



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 6

1. [4 балла] Решите уравнение

$$4 \operatorname{tg} 2x + 1 + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $3^{240} \cdot 7^{240}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2(x+2) - (x+1)\ln(4x+8) + (\ln 4)\ln(x+2) \geq 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -2x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 5x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC . Лучи DE и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{11}}$.

6. [5 баллов] Числа x , y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} = z^3 + \frac{10}{x^3}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения xyz .

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{10}$, $AD = DC = 2$, $AC = 2\sqrt{2}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10}$. Найдите:

- а) объём пирамиды;
б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB , SBC и ребра SD .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sim \text{1} \quad 4 \operatorname{tg} 2x + 1 + \operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{4}) = 0;$$

$$\frac{4 \cdot 2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 1 + \frac{\operatorname{ctg} x \cdot 1 - 1}{\operatorname{ctg} x + 1} = 0;$$

$$\frac{8 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 1 + \frac{\operatorname{ctg} x - 1}{\operatorname{ctg} x + 1} = 0;$$

Учитывая $\operatorname{tg} x = t$. Итогда $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{t}$.
(Дополнительное рассмотрение случаев $\operatorname{tg} x = 0$)

$$\frac{8t}{1-t^2} + 1 + \frac{\frac{1}{t}-1}{\frac{1}{t}+1} = 0;$$

$$\frac{8t+1-t^2}{1-t^2} = \frac{1-\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}+1};$$

$$8 + \frac{1}{t} - t + 8t + 1 - t^2 = 1 - \frac{1}{t} \Rightarrow t^2 + t - 8 = 0;$$

$$6t^2 + 8t + 2 = 0; \quad (-t, T.K. t \neq 0).$$

$$6t^2 + 8t + 2 = 0;$$

$$3t^2 + 4t + 1 = 0;$$

$$\frac{D}{4} = 4 - 3 = 1 > 0 \Rightarrow 2 \text{ корня}$$

$$t_1 = \frac{-2 - 1}{3} = -1 \quad \text{не подходит по О.О.З.}$$

$$t_2 = \frac{-2 + 2}{3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = \arctg(-\frac{1}{3}) + \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

Сделали проверку. $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \operatorname{ctg} x = -3$

$$4 \operatorname{tg} 2x + 1 + \operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{4 \cdot 2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 1 + \frac{\operatorname{ctg} x - 1}{\operatorname{ctg} x + 1} = -\frac{8}{3} \cdot \frac{9}{8} + 2 + \\ + \frac{(-4)}{(-2)} = -3 + 1 + 2 = 0. \quad (\checkmark)$$

Ответ: $x = \arctg(-\frac{1}{3}) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$\text{O.O.3: } \cos 2x \neq 0 \Rightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \frac{\pi}{4} \neq \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$\Rightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Учтите что $\operatorname{tg} x \neq \pm 1 \Rightarrow \operatorname{ctg} x \neq \pm 1$

Если $\operatorname{tg} x = 0, \text{ то}$

$$x = \pi k, \text{ тогда:}$$

$$4 \cdot \operatorname{tg} 2\pi k + 1 + \operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{4}) \neq 0;$$

$$4 \cdot 0 + 1 + 1 \neq 0$$

$$\operatorname{tg} x \neq 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2 Доказать, что в геометрической прогрессии a, b, c $a^3 \cdot b^3 = c^3$.

Понятно $b = aq$, $c = bq = aq^2 \Rightarrow abc = a^3 \cdot q^3$.

По условию $abc = 3^{240} \cdot 7^{240} \Rightarrow a^3 \cdot q^3 = 3^{240} \cdot 7^{240} \Rightarrow$
 $\Rightarrow aq = 3^{80} \cdot 7^{80}$, $aq = b \Rightarrow b = 3^{80} \cdot 7^{80}$.

Заметим, что $q \in \mathbb{Q}$, т.к. $c \in \mathbb{Z}$ по условию

$c = 3^{80} \cdot 7^{80} \cdot q$. Тогда $q = \frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$,
 $|m| < n$ будем искать варианты.

Понятно $a = \frac{b}{q} = \frac{3^{80} \cdot 7^{80} \cdot n}{m}$, $c = bq = \frac{3^{80} \cdot 7^{80} \cdot m}{n} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 3^{80} \cdot 7^{80} : |m| < 3^{80} \cdot 7^{80} : n \Rightarrow$ есть несколько хороших вариантов

для $\frac{m}{n}$: 1) $\frac{m}{n} = \pm 3^\alpha \cdot 7^\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \alpha, \beta \leq 81$, но
кроме $\alpha = \beta = 0$

$$2) \frac{m}{n} = \pm \frac{1}{3^\alpha \cdot 7^\beta}$$

$$3) \frac{m}{n} = \pm \frac{3^{\gamma\delta}}{7^{\gamma\delta}}, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}, 0 < \gamma, \delta \leq 81$$

$$4) \frac{m}{n} = \pm \frac{2^\delta}{3^\gamma}$$

Для 1) количество способов выбрать α и $\beta = 82 \cdot 82 - 1$ (исключаем $\alpha = \beta = 0$).

т.к. m может быть ≤ 0 , получаем всего 400 вариантов

$\frac{m}{n} = \pm 2(82 \cdot 82 - 1)$ (для каждого из них $b = 3^{80} \cdot 7^{80} \Rightarrow$
 $a = \frac{b}{q} \cdot q$ различны \Rightarrow различны a и $c \Rightarrow$ различны
брюки числа)

Для 2), очевидно, столько же вариантов, т.к.

