



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{300}$?
3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 2) - x(13y - 27) + 44y - 94 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 16 раз больше площади треугольника DGF .
5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a , b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 17$, $XY = 31$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$|x^3+4| + |x^2-1| = |x^3-x^2+5| ; x^3+4 = a, x^2-1 = -b$$

$$|a| + |-b| = |a+b|$$

$|a|+|b| \geq |a+b|$, но по пер. б. у возможны $|a|+|b| > |a+b|$, соотв.

$$|a|+|b| = |a+b|$$

$$|x^3+4| + |x^2-1| = |x^3-x^2+5|$$

I. $a \geq 0, b \geq 0 ; a+b$

$$x^3+4 \geq 0, 1-x^2 \geq 0$$

$$x^3 \geq -4, x^2 \leq 1$$

$$x =$$

$$f(x) = x^3 - x^2 + 5 ; f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x-2) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}$$

$$f(x_1) = 5$$

$$f(x_2) = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} + 5 = \frac{8-4 \cdot 3 + 5 \cdot 27}{27} > 0$$

$$\forall x \geq 0 : f(x) > 0$$

$$x^3+4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\sqrt[3]{4}, x^2-1 \geq 0 \Rightarrow x = \pm 1 ; f(x) = x^3-x^2+5 ; f(x) \geq 0$$

$$f(-1) = 5 ; f(-\sqrt[3]{4}) < 0$$

x^2-1	+	+	+	-	+
x^3+4	-	+	+	+	+
$f(x)$	-	-	+	+	+
	$-\sqrt[3]{4}$	0	-1	1	

I. $x \geq 1 ; x^3+4+x^2-1 = x^3-x^2+5$

$$2x^2 \geq 2$$

$$x^2 \geq 1$$

$$x = \pm 1 \Rightarrow x = 1$$

II. $x \in [-1; 1) :$

$$x^3+4-x^2+1 = x^3-x^2+5$$

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in [-1; 1)$$

$$\text{III. } x^3+4+x^2-1 = x^3-x^2+5 \Rightarrow x = \pm 1, \pm 1 \notin$$

III. $x \in [1; -1) \Rightarrow x^3+4+x^2-1 = x^3-x^2+5 \Rightarrow x = \pm 1, \text{ но } \pm 1 \notin [1; -1)$

IV. $x \in [-\sqrt[3]{4}; 1) \Rightarrow x^3+4+x^2-1 = x^3-x^2+5 \Rightarrow 2x^3 = -8$

$$x^3 = -4 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{4}$$

V. $x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4}) \Rightarrow x^2-1-x^3+4 = -x^3+x^2-5 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4})$

$$\text{Отв: } x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4}] \cup [-1; 1]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



a, b, c - обрзуемо цел. прогрессия, т.е. $b = aq, c = bq = aq^2$, где
 q - множитель цел. прогрессии, тогда

$$a \cdot b \cdot c = a \cdot aq \cdot aq^2 = a^3 q^3 = 2^{150} \cdot 3^{300} \Rightarrow aq = b = 2^{50} \cdot 3^{100}$$

$$a = \frac{b}{q} = \frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{q}, \quad q - \text{натур. множитель числа } 2^{50} \cdot 3^{100},$$

а кол-во множителей такого числа $(50+1)(100+1) =$

$= 51 \cdot 101 = 5151$. Число $c = bq$ также будет натуральным,

потому что $b, q \in \mathbb{N}$.

Ответ: 5151.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

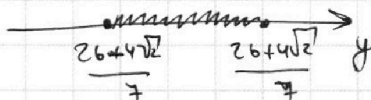
$$1) x^2(y-2) + x(13y-27) + 2(22y-47) = 0$$

$$D_1 = (13y-27)^2 - 4(y-2) \cdot 2(22y-47) = 169y^2 - 702y + 729 - 8(22y^2 - 91y + 94) = 169y^2 - 176y^2 - 702y + 728y + 729 - 752 = -7y^2 + 26y - 23 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7y^2 - 26y + 23 \leq 0$$

