



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Решите уравнение

$$6 \operatorname{tg} 2x - 1 + \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $13^{180} \cdot 17^{180}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2(x-1) - (x-2)\ln(3x-3) + (\ln 3)\ln(x-1) \geq 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -\frac{2x^3}{3} + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC . Лучи DE и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{23}}$.

6. [5 баллов] Числа x, y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{11}{y^3} = y^3 + \frac{11}{z^3} = z^3 + \frac{11}{x^3}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения xyz .

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{15}$, $AD = DC = \sqrt{6}$, $AC = 2\sqrt{3}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2\sqrt{3} + \sqrt{15}$. Найдите:

- а) объём пирамиды;
б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB , SBC и ребра SD .



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$26 \sin^2 x \geq 1 \Rightarrow \sin x = \pm \sqrt{\frac{1}{26}}$$

$$x_1 = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{26}}\right) + 2\pi k$$

$$x_2 = \pi - \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{26}}\right) + 2\pi k.$$

$x \in I, III$ четв., ибо $\cos x$ и $\sin x$ одног. знака.

0-безум: $x_1 = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{26}}\right) + 2\pi k$; $x_2 = \pi - \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{26}}\right) + 2\pi k$

$$x_3 = \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$6 \operatorname{tg} 2x - 1 + \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}{\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4}}{\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} \quad \text{т.к. } \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2 \sin x \cos x}{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}$$

$$\frac{12 \sin x \cos x}{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)} - 1 + \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} = 0$$

$$\frac{12 \sin x \cos x - (\cos^2 x - \sin^2 x) - (\cos x + \sin x)^2}{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)} = 0$$

$$\frac{-2 \cos^2 x + 10 \sin x \cos x}{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)} = 0$$

$$\frac{2 \cos x (5 \sin x - \cos x)}{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)} = 0$$

↑
у

$$\begin{cases} \cos x \neq \sin x \\ \cos x \neq -\sin x \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = 5 \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1) x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 2) (5 \sin x)^2 + \sin^2 x = 1 (=) \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

посл

$\frac{a}{a} = q \Rightarrow$ геом. прогрессия имеет следующий

вид: $a; aq; aq^2$

$$\text{Тогда } abc = aq^3 = 13 \cdot 17 \Rightarrow aq = 13 \cdot 17, \text{ т.е.}$$

второе число (b) всегда равно $13 \cdot 17$.

$$\text{Тогда } ac = a^2 q^2 = 13^2 \cdot 17^2$$

$$a, c \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{т.к. } c = \frac{13^2 \cdot 17^2}{a}, \text{ т.е.}$$

число c однозначно определяется

числом a , то кол-во троек, удовл. условия
равно кол-ву ~~возможных~~ возможных значений

числа a . Кол-во возможных значений

числа a - это кол-во первых, кол-во

целых делителей числа $13 \cdot 17$, а

это удвоенное число его натур. делителей (т.к.
каждому полож. соотв. одиннадцатый дел.)

Всего натур. делителей $121 / 121$ баранят

Был ровно столько 13 и 121 баранят было раз

делено $121 / 13$ (13 и 121 - простые) \Rightarrow

всего троек чисел a, b, c , удовл. условия

$$\underline{\underline{2 \cdot 121^2}}$$

$$\text{Ответ: } 2 \cdot 121^2$$

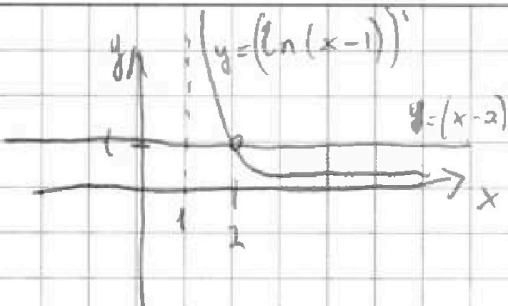
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\ln(x-1) = x-2$$