по 2)-му случаю нам нужно обратное q из 1)-го
случае. (По сути, б 1) дробная часть прогрессии
здесь - удвоившаяся)

Для 3) вариантов $(82 \cdot 82) \cdot 2$, для 4) по аналогии
столько же. Понятно $4(82 \cdot 82 - 1) + 4 \cdot 82 \cdot 82 =$
 $= 4 \cdot (82^2 + 82^2 - 1) = 4 \cdot (6724 + 6560) = 4 \cdot 13284 = 53136$

Ответ 53136.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{у3} \quad \ln^2(x+2) - (x+1) \cdot \ln(4x+8) + \ln 4 \cdot \ln(x+2) \geq 0; \quad 0.0.3.: \quad x > -2$$

$$\ln^2(x+2) - (x+1) \cdot \ln 4 - (x+1) \cdot \ln(x+2) + \ln 4 \cdot \ln(x+2) \geq 0;$$

$$(\ln(x+2) - (x+1)) (\ln(x+2) + \ln 4) \geq 0;$$

$$\ln(4x+8) \cdot (\ln(x+2) - (x+1)) \geq 0;$$

$$\begin{cases} \ln(4x+8) = 0 \\ \ln(x+2) - (x+1) = 0 \\ \ln(4x+8) > 0 \\ \ln(x+2) - (x+1) > 0 \\ \ln(4x+8) < 0 \\ \ln(x+2) - (x+1) < 0 \end{cases}$$

1. $\ln(4x+8) = 0 \Rightarrow 4x+8=1 \Rightarrow x = -1,75$
 $x = -1,75$

2. $\ln(x+2) - (x+1) = 0 \Rightarrow x \in (-2; -1,75)$ $\ln(4x+8) < 0$,
при $x = -1,75$ $\ln(4x+8) = 0$,
при $x \in (-1,75; +\infty)$ $\ln(4x+8) > 0$

$$1. \ln(x+2) - (x+1) = 0;$$

$$\ln(x+2) = (x+1).$$

расмотрим
уравнение

$$y_1 = (x+1)$$

$$y_2 = \ln(x+2)$$

$$\text{две точки } (-1; 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{одно решение } x = -1$$

~~$y_1(x) \neq y_2(x) \Rightarrow \text{если есть третье}$~~
~~пересечение, т.е. $x_2 \neq -1$ у y_2 касательная~~
~~то $x_2 \in (-2; 0)$~~

~~тогда больше 3 ур-е ищ~~

$$y_2 > y_1, \text{ т.е. } \ln(x_2+2) > (x_2+1)$$

$$\Rightarrow x_2 > -1$$

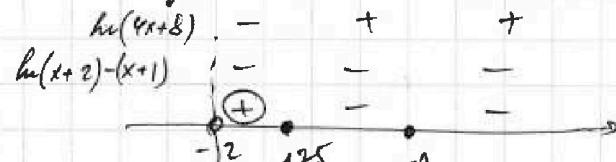
$$\text{тогда } x_2 \in (-1; 0)$$

~~уравнение $y_1(x) = y_2(x)$ в точке $x = -1$ имеет один корень~~

$$y_2' = \frac{1}{x+2}. \quad \text{Тогда получаем ур-е касательной}$$

в точке с коорд $x = -1$ ур-е кас-й $y = x+2 \Rightarrow$

~~тогда эта же касательная где $y_2 = \ln(x+2)$ имеет один корень $x = -1$~~



Одни: $x \in (-2; -1,75] \cup \{-1\}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

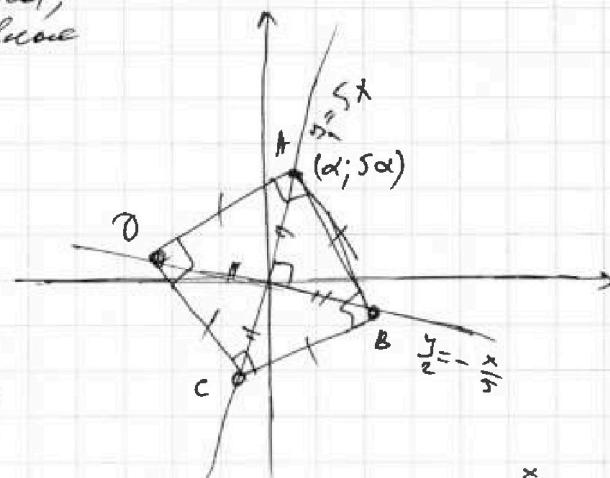
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№9
Диагональ AB л-ка, равнос.
длигась точкой л-я на рабочем
столе.

Из перпендикульности
боков диагонали лежат
на $y = -\frac{x}{5}$

Тогда вершина квадрата
в I коорд. четверти
имеет коорд-ты $(d; 5\alpha)$,
(F.K. $\epsilon y=5x$)

$C(-d; -5\alpha)$ из симметрии ф-й $y=5x$ и $y=-\frac{x}{5}$
относительно начала координат.
(нечет. ф-ии); $B(5\alpha; \alpha)$, $D(-5\alpha; \alpha)$.