$$D_2 = 26^2 - 4 \cdot 7 \cdot 23 = 4(169 - 161) = 2^5$$

$$y_{1,2} = \frac{26 \pm \sqrt{2^5}}{7} = \frac{26 \pm 4\sqrt{2}}{7}; \quad 26$$



$$2) \frac{26+4\sqrt{2}}{7} \vee 5$$

$$26+4\sqrt{2} \vee 35$$

$$4\sqrt{2} \vee 9 \uparrow^2$$

$$32 < 81$$

$$\frac{26+4\sqrt{2}}{7} \vee 4$$

$$26+4\sqrt{2} \vee 28$$

$$4\sqrt{2} \vee 2 \uparrow^2$$

$$32 > 4$$

$$\frac{26-4\sqrt{2}}{7} \vee 3$$

$$26-4\sqrt{2} \vee 21$$

$$5 \vee 4\sqrt{2} \uparrow^2$$

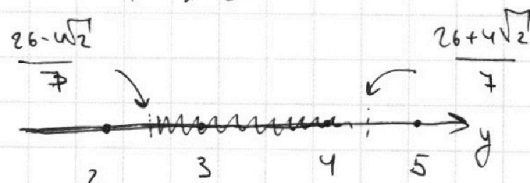
$$25 < 32$$

$$\frac{26-4\sqrt{2}}{7} \vee 2$$

$$26-4\sqrt{2} \vee 14$$

$$12 \vee 4\sqrt{2} \uparrow^2$$

$$144 > 32$$



если $y \in \mathbb{N}$, то $y \in \{3; 4\}$

$$I. y=3 : x^2(3-2) - x(13 \cdot 3 - 27) + 44 \cdot 3 - 94 = 0$$

$$x^2 - 12x + 38 = 0$$

$$D = 144 - 4 \cdot 38 = 4(6^2 - 38) < 0$$

$$II. y=4 : x^2(4-2) - x(13 \cdot 4 - 27) + 44 \cdot 4 - 94 = 0 ; 2x^2 - 25x + 82 = 0$$

$$D = 25^2 - 4 \cdot 2 \cdot 82 = 625 - 656 < 0. \text{ Ответ: } \emptyset.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

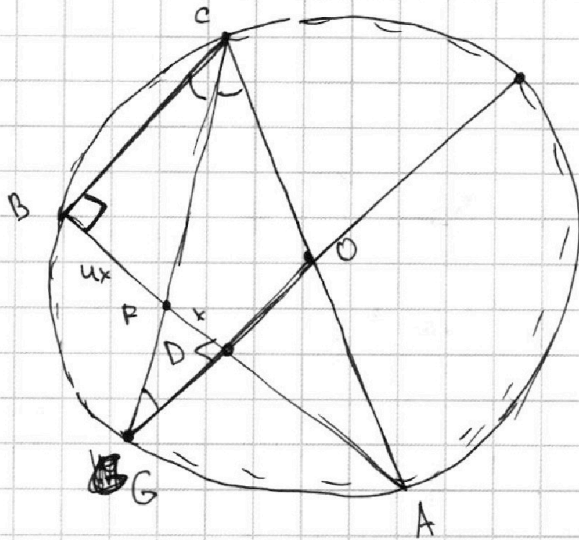
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) ~~CF пересекает~~ CF пересечет Ω в точках C и
 средине дуги AB , тогда, т.ч. $ED \parallel AC$ (ср. линии), то
 $ED \notin C \Rightarrow ED \in \Omega$, тогда $ED \in O$ (O-центр Ω)

2) $BC \parallel ED \parallel GO$, E - срединна AC \Rightarrow

$$\begin{cases} OE \perp AC \\ AC \cap ED = O, \end{cases}$$

$OE \perp AC$ - невозможно, тогда $AC \parallel AB \Rightarrow AC \cap AB = \emptyset$,
 но $AC \cap AB = A$.

Значит $AC \cap ED = O$, т.е. $E = O$.

3) ~~AC - гора~~ $AC \in O \Rightarrow AC$ - диаметр $\Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$

4) $BC \parallel OG \Rightarrow \begin{cases} \angle BCF = \angle FGO \Rightarrow \triangle CBF \sim \triangle GDF \text{ (по 2-м углам)} \\ \angle CBF = \angle GDF = 90^\circ \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{BF}{FO} = \sqrt{\frac{S_{CBF}}{S_{GDF}}} = \sqrt{16} = 4, \quad BF = 4k, \quad FO = k \Rightarrow AO = BO = 4k + k = 5k$$

20)

Симметрично продолжение...