один из корней: $x=2$. Однако

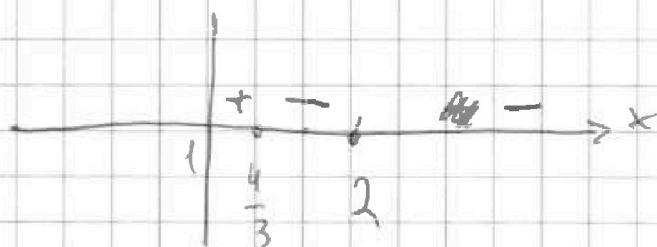
это не совместимость т. пересечения
графиков этих производных, \Rightarrow

эти 2 графика касаются друг друга.

$$T.e. \ln(x-1) \leq x-2.$$

$$\text{Нужн: } x = \int \frac{u}{3} - 2 \}$$

решите
перебо методом
интервалов:



Подставим
значения из
всех полу-пр-ков

$$x = \frac{1}{6}: (\ln \frac{1}{6} + \frac{5}{6}) (\ln 3 + \ln \frac{1}{6}) \Rightarrow > 0$$

$\Gamma_0: \ln \frac{1}{6} < -1 \quad \Gamma_0 \quad \text{т.к. } \ln \frac{1}{6} = -\ln 6; \ln 6 > \ln 3$

$$x = 1,5: (\ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) (\ln 3 + \ln \frac{1}{2}) \Rightarrow < 0$$

$$x = 100: (\ln 99 - 98) (\ln 3 + \ln 99) \Rightarrow > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } x \in \left(1; \frac{4}{3}\right] \cup \{2\}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\ln^2(x-1) - (x-2)\ln(3x-3) + (\ln 3)\ln(x-1) \geq 0$$

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \text{OD 3: } x > 1$$

$$\ln(x-1) \cdot \ln(x-1) - (x-2)(\ln 3 + \ln(x-1)) + (\ln 3)/\ln(x-1) \geq 0$$

$$\ln(x-1) \left(\ln(x-1) + \ln 3 - (x-2) / (\ln 3 + \ln(x-1)) \right) \geq 0$$

$$(\ln(x-1) - x+2)(\ln 3 + \ln(x-1)) \geq 0$$

Найдём нули этой функции

$$\ln 3 + \ln(x-1) = 0 \Rightarrow \ln(x-1) = \ln \frac{1}{3} \Rightarrow$$

т.к. функция $\ln x$ монотонно возрастает
⇒ корень один: $x = \frac{4}{3}$

$$\ln(x-1) - x+2 = 0 \Leftrightarrow \ln(x-1) - (x-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\ln(x-1) = x-2$$

$(x-2) > 0$, а производная $\ln(x-1)$
 $(x-2)' = 1$, монотонно убывает \Rightarrow

у этих функций не более двух сечений.

Можно дополнительные показатели графика
представить для наглядности.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 18d^3 - 3ad = d \\ -18d^3 + 3ad = -d \\ -\frac{2d^3}{3} + ad = 3d \\ \frac{2}{3}d^3 - ad = -3d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 54\frac{2}{3}d^3 - 10ad = 0 \\ 16d^3 = 10d \end{cases}$$
$$d^2 = \frac{5}{8} - \frac{5}{4} = \frac{10}{16}$$
$$10a = \frac{164d^2}{3}$$

$$\begin{cases} d^2 = \frac{5}{8} \\ a = \frac{164}{30}d^2 \end{cases}$$

$$a = \frac{164}{30} \cdot \frac{10}{16} = \frac{164}{48} = 3 + \frac{5}{12} = \frac{41}{12}$$

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{41}{12}x$$

$$18d^3 - \frac{41}{4}d = d \Rightarrow d^2 = \frac{45}{4} \cdot \frac{1}{18} = \frac{5}{8}$$

Площадь квадрата - это произведение его диагональей. Диагонали равны.

Найдем длину диагонали BD . $\Delta x = 2d$; $\Delta y = 6d$

$$BD = \sqrt{(2d)^2 + (6d)^2} = \sqrt{40d^2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{BD^2}{2} = \frac{40d^2}{2} = 20d^2 < 20 \cdot \frac{5}{8} = \frac{100}{8} =$$

$$= 12,5$$

Ответ: $a = \frac{41}{12}$; $S_{ABCD} = 12,5$.