$$\begin{aligned} \text{Найти } d \text{ при } y_1: & \begin{cases} -2\alpha^3 - ad = 5\alpha \\ -2(5\alpha)^3 - a \cdot 5\alpha = -d \end{cases} \\ \text{при } y_2: & \begin{cases} 10\alpha^3 + 5a\alpha = -25\alpha \\ -250\alpha^3 - 5a\alpha = -d \end{cases} \\ \text{так как } & -240\alpha^3 = -26\alpha; \alpha \neq 0, \text{ иначе} \\ -2\alpha^3 - ad = 5\alpha \cdot (-5) & \text{квадрат верх} \\ -250\alpha^3 - 5a\alpha = -\alpha & \text{расположен в} \\ / & \text{четверти} \\ \Rightarrow & \alpha = \sqrt{\frac{26}{240}} = \sqrt{\frac{13}{120}} \quad (\because \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Проверив } & d = \sqrt{\frac{13}{120}} \text{ в упр-е} \\ -2\left(\sqrt{\frac{13}{120}}\right)^3 - a\sqrt{\frac{13}{120}} & = 5\sqrt{\frac{13}{120}}; \\ -\frac{2 \cdot 26^{13}}{120 \cdot 60} - a & = 5 \Rightarrow a = -\frac{313}{60}. \end{aligned}$$

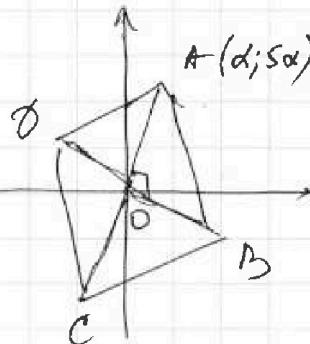
Проверим, пересадив в I упр-е:

$$\begin{aligned} -250 \cdot \left(\sqrt{\frac{13}{120}}\right)^3 + \frac{5 \cdot 313}{60} \sqrt{\frac{13}{120}} & = -\sqrt{\frac{13}{120}}; \\ -\frac{125}{120 \cdot 60} + \frac{5 \cdot 313}{60} & = -1 \end{aligned}$$

$$S_{\text{кв}} = \frac{d^2}{2}; \quad -1 = -1 \quad \text{- Верно}$$

$$\Rightarrow S_{\text{кв}} = 52d^2 = \frac{52 \cdot 13}{120} = \frac{169}{30} \Rightarrow d = 2d\sqrt{26} \Rightarrow$$

$$\underline{\text{Одно: }} a = -\frac{313}{60}, \quad S_{\text{кв}} = \frac{169}{30}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{I. } x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} = z^3 + \frac{10}{x^3}$$

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = z^3 + \frac{10}{x^3} \Rightarrow I. x^3 - z^3 = \frac{10(y^3 - z^3)}{x^3 y^3}$$

$$y^3 + \frac{10}{z^3} = x^3 + \frac{10}{y^3} \Rightarrow II. y^3 - x^3 = \frac{10(z^3 - y^3)}{z^3 \cdot y^3}$$

$$z^3 + \frac{10}{x^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} \Rightarrow III. z^3 - y^3 = \frac{10(x^3 - z^3)}{x^3 z^3}$$

Пусть $x \neq z$:

$$x^3 - z^3 = \frac{10 \cdot 10(z^3 - y^3)}{x^3 \cdot y^3 \cdot z^3 \cdot y^3} = \frac{1000(x^3 - z^3)}{x^6 \cdot y^6 \cdot z^6} \quad \begin{array}{l} \text{то усл. не все} \\ \text{числа равны} \\ \text{ между собой} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{хорошо одно} \\ \text{из этих двух} \\ \text{бюд-и} \neq 0 \end{array}$$

$$\text{тогда } x^3 - z^3 \neq 0 \Rightarrow ((x^3 - z^3)) \Rightarrow I = \frac{1000}{x^6 \cdot y^6 \cdot z^6} \Rightarrow x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = 10$$

$$\begin{aligned} \text{тогда} \\ xyz = \pm \sqrt[6]{10} \Rightarrow \\ \Rightarrow \max \text{ знач. } xyz = \\ = \sqrt[6]{10} \end{aligned}$$

(Если $x = z$, тогда по усл. $y \neq x, y \neq z \Rightarrow$
 $\Rightarrow z^3 - y^3 \neq 0$.

$$z^3 - y^3 = \frac{10(x^3 - z^3)}{x^3 \cdot z^3} = \frac{100(y^3 - x^3)}{x^6 \cdot z^3 \cdot y^3} = \frac{1000(z^3 - y^3)}{(x^6 \cdot y^6 \cdot z^6)}$$

$$1000 = x^6 \cdot y^6 \cdot z^6. \quad \text{Число получили } xyz = \pm \sqrt[6]{10})$$

$$\text{Ответ: } \sqrt[6]{10}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

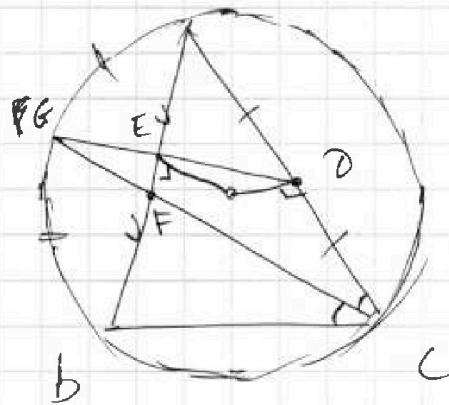
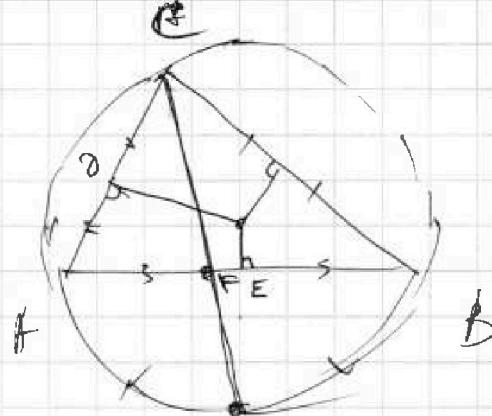
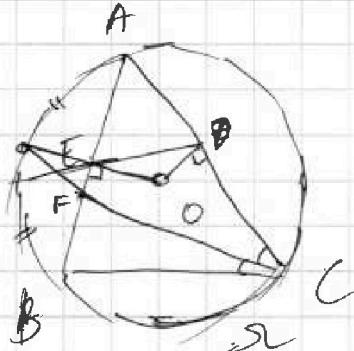