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5) \frac{BF}{FA} = \frac{BC}{AC} = \frac{4x}{5x+x} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \cos \angle BCA$$

$$6) \angle C = \arccos \frac{3}{5}, \angle B = 90^\circ, \angle A = 90^\circ - \arccos \frac{3}{5} \text{ — Ответ.}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

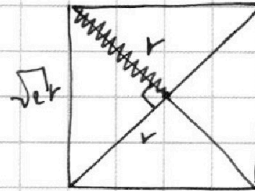
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\rho(0; (k_1, y_1)) = \sqrt{\sqrt{-a-3} \cdot 10} = \sqrt{\sqrt{\frac{73}{24}-3} \cdot 10} = \sqrt{\sqrt{\frac{100}{24}}}$$
$$= \sqrt{\frac{4\sqrt{25}}{8}}$$



нет число расстояния
или длины.

$$\text{сторона} = \sqrt{2} \rho(0; (k_1, y_1)) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{4\sqrt{25}}{8}} = \sqrt{\frac{4\sqrt{25}}{2}}$$

$$\text{Ответ: } a = -\frac{73}{24}, \text{ сторона} = \sqrt{\frac{4\sqrt{25}}{2}}$$

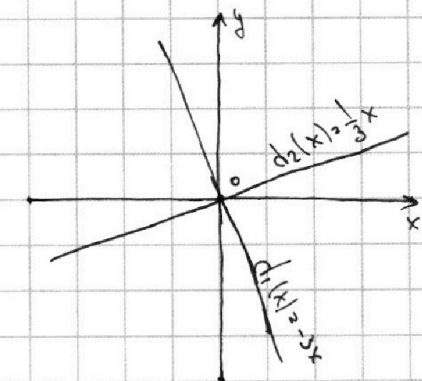
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Диагональ квадрата перпендикулярна, $d_1(x) \perp d_2(x)$, и центр в $(0; 0) \Rightarrow$

$$d_2(x) = \frac{1}{3}x$$

2) $f(x) = x^5 + ax$ — нечетная функция

$$f(x) \cap d_1(x) \Leftrightarrow f(x) - d_1(x) = 0$$

$$x^5 + ax + \frac{1}{3}x = 0$$

$$x^5 + (a + \frac{1}{3})x = 0, \quad x \neq 0 \text{ — } \text{т.ч.} \text{ — квадрат стороны } \Delta, \text{ высота } h.$$

$$x^4 = -a - \frac{1}{3} \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{-a - \frac{1}{3}} \quad y_{1,2} = d_1(x_{1,2}) = \pm \frac{1}{3} \sqrt[4]{-a - \frac{1}{3}}, \quad a \leq -\frac{1}{3}$$

Аналогично $f(x) - d_2(x) = 0$

$$x^5 + ax - \frac{1}{3}x = 0$$

$$x^4 = \frac{1}{3} - a \Rightarrow x_{3,4} = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{3} - a}, \quad y_{3,4} = d_2(x_{3,4}) = \pm \frac{1}{3} \sqrt[4]{\frac{1}{3} - a}, \quad a \leq \frac{1}{3}$$

3) Т.ч. $f(x), d_1(x), d_2(x)$ — нечетные функции, то

$$\rho(0; (x_1; y_1)) = \rho(0; (x_2; y_2)) ; \quad \rho(0; (x_3; y_3)) = \rho(0; (x_4; y_4))$$

ρ — расстояние.

Нужно, чтобы $\rho(0; (x_1; y_1)) = \rho(0; (x_3; y_3))$ — квадрат.

$$\sqrt{\sqrt{-a - \frac{1}{3}} + \frac{1}{9}\sqrt{-a - \frac{1}{3}}} = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{3} - a} + \frac{1}{9}\sqrt{\frac{1}{3} - a}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-a - \frac{1}{3}} = \frac{10}{9} \sqrt{\frac{1}{3} - a} \Rightarrow \Leftrightarrow \sqrt{-a - \frac{1}{3}} = \frac{10}{9} \sqrt{\frac{1}{3} - a}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{-a - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - a}} = \frac{10}{9} \Rightarrow \frac{a + \frac{1}{3}}{a - \frac{1}{3}} = \frac{100}{81} \Rightarrow a = -\frac{73}{24}$$

Продолжение...