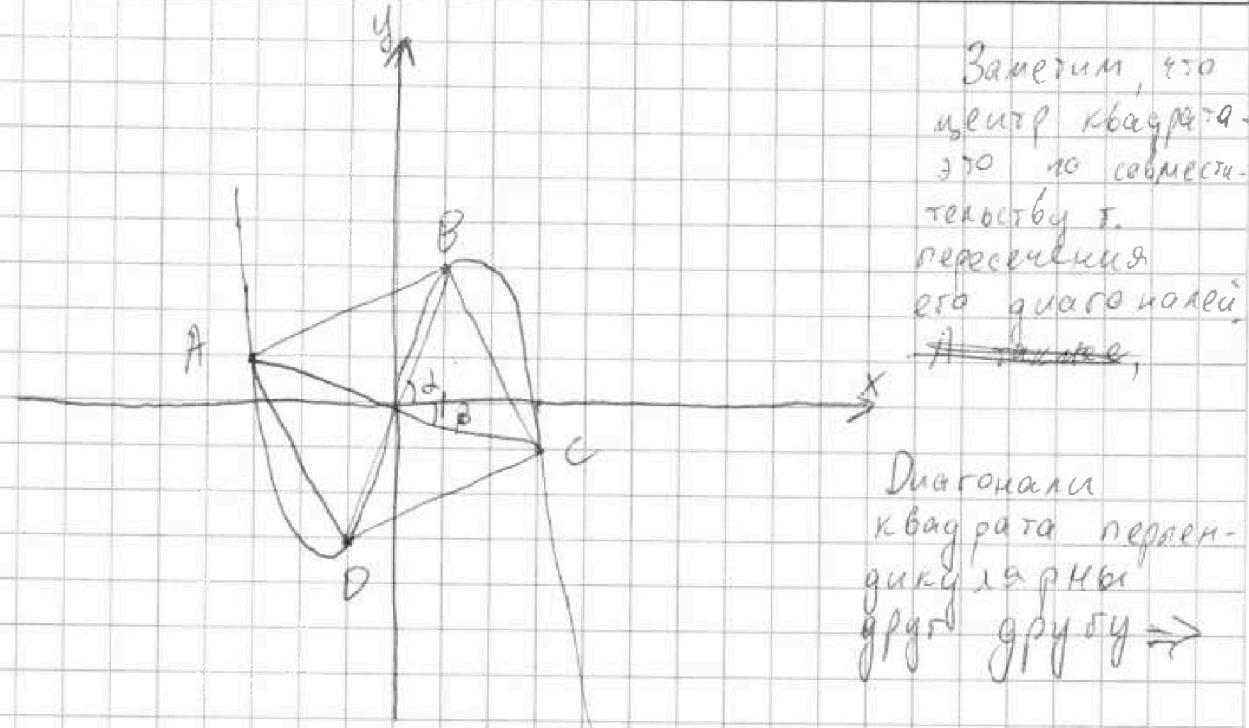
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что
это квадрат.
это по свойст-
венностям I.
пересекший
его диагональ.
~~также~~,

Диагонали
квадрата перен-
секутся в центре
группы \Rightarrow

Раз первая диагональ лежит на

прямой $y = 3x$, то вторая лежит
на прямой $y = -\frac{x}{3}$ виду того, что

функции $f(x) = kx$ при $k > 0$ тангенс угла
между прямой и осью Ox ,
 $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow |\operatorname{tg} \alpha| = |\operatorname{ctg} \beta|$, но они противоположны

значит $\operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{3}$.

Запомним также, что в функции $y = -\frac{2}{3}x + d$
данной проходит через начало координат.

Всё это можно записать координаты
вершин квадрата.