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

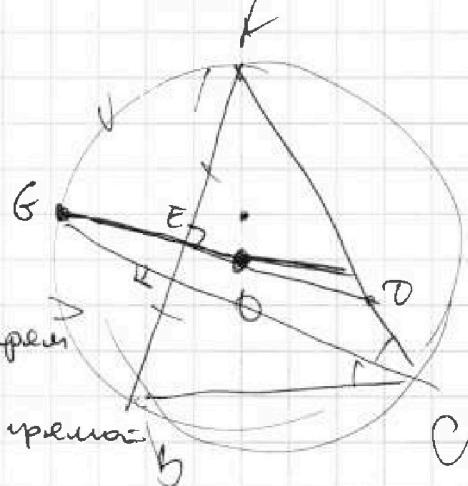
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(1)



$$\frac{EF}{OF} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$$



G, E, D ∈ одна прям.

G, E, O ∈ одна прям.

O, E, G - одна прям.

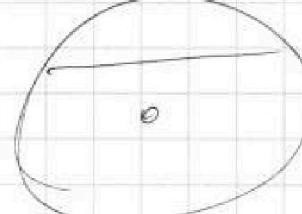
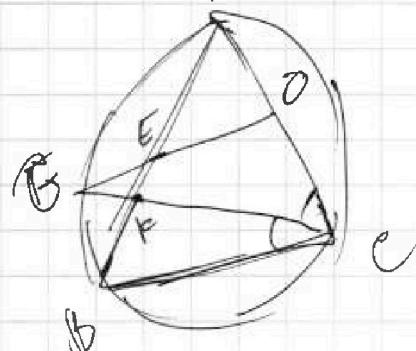
G, E, O - одна прям.

$$f(x) = \ln(x+2) \quad (-1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+2}$$

~~$$y = \cancel{f(x)}(x-x_0) + f'(x)$$~~

~~$$(x+x_0)$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Задача } 4.3 + 10 + 12 = 34$$

$$x^5 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} = z^3 + \frac{10}{x^2}$$

$$x^5 + \frac{10}{y^3} = z^3 + \frac{10}{x^2}$$

~~$$x^5 - z^3 = \frac{10}{y^3} - \frac{10}{x^2}$$~~

$$x^3 - z^3 = \frac{10}{x^3} - \frac{10}{y^2}$$

$$x^3 - z^3 = \frac{10(y^3 - x^3)}{x^3 y^3}$$

$$y^3 - x^3 = \frac{10(z^3 - y^3)}{y^3 z^3}$$

$$x^3 - z^3 = \frac{10 \cdot 10 (z^3 - y^3)}{y^3 \cdot z^3 \cdot x^3 \cdot y^3}$$

$$z^3 - y^3 = \frac{10(x^3 - z^3)}{x^3 \cdot z^3}$$

~~$$x^3 - z^3 = \frac{1000(x^3 - z^3)}{x^6 \cdot y^6 \cdot z^6}$$~~

$$1 = \frac{1000}{x^6 \cdot y^6 \cdot z^6}$$

$$x^6 \cdot y^6 \cdot z^6 = 1000$$

$$x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = 10$$

$$x=1, y=1, z=\sqrt[6]{10}$$

$$xyz = \pm \sqrt[6]{10} \Rightarrow xyz_{\max} = \sqrt[6]{10}$$

$$1 + \frac{10}{10\sqrt[6]{10}} = 1 + \frac{1}{\sqrt[6]{10}} = \frac{10 + \sqrt[6]{10}}{10}$$

$$10\sqrt[6]{10} + 10$$

$$xyz = \sqrt[6]{10}$$

$$x = z = \sqrt[6]{10}$$

$$y = \sqrt[6]{10}$$

$$(-\sqrt[6]{10})^2 + \frac{10}{\sqrt[6]{10}} = \sqrt[6]{10} \mp \sqrt[6]{10} = 0$$

$$\sqrt[6]{10} - \frac{10}{\sqrt[6]{10}} = 0$$

$$-\sqrt[6]{10} \mp -\sqrt[6]{10} =$$



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

будем считать, что мы имеем $y = \ln(x+2) - (x+1)$

$$x = -1$$

$\ln(x+2) - (x+1) < 0$ всегда, при $-2 < x < -1$
если $x < -2$ (однако $\ln(0,5) - 0,5 < 0$)
 $x = -1 (=)$ можно менять