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

$$a + b + c + 5 \left(\frac{ab - ab - bc + ca}{abc} \right) = 3S$$

$$\begin{cases} a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} \\ a + \frac{5}{b} = c + \frac{5}{a} \end{cases} \quad \begin{aligned} a &= \frac{5}{b} \sqrt{\frac{5}{c}} \left(b + \frac{5}{c} - \frac{5}{b} \right) \\ c + \frac{\frac{5}{b} \sqrt{\frac{5}{c}}}{b + \frac{5}{c} - \frac{5}{b}} &= c + \frac{5bc}{b^2c + 5(b-c)} \end{aligned}$$

$$a + \frac{5}{b} = c + \frac{5bc}{b^2c + 5(b-c)}$$

$$b = \sqrt{ac}$$

$$a = c + \frac{5bc}{b^2c + 5(b-c)} - \frac{5}{b}$$

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 &= 2(abc+bc+ca) \\ (a+b+c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(abc+bc+ca) \end{aligned}$$

$$a + \frac{5}{\sqrt{ac}} = \sqrt{ac} + \frac{5}{b}$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3(abc+bc+ca)$$

$$\left(a + \frac{5}{b}\right) \left(b + \frac{5}{c}\right) \left(c + \frac{5}{a}\right) = \left(ab + 5 + \frac{5a}{c} + \frac{25}{bc}\right) \left(c + \frac{5}{a}\right) =$$

$$= abc + 5c + 5a + \frac{25}{b} + 5b + \frac{25}{a} + \frac{25}{c} + \frac{125}{abc} = S^3$$

$$abc + 5(a+b+c) + 25 \left(\frac{ab+bc+ca}{abc} \right) + \frac{125}{abc} = S^3$$

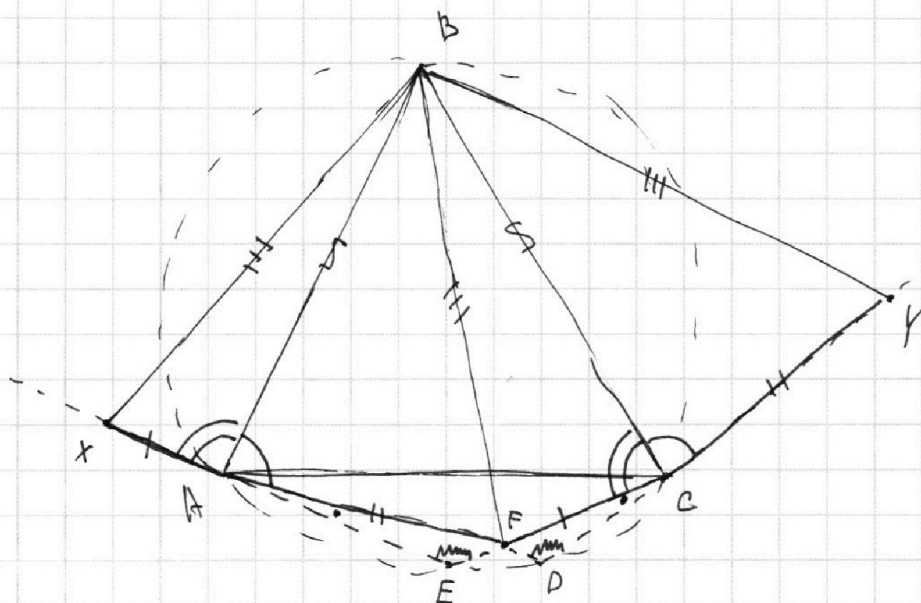
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1) \angle AEC = \angle ADC \text{ (вне.)}, \angle EFA = \angle DFC \text{ (верт.)} \Rightarrow \angle EAF = \angle DCF = \angle C$$

$$2) \angle BAD + \angle BED = 180^\circ \text{ (вне.)} = \angle BAD + \angle BCF + \angle C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle BAD + \angle BCF = 180^\circ - \angle C \Rightarrow \angle BCF = \angle BAD \text{ и } \angle BAX = \angle BCF$$