$A(-3d; d), B(d; 3d), C(3d; -d), D(-d; -3d)$

Из этого следует некоторое равенство:

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

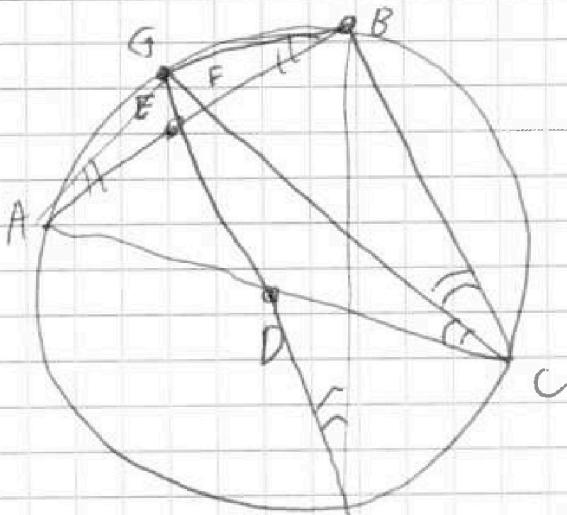
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AE = EB$$

$$AD = DC$$

Воспользуемся темой
о том, что серединный
перпендикуляр, проведенный
из стороны треугольника
и биссектриса проведенная
из противолежащего ей
угла пересекаются на описанной
окруженности.

(байду того что и сер. пер. и бис-са
делаю другую половину).

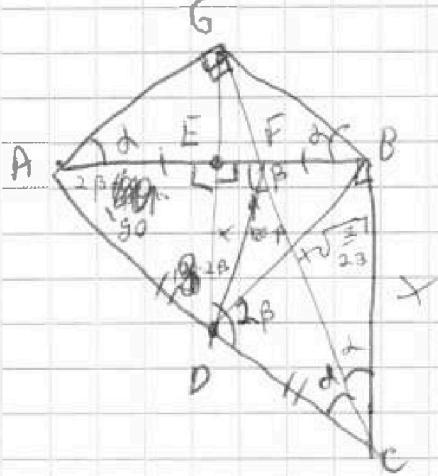
В нашем случае, перпендикуляр из
т. E и CF пересекутся в т. G .

$$\text{Однако } DE \cap CF = G \Rightarrow DE \perp AB$$

$$ED \text{ -ср. линия } \triangle ABC \Rightarrow ED \parallel BC; ED = \frac{1}{2} BC \Rightarrow$$

$$\angle AED = \angle ABC, \text{ но т.к. } \angle AED = 90^\circ, \text{ т.о. } \angle ABC = 90^\circ \Rightarrow$$

AC - диаметр.



$$\triangle DGC \text{ оправдан } \frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{21}{23}}$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AC}{BC} \text{ по золотому}$$

6-му диссекционному



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

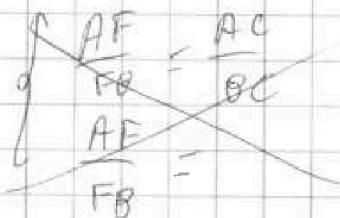
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\triangle AGC \sim \triangle FBC$, по 2 углам.

$\angle AGF$



$$\angle BAC = \arctg\left(\sqrt{\frac{3}{23}}\right)$$

$$\angle BCA = \arctg\left(\sqrt{\frac{23}{2}}\right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a} \Rightarrow \begin{cases} a - \frac{1}{a} = c - \frac{1}{b} \\ b - \frac{1}{b} = a - \frac{1}{c} \\ c - \frac{1}{c} = b - \frac{1}{a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} = b - c + \frac{1}{c} = a - c + \frac{1}{b} \Rightarrow b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{b} \Rightarrow$$

либо $b=c$, либо $\frac{1}{b}=c$. Первый случай —
 $\Rightarrow y=2$ — уже см.

$$b = \frac{c}{c} \therefore$$

$$a + c = \frac{2}{c} = c + \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} = a \Rightarrow a = 1$$

$$c + 1 = \frac{2}{c} \Rightarrow c = \left\{ \begin{array}{l} c = 1 \\ c = -2 \end{array} \right\} \quad c \neq 1, \text{ т.к.}$$

Чтобы:

$$c = -2; \quad b = \frac{1}{c} \Rightarrow b = -\frac{1}{2}; \quad a = 1$$

6 протививом
случае $a=c$ —
 $\Rightarrow y=2$ уже
см.