I

II

+

$\begin{array}{r} - \\ - \\ \hline -2 \end{array}$

$\begin{array}{r} -1,75 \\ + \\ \hline -1 \end{array}$

при $x > -1$

$\ln(2) -$

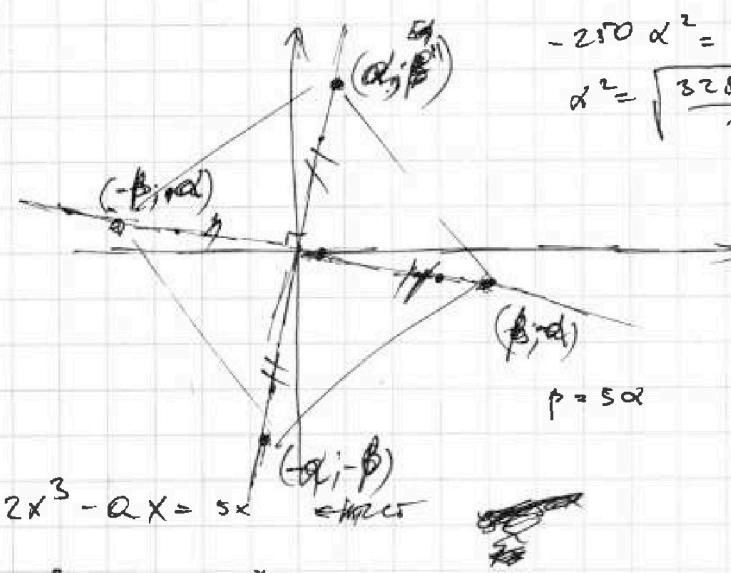
$\ln(x+2) - (x+1) > 0$

$\ln(x+2) > (x+1)$

или

$x \in (-2; -1,75) \cup \{-1\}$.

4)



$$-250 \alpha^2 = \frac{-325}{12}$$

$$\alpha^2 = \sqrt{\frac{325 - 250}{12}}$$

$$\text{нагл} \quad y_1 = 5x \quad y_2 = -\frac{x}{5}$$

$$y_{\text{раб}} = -2x^3 - ax^2$$

$$b = 5a$$

$$-2x^3 - ax^2 = 5x$$

имеет корни

$$\alpha = -\alpha$$

$$\begin{cases} -2\alpha^3 - a\alpha^2 = 5\alpha \\ +2\alpha^3 + a\alpha^2 = -5\alpha \end{cases} \quad \text{D}$$

$$-2x^3 - ax^2 = -\frac{x}{5}$$

$$\text{при } x = 5\alpha \quad \text{и } x = -5\alpha$$

$$-2 \cdot 125\alpha^3 - 5a\alpha = -\alpha$$

$$\alpha = 125\alpha^3 + 5a\alpha$$

$$\begin{cases} -2\alpha^3 - a\alpha = 5\alpha \\ -2 \cdot 125\alpha^3 - 5a\alpha = -\alpha \end{cases} \quad \text{послед}$$

$$-2 \cdot 125\alpha^3 - 5a\alpha = -\alpha$$

$$\text{так же} \quad \begin{cases} -2\alpha^3 - a\alpha = 5\alpha \\ -250\alpha^3 - 5a\alpha = -\alpha \end{cases} \quad \cdot (-5)$$

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{13}{120}} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{13}{30}}$$

$$\begin{cases} 10\alpha^3 - 5a\alpha = 5\alpha \\ 10\alpha^3 + 5a\alpha = -25\alpha \end{cases} \quad +$$

$$-250\alpha^3 - 5a\alpha = -\alpha$$

$$-240\alpha^3 = -26\alpha \quad \alpha \neq 0$$

$$\alpha^2 = \frac{26}{240} = \frac{13}{120}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\alpha = \sqrt{\frac{13}{120}} \quad \text{изображение} \quad \text{найдем } \alpha$$

$$-2 \left(\sqrt{\frac{13}{120}} \right)^8 - \alpha \sqrt{\frac{13}{120}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{13}{120}}$$

$$- \frac{2 \cdot 13}{\frac{120}{60}} - \alpha = 5 \quad \alpha = - \frac{13}{60} - 5 = - \frac{15 - 300}{60} = -$$

$$-2 \left(\sqrt{\frac{13}{120}} \right)^8 + \frac{313}{60} \cdot \sqrt{\frac{13}{120}} = - \frac{1}{5} \cdot \sqrt{\frac{13}{120}} \quad \frac{-313}{60}$$

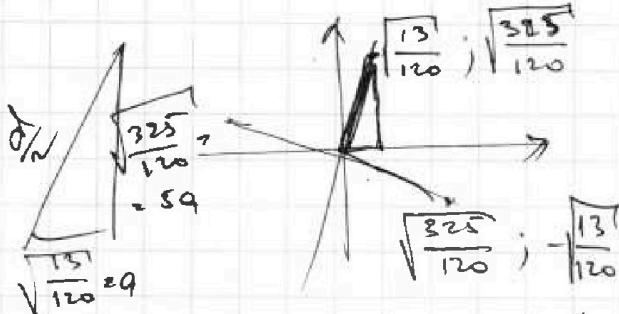
$$- \frac{2 \cdot 13}{\frac{120}{60}} + \frac{313}{60} = \frac{513 - 13}{60} = 5 \quad (h(x+2))' = \frac{1}{x+2} \quad (-1) \cdot 1$$

$$-2x^8 + \frac{313}{60} x = -\frac{x}{5} \quad h'(x-x_0) + y_0 =$$

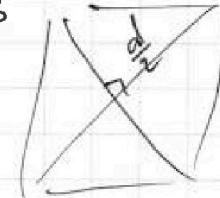
$$-2x^8 + \frac{313}{60} = -\frac{1}{5} =$$

$$2x^8 = \frac{313}{60} + \frac{1}{5} = \frac{313 + 12}{60} = \frac{325}{60} = \frac{625}{120}$$

$$x = \sqrt{\frac{325}{120}} \quad ? \quad \sqrt{\frac{13}{120}} \cdot 5 = \sqrt{\frac{13 \cdot 25}{120}} = \sqrt{\frac{260 + 50 - 15}{120}} \quad \textcircled{1}$$



$$-\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}$$



$$\sqrt{a^2 + 25q^2} = a\sqrt{26} \quad \frac{d}{2} = a\sqrt{26}$$

$$\frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{d^2}{2}$$

$$P_2 \quad \frac{\frac{13}{120} \cdot 13}{60} = \frac{169}{30} \quad d = d\sqrt{26} \Rightarrow \frac{d^2}{2} =$$

$$= \frac{9a^2 \cdot 26}{2} = 2a^2 \cdot 26$$

$$h(x+2) > (x+2)$$

$$125 \cdot 13 = 1250 + 300 + 75 = \\ \approx 1625 + 1565 =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(\ln(x+2) + \ln 4) (\ln(x+2) - (x+1)) \geq 0$$