$$3) \triangle BAX = \triangle BCF \text{ (угол и две прил. стороны)} \Rightarrow BX = BF$$

$$\triangle BAF = \triangle BCY \text{ (угол и две прил. стороны)} \Rightarrow BF = BY \Rightarrow$$

$$\triangle XAF = \triangle FCY \text{ (угол и две прил. стороны)} \Rightarrow XF = FY$$

$$\Rightarrow BXFY - \text{ромб} \Rightarrow BF \perp XY \Rightarrow S_{BXFY} = BF \cdot XY \cdot \sin \frac{\pi}{4} =$$

$$= BF \cdot XY \cdot 1 = 17 \cdot 31 = 527.$$

Ответ: 527

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$b = \sqrt{ac}$$

$$abc = a^{\frac{3}{2}} c^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{150}{2}} \cdot 3^{\frac{300}{2}}$$

$$(ac)^3 = 2^{300} \cdot 3^{600}$$

$$ac = 2^{100} \cdot 3^{200} \Rightarrow b = 2^{50} \cdot 3^{100} = a^2$$

$$a \cdot a^2 = c \Rightarrow a^3 = 2^{100} \cdot 3^{200}$$

$$a, a^2, a^3 \quad a^3 = 2^{100} \cdot 3^{200} \Rightarrow a = 2^{\frac{100}{3}} \cdot 3^{\frac{200}{3}}$$

~~$$a = 2^{\frac{100}{3}} \cdot 3^{\frac{200}{3}}$$~~

$$(20+4)^2 = 400 + 4y + 400 = 800 + 4y$$

$$20 - 7 = 13$$

$$= 400 - 4y =$$

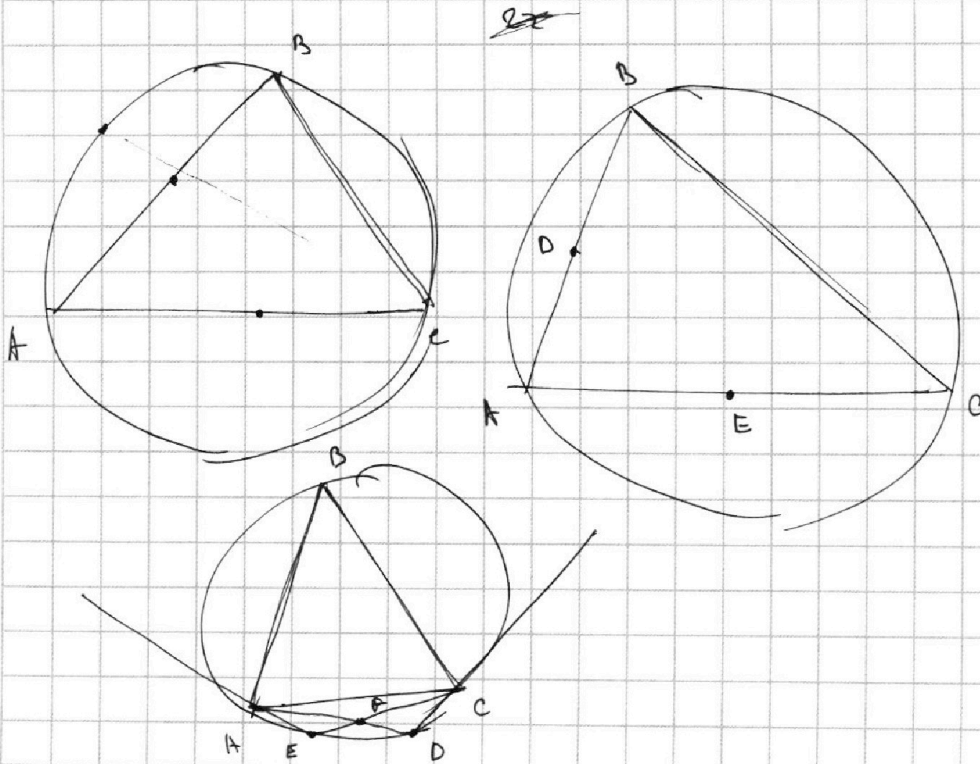
$$a = \frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{b}$$

$$51 \cdot 101 =$$

$$= 5151$$

$$D = (13y - 27)^2 - 4(y - 2)(44y - 94) \geq 0$$

$$169y^2 - 702y + 729 - (4y - 8)(44y - 94)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{25} = 5$
 $|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|$