$$\frac{x}{\sqrt[3]{11}} = 1; \quad \frac{y}{\sqrt[3]{11}} = -\frac{1}{2}; \quad \frac{z}{\sqrt[3]{11}} = -2.$$

$$\frac{x^3 y^3 z^3}{11 \sqrt[3]{11}} = 1$$

$$\underline{\underline{xyz}} = \sqrt[3]{11 \sqrt[3]{11}} = \sqrt[3]{11}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что каждое из трех выражений
имеет вид $a^{\frac{3}{4}} + \frac{11}{b^3}$.

Возьмем произведение:

$$(a^{\frac{3}{4}} + \frac{11}{b^3})^3 = 3a^{\frac{9}{4}} - \frac{33}{b^4} = 3\left(a - \frac{11}{b^4}\right) \geq 3\left(a - \frac{\sqrt[3]{11}}{b^2}\right)\left(a + \frac{\sqrt[3]{11}}{b^2}\right)$$

где $a > 0 \Rightarrow$ функция $a^{\frac{3}{4}} + \frac{11}{b^3}$ принимает
какое-то значение с б че более, чем
3 точек.

Заметим (также), что если какие-то
2 числа (x, y, z) равны друг другу,
то им не равно и b :

$$x=y$$

$$x^{\frac{3}{4}} + \frac{11}{x^3} = x^{\frac{3}{4}} + \frac{11}{z^3} \Rightarrow x=2$$

$$x=z: x^{\frac{3}{4}} + \frac{11}{y^3} = x^{\frac{3}{4}} + \frac{11}{x^3} \Rightarrow y=x$$

$$y=z: y^{\frac{3}{4}} + \frac{11}{y^3} = y^{\frac{3}{4}} + \frac{11}{x^3} \Rightarrow x=y$$

значит x, y, z попарно равны. (также противоречие)
условие

Поделим все члены выражения на $\sqrt[3]{11}$

$$\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[3]{11}} + \frac{\sqrt[3]{11}}{y^3} = \frac{y^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[3]{11}} + \frac{\sqrt[3]{11}}{z^3} \leq \frac{2^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[3]{11}} + \frac{\sqrt[3]{11}}{x^3}$$

$$a = \frac{x}{\sqrt[3]{11}}, b = \frac{y}{\sqrt[3]{11}}, c = \frac{z}{\sqrt[3]{11}}$$



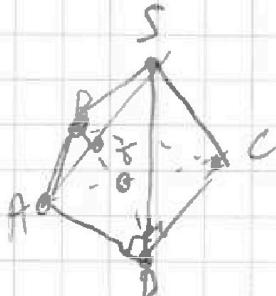
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что $AD^2 + DC^2 = AC^2 \Rightarrow$
 $\angle ADC = 90^\circ$

Также заметим, что $\angle ABC = 90^\circ$

следовательно $\Rightarrow DB$ - биссектриса, $AC \perp BD$

$$AC \cap BD = \Gamma \quad \text{и } \Gamma = TD, \text{ т.к. } \triangle ABD -$$

$$\text{р/д } n/y. \Rightarrow TD = \frac{1}{2} AC, \text{ т.к. } \Gamma - \text{сер. } AC$$

(чтобы это можно позже использовать, требуется
к основанию р/д)

$$TD = \sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} BT \cdot AC$$

но т.к. существует $(6, \angle AOC)$

$$15 + 15 - 30 \cos \beta = 12 \Rightarrow \cos \beta = 0,1 \Rightarrow$$

$$\sin \beta = \sqrt{0,99} \Rightarrow BT = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin \beta}{AC} =$$

$$= \frac{15 \sqrt{0,99}}{2\sqrt{3}} = 7,5 \sqrt{0,33} = 0,75 \sqrt{33}$$

$$\Rightarrow BD = BT + TD = \sqrt{3} + 0,75 \sqrt{33}$$

$$SD \perp ABCD \Rightarrow BS^2 = BD^2 + SD^2 \quad AS^2 = AD^2 + SD^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