~~$\ln(x+2) + \ln 4 = 0$~~

$$\ln(4x+8) \circ (\ln(x+2) - (x+1)) \geq 0$$

$$b = \ln a$$

$$a = \ln b$$

~~$a = 6e^b$~~

~~6e^b~~

$$e^{-a} = b \Rightarrow b = \frac{1}{e^a}$$

$$\begin{cases} \ln(4x+8) = 0 \quad (1) \\ \ln(x+2) - (x+1) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln(4x+8) > 0 \quad (3) \\ \ln(x+2) - (x+1) > 0 \quad (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln(4x+8) < 0 \quad (5) \\ \ln(x+2) - (x+1) < 0 \quad (6) \end{cases}$$

$$1) \ln(4x+8) = 0$$

$$4x+8 = 1$$

~~$e^b = \ln\left(\frac{1}{6}\right)$~~

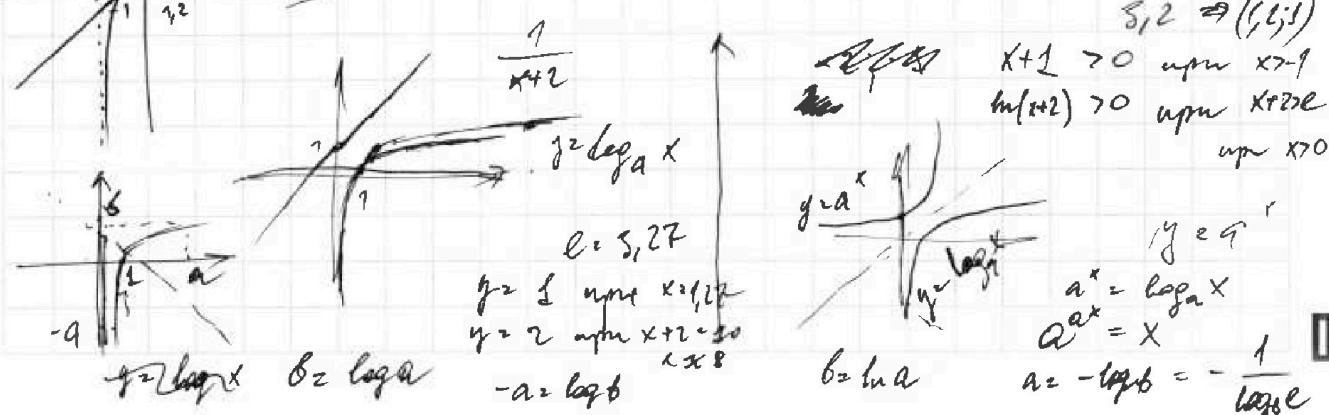
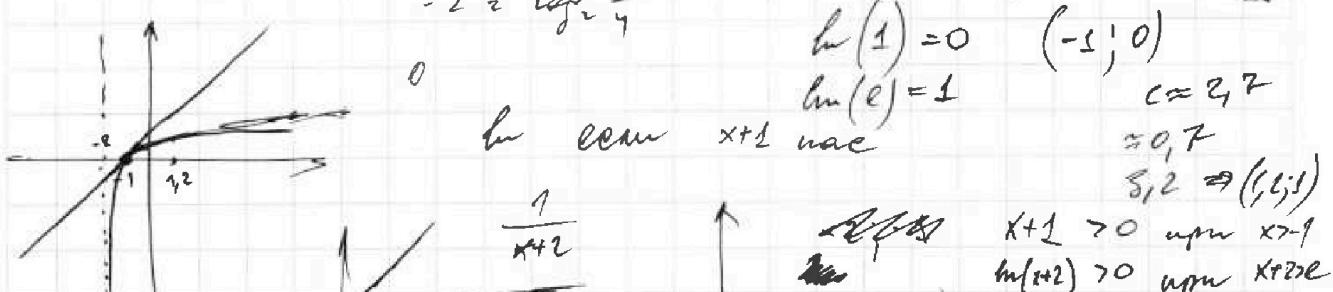
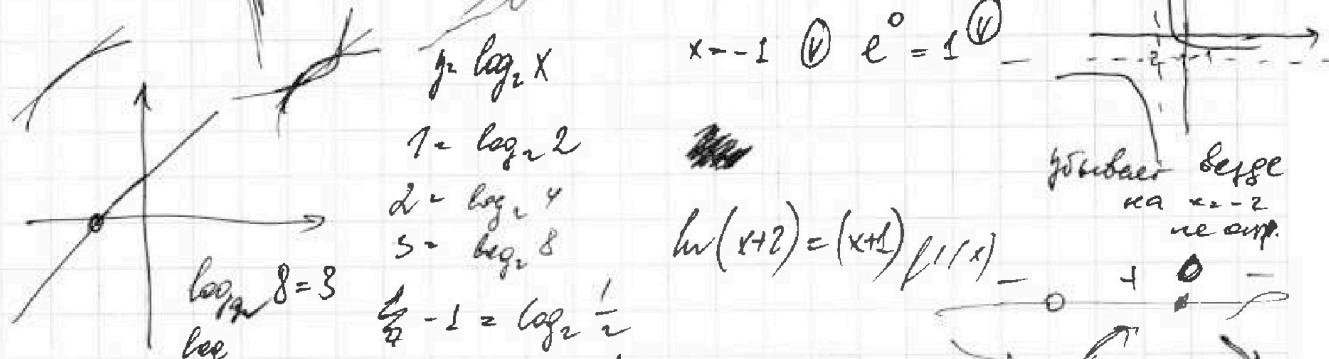
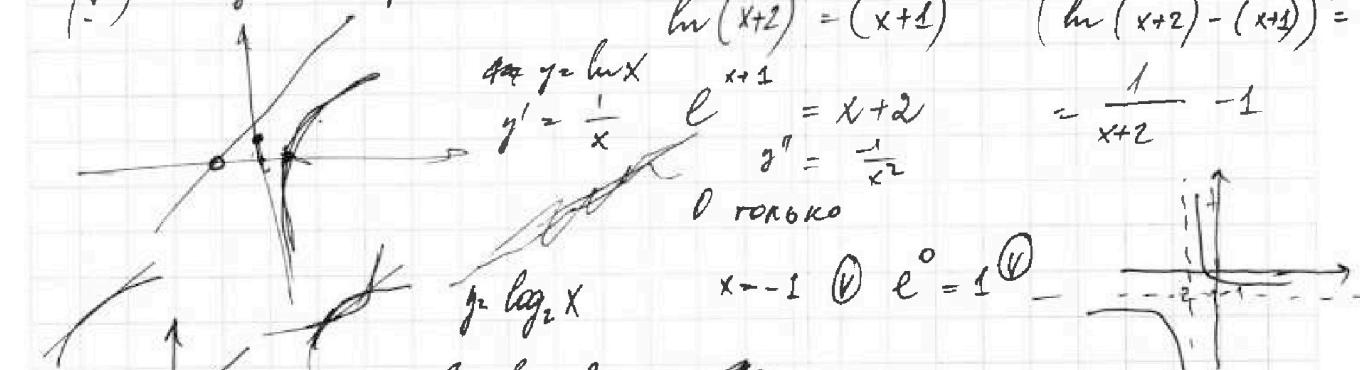
$$4x = -7$$