$x^3 - x^2 + 5$
 $x^3 - x^2 + 5 \geq 0$
 $x^3 - x^2 - 8 - 4 + 5 \geq 0$
 $x^3 - x^2 - 7 \geq 0$

$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$
 $x^3 - x^2 - 7 = (x-2)(x^2 + 2x + 7) - 7$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2, -2$
 $x^3 - x^2 - 7 = 0 \Rightarrow x = 2, -2, \dots$

$\sqrt{25} = 5$
 $2 = \sqrt{x}$
 $4 = 2x$

$\frac{BF}{PD} = 4$
 $x = \frac{2}{3}$

$\angle C = \arccos \frac{2}{3}$
 $\angle A = \frac{\sqrt{2}}{4} - \arccos \frac{2}{3}$

Detailed description of the diagrams: The page contains several geometric diagrams. The top diagram shows a circle with points A, B, C, D, E, F, G and various lines and arcs. The middle diagram shows a circle with points B, C, D, E, F, G and a vertical line through point E. The bottom diagram shows a circle with points A, B, C, D, E, F, G and a vertical line through point E. There are also several smaller diagrams and calculations scattered throughout the page.

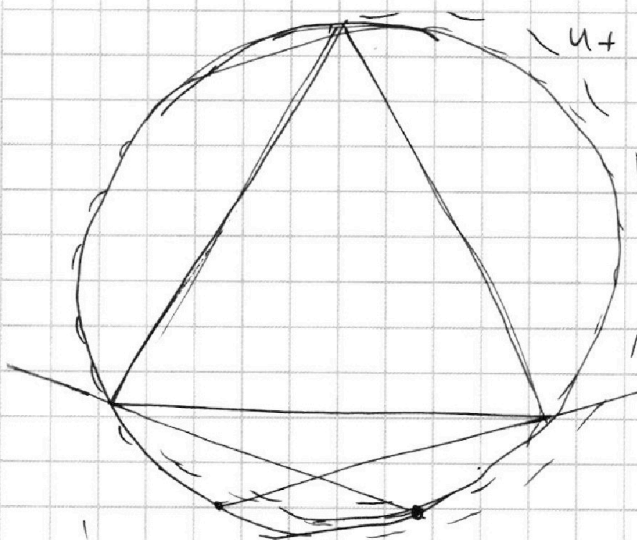
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4 + 4 + 5 + 4 + 6 = 23$$

$$a + \frac{5}{6} \dots$$

$$a + b + c + 5 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 3S$$

$$a \cdot b \cdot c + 5 \left(\frac{a \cdot b \cdot c}{abc} \right) = 3S$$

$$(a \cdot b \cdot c) \left(1 + \frac{5}{abc} \right) = 3S$$

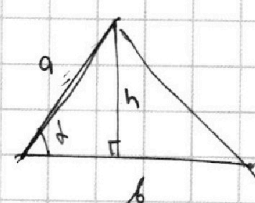
$$V \rightarrow P \quad 7 \cdot 16 - 26 \cdot 4 + 23 =$$

$$P \rightarrow X$$

$$C \rightarrow A \quad = 112 + 23 - 104$$

~~abc~~

$$\frac{1}{2} b h$$

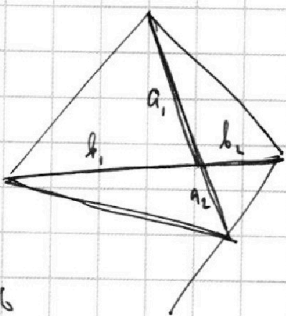


$$\frac{h}{a} = \sin \alpha$$

$$\angle \dots + \angle \dots + \angle \dots = 180^\circ$$

$$\angle \dots + \angle \dots = 180^\circ - \dots$$

$$D = 25^2 - 4 \cdot 2 \cdot 82 = 625 - 656$$



$$7 \cdot 9 - 26 \cdot 3 + 23 = 0$$

1			
82			
x 2			
164			
656			
1			
63		26	
+ 23		x 3	
86		78	
		+ 26	
		112	
		138	
		164	