к 1, 2, 4, 3

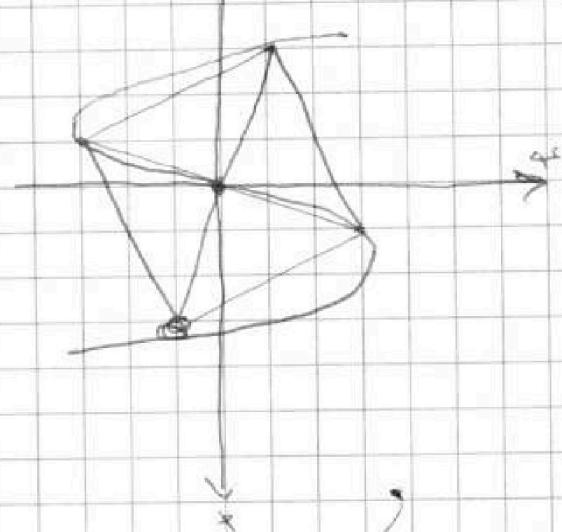
$$\left(\frac{3}{x} + \frac{11}{x^3} \right) + \left(2 + \frac{11}{y^3} \right) = 2 \left(y + \frac{11}{z^3} \right)$$

$$x=y:$$

$$2 + \frac{11}{x^3} + x^3 + \frac{11}{z^3} = \frac{11}{2^3} + \frac{11}{x^3} \Rightarrow x=2$$

$$1+1=11 - 9 = \frac{9}{11} + 1$$

$$\frac{EF}{AC} = \frac{EB}{EC}$$



$$\left(\frac{2}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}} \right)^2 = \frac{h^2}{R^2}$$

$$= 4R^2 - 8\sqrt{5}R$$

$$= -\sqrt{8} + 2\sqrt{3} + \sqrt{5}R^2$$

$$\frac{h^2}{23}$$

$$= -\sqrt{8}R^2 + \sqrt{23}R^2 + \sqrt{8}\sqrt{23}R^2$$

$$\frac{2}{23}DF + \sqrt{8}, DF - R = 0$$

$$R^2 + \frac{2}{23}DF^2 - R \cdot DF \sqrt{\frac{8}{23}} - DF^2 = 0$$



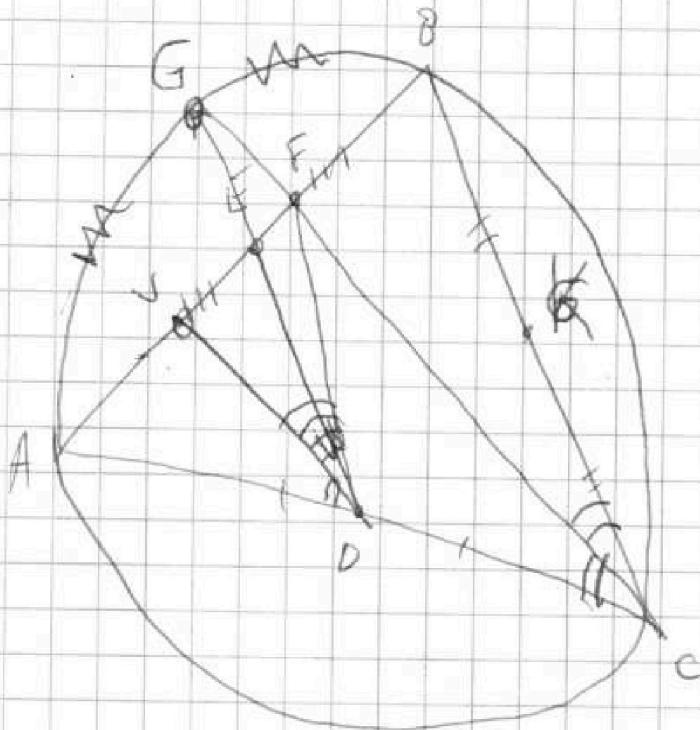
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{23}}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a^2 &= C + a \\ -\frac{1}{2}a^2 &= C \\ a &= -C \\ a &= 6 \\ a &= 6 \\ a &= 6 \end{aligned}$$