$$x = -\frac{7}{4} = -1,75$$

при $x \in (-2; -1,75)$ $\ln(4x+8) < 0$

при $x \in (-1,75; +\infty)$ $\ln(4x+8) > 0$

(!) все остальные корни



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{m}{n} = \frac{3^\alpha}{7^\beta}$$

$$0 < \alpha \leq 80$$

$$0 < \beta \leq 80$$

$$\frac{3^\alpha}{7^\beta}$$

где $\alpha < 81$ бар

где $\beta < 80$ бар.

$$\frac{3^0 \cdot 7^0 \cdot 3^\alpha}{7^\beta} ; \quad \frac{3^0 \cdot 7^0 \cdot 7^\beta}{3^\alpha}$$

коротко

$$\Rightarrow q \in \mathbb{Q}$$

$$q_1 = \pm \frac{3^\alpha}{7^\beta}$$

$$q_1 = \pm \frac{7^\beta}{3^\alpha}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ 53 \\ \hline 284 \\ 136 \end{array}$$

т.е. $q_1 = 20$

$$q_2 = 2q_1 = 20$$

второй корень золотое сечение золотое сечение $\in (-2, 0)$

$$(81 \cdot 81 - 1) - 81 + \\ 2(81 \cdot 81 - 1) - 81 + \\ 4(81 \cdot 81 - 1) - 81 + q_1 q_2$$

$$\text{иначе } \ln(x+2) \quad q_3 = \pm 3 \cdot 7^5$$

$$q_4 = \pm \frac{1}{3 \cdot 7^5}$$

$$\ln(x+2) \rightarrow (-\infty; 1) \quad (x+2) \rightarrow (-1; 1)$$

$x \neq 0, \delta \neq 0$, т.к. уравнение несчитано

ногда но 80 бар.

$$20 \cdot 80 \cdot 2 \cdot 2$$

$$\ln(x+2) > (x+2)$$

$$e^{x+2} < x+2$$

$$4(81 \cdot 81 - 1) + 4 \cdot 80 \cdot 80 = 4(81^2 - 1 + 80^2) = \\ 82^2 = (80+2)^2 = 4 \cdot (6560 + 6400) = \\ = 6400 + 4 \cdot 80 + 4 = 4 \cdot 12960 = 51840 \quad \text{O}$$

$$= 6400 + 320 + 4 = 6724$$

$$81^2 = (80+1)^2 = 6400 + 160 + 1 = \\ = 6561$$

$$\begin{array}{r} 12960 \\ 51840 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ 81 \\ \hline 81 \\ 81 \\ \hline 648 \\ 648 \\ \hline 561 \end{array}$$

$$80 \cdot 80 = \\ = 6400$$

$$x > -2$$

$$\ln^2(x+2) - (x+2) - \ln(x+2) + \ln 4 \cdot \ln(x+2) \geq 0$$

$$t^2 - (x+2) \cdot (\ln 2 + t) + \ln 4 \cdot t \geq 0;$$

$$t^2 - (x+2) \cdot \ln 2 - t(x+2) + 2 \ln 2 \cdot t \geq 0;$$

$$\ln(x+2) \cdot \ln(x+2) - (x+2) \cdot (\ln 2 + \ln(x+2) + \ln 4 \cdot \ln(x+2)) \geq 0$$

$$\ln(x+2) (\ln(x+2) - (x+2)) + \ln 4 (\ln(x+2) - (x+2)) \geq 0;$$

$$(\ln(x+2) + \ln 4) (\ln(x+2) - (x+2)) \geq 0,$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{1 - \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta}$$