$$\begin{array}{r} 82 \\ \times 2 \\ \hline 164 \end{array}$$



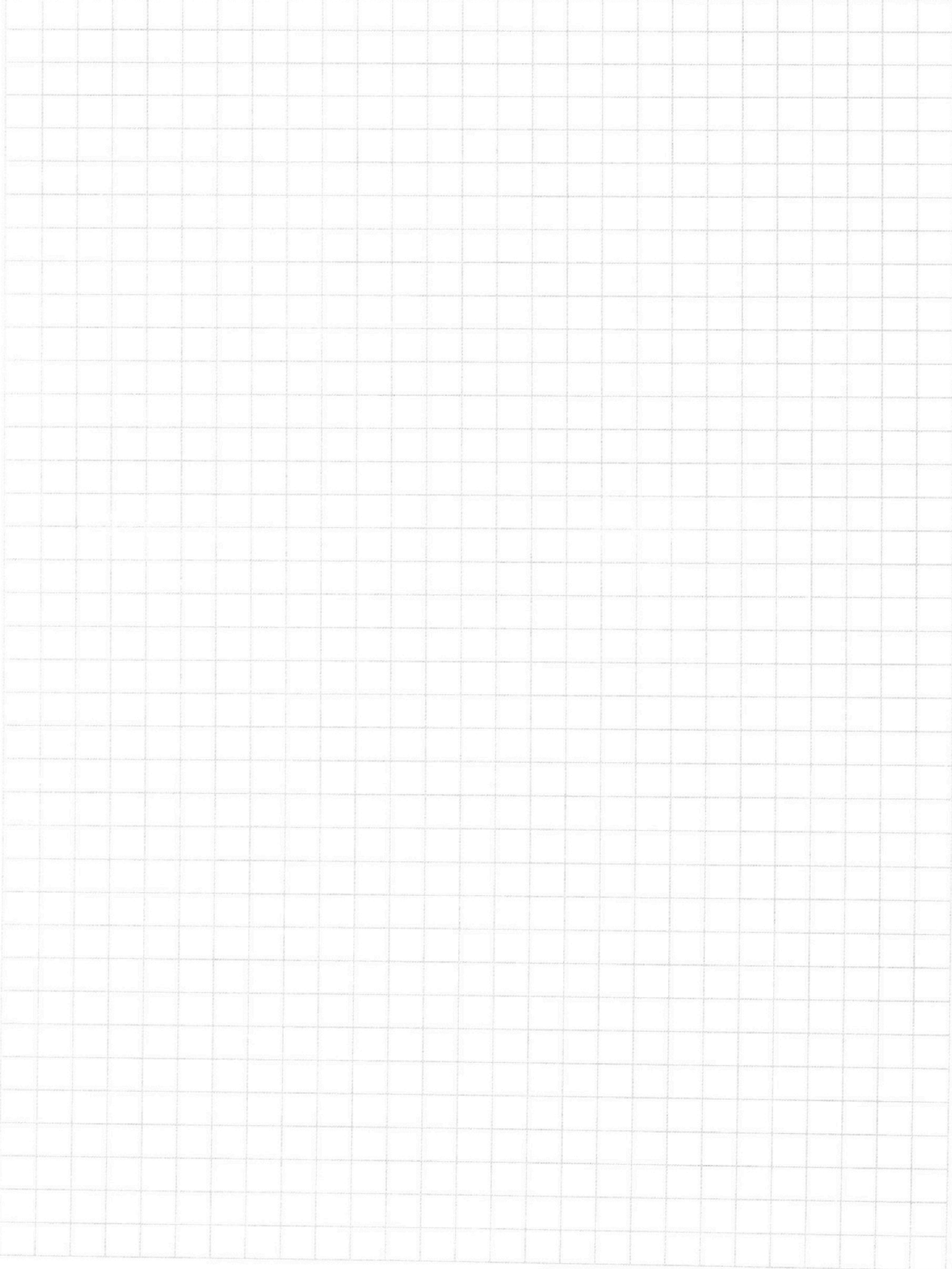
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