$$(n_{(x-1)})(\ln_{(x-1)} + n_3) - (x-2) / ((n_{(x-1)} + n_3) \geq 0)$$

$$x-1 = \frac{e^x}{e^2} \quad \ln 2 \leq l.$$

$$e^{2x} - e^2 = e^x$$

$$e^x - e^2 = -e^2$$

$$e^{x-2} - x = -l \quad x = 2.$$

$$1000 (\ln 999 - 998) / + -1a$$

$$\begin{aligned} b - c + \frac{1}{2} &= a - c + \frac{1}{2} \\ b - c &= a - c \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Был~~

$$\left(\cancel{x^3 + \frac{11}{y^3}} \right)^2 = \cancel{x^3 y^3} + 11 + \cancel{\frac{11x^3}{z^3}} + \cancel{\frac{121}{y^3 z^3}}$$

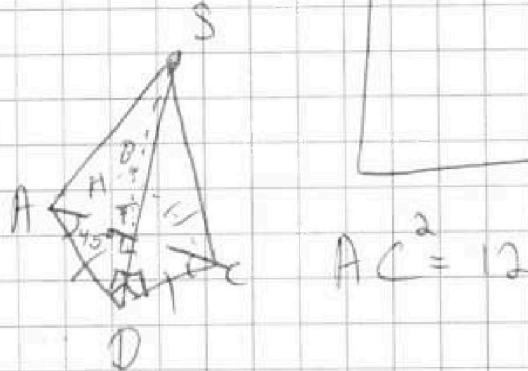
$$x^3 y^3 z^3 + 11(x^3 + z^3 + y^3)$$

~~Доказательство~~

$$\left(x^3 + \frac{11}{y^3} \right)^2 = 3x^2 - \frac{33}{y^4} = 3\left(x^2 - \frac{11}{y^4} \right)$$

$$R^2 = \frac{21}{23} DF^2$$

?



$$AC^2 = 12$$

$$TD = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$15 - 30 \cos \beta = 12$$

$$BD = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 + 1,5\sqrt{11})$$

$$\cos \beta = 0,1 \Rightarrow$$

$$2 \Delta ABC = \sqrt{15 \cdot 12 \cdot 0,99} = AC \cdot BC \Rightarrow$$

$$S \cdot n \beta = \sqrt{0,99}$$

$$15\sqrt{0,99} = TB \cdot \sqrt{12} \Rightarrow TB = 7,5\sqrt{0,33} = \\ = 0,75\sqrt{33}$$

81



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \ 6 \operatorname{tg} 2x - 1 + \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\textcircled{1} \quad x = \frac{\pi}{2}$$

$$2) \begin{array}{c} a^3 q^3 = 13^3 \\ \quad 60 \quad 60 \\ aq = 13 \cdot 17 \end{array}$$

$$\frac{\cos 0.5 - \cos 5}{\sin 0.5 \sin 5} = \operatorname{ctg} x$$

$$a = \pm 13^{\text{р}} \cdot 17^{\text{р}} \quad x, y = \{0, 10\}$$

Беско $2 \cdot 121^{\text{р}}$ варианта.

~~$\ln^2(x-1) - (x-3)(\ln 3 + \ln(x-1)) \geq 0$~~

~~$\ln^2(x-1) - (\ln 3 + \ln(x-1)) / (t-2) + \ln 3 \ln(x-1) \geq 0$~~

~~$\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = t$~~

~~$\log_2 8 + \log_2 4 \leq 5$~~

~~$(\operatorname{ctg}(x-1)) - 1$~~

~~$\frac{\sin(x-1)}{\cos(x-1)} = t$~~

~~$t^2 + 1 = \frac{9}{4} + 0$~~

~~$b = r$~~

~~$\sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2}r$~~

$$\leq \frac{ex}{1-e} \rightarrow x = \frac{ex}{1-e} + \frac{b}{e} = \frac{b}{1-e} + x$$

~~$b = x$~~

$$\frac{x}{s} - x = \frac{ex}{1-e} = ex$$

~~$b = x$~~