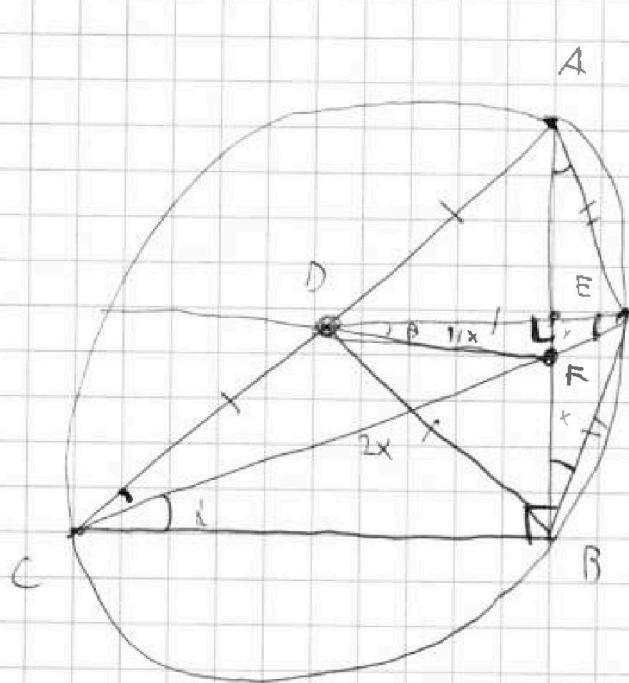
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin \beta$$

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \\ &= \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \alpha}{121}} = \\ &= \frac{\sqrt{121 - \cos^2 \alpha}}{11} \end{aligned}$$

$$\cos \beta = \frac{\cos \alpha}{11}$$

$$\frac{1}{\cos \beta} \cdot \frac{CB}{2x} = \frac{CB}{2x \cos \beta}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 \alpha} &= CB \cdot \tan \alpha \\ &= 2x \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

$$\frac{CB}{2x} = \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} FE &= \frac{CB}{2} \cdot \tan \beta \\ &= 11x \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

$$1 + 2 \cdot \frac{y}{x} = \frac{1}{\cos \beta}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos^2 \beta}{2}$$

$$x = 2 \cdot \sin \beta$$

$$\frac{x}{x+y} = \frac{x}{x+2y} = \frac{CB}{cA} = \cos 2\beta$$

$$y = 11x \cdot \sin \beta$$

$$1 + \frac{\sqrt{121 - \cos^2 \alpha}}{\sqrt{1 - \cos^2 \beta}} = \frac{1}{2 \cos^2 \alpha - 1}$$

$$1 + 2 \cdot \frac{y}{x} = 1 + 2 \left(\frac{11}{2} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right)$$