$$\text{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{ctg}\alpha \cdot \text{ctg}\beta - 1}{\text{ctg}\alpha + \text{ctg}\beta}$$

$$\text{tg} 2\alpha = \frac{2\text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}$$

$$\frac{8\text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha} + 1 + \frac{\text{ctg}\alpha \cdot 1 - 1}{\text{ctg}\alpha + 1} = 0;$$

$$\text{tg} x = t$$

$$\frac{8t}{1 - t^2} + 1 + \frac{\frac{1}{t} - 1}{\frac{1}{t} + 1} = 0;$$

$$\frac{8t + 1 - t^2}{1 - t^2} = \frac{1 - \frac{1}{t}}{1 + \frac{1}{t}}$$

$$\frac{t^2 + 8t - 1}{t^2 - 1} = \frac{t - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t}}$$

$$8t - 1 + t - 8 - \frac{1}{t} = t^2 - 1 - t + \frac{1}{t}$$

$$-7t - 9 - \frac{1}{t} = -t - t + \frac{1}{t}; \quad (\cdot t)$$

$$-7t^2 - 9t - 1 = -t^2 - t^2 + 1;$$

$$6t^2 + 8t + 2 = 0;$$

$$3t^2 + 4t + 1 = 0;$$

$$\emptyset = 4 - 3 = 1$$

$$t_1 = \frac{-2-1}{3} = -1 \quad -\text{некор.}$$

$$t_2 = \frac{-2+1}{3} = -\frac{1}{3} \quad -\text{проверка}$$

$$\text{O. D. Z.: } \text{tg} \cdot \frac{h \cdot u}{w s} \Rightarrow$$

$$\cos 2x \neq 0$$

$$dx \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) \neq 0$$

$$x + \frac{\pi}{4} \neq \pi k$$

$$x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{tg} x \neq \pm 1$$

$$\text{ctg} x \neq \pm 1$$

договоримся проверять

$$\text{tg} x = 0$$

$$\text{если } \text{tg} x = 0 \Rightarrow$$

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi k$$

$$+ \text{tg}(2\pi k) + 1 + \text{ctg}(\frac{\pi}{4} + \pi k) =$$

$$= 0 + 1 + 1 = 2 \Rightarrow t \neq 0$$

$$\text{tg} x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \text{ctg} x = -3$$

$$\text{tg} 2x = \frac{-\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2}{3} : \frac{8}{9} =$$

$$= -\frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 8} = -\frac{3}{4}$$

$$-\frac{3 \cdot 4}{4} + 1 + \left(\frac{-3 \cdot 1 - 1}{-3 + 1} \right) =$$

$$= -3 + 1 + \frac{-4}{2} = -3 + 1 + 2 = 0$$

✓

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



a_{2a}

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$b = aq \\ c = bq = aq^2 \Rightarrow abc = a^3 \cdot q^3 = (aq)^3$$

$$(aq)^3 = 3^{240} \cdot 7^{240} \Rightarrow aq = 3^{80} \cdot 7^{80}$$

Следовательно $a > 1$

Номер 2a
↓
++
--

$$\text{Балл за задачу } \cancel{(81 - 81 - 1)} = (9^4 - 1) \cdot 2$$

~~Число 81~~ если $q < 1$ означает q как $\frac{1}{q}$, т.е. $q' > 1$

$$\frac{a}{q'} = \frac{3^{80} \cdot 7^{80}}{\cancel{q'}} \quad a = 3^{80} \cdot 7^{80} \cdot q' \quad \text{т.к. не отрицательно}$$

$$q = \frac{1}{2} \quad \cancel{q = \frac{1}{3}} \quad \cancel{q = \frac{1}{7}} \quad \cancel{q = \frac{1}{21}}$$

$$b^2 = ac \quad \text{если } q < 0, \text{ т.е. } b_+, c_-, a_- \Rightarrow b = \sqrt{ac}$$

$$\sqrt{a \cdot c} \cdot ac = (a \cdot c)^{1.5} = (aq)^3 \quad \text{если } q = \frac{1}{3}$$

$$ac = dq^2 \cdot a$$

$$a = 3^{81} \cdot 7^{80} \quad b = 3^{80} \cdot 7^{80}$$

$$b = aq = 3^{80} \cdot 7^{80} \quad C = aq^2$$

$$a = \frac{3^{80} \cdot 7^{80}}{q} \quad \cancel{q = \frac{1}{3}}$$

$$c = 3^{80} \cdot 7^{80} \cdot q$$

если $q \neq \frac{1}{3}$
то разобрать

а) если $q < 0$ в q^2 (т.к. $q^2 > 0$)
то просто перевернешь,
к-то что выше посчитали
тогда получается
всего $4(9^4 - 1)$

$$3^{80} \cdot 7^{80} : q$$

$$\frac{3^{80} \cdot 7^{80}}{m} \cdot \frac{n}{n}$$

$$\frac{3^{80} \cdot 7^{80}}{n} \cdot m$$

$$q = m = 3 \quad n = 7 \Rightarrow q^2 = \frac{9}{49}$$

$$\frac{3^{80} \cdot 7^{80} \cdot 2}{3} = 3^{81} \cdot 7^{81} ; \quad 3^{80} \cdot 7^{80} ; \quad 3^{81} \cdot 7^{81}$$

$$m = 3^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$$

$$n = 3^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$$

$$a = \frac{3^{80} \cdot 7^{80} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}}{3^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{3^{\alpha_1}}{7^{\beta_1}} / \frac{7^{\beta_2}}{3^{\alpha_2}} / \underbrace{3^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}}_{\text{рассмотрим}} / \frac{7^{\beta_1}}{3^{\alpha_1}}$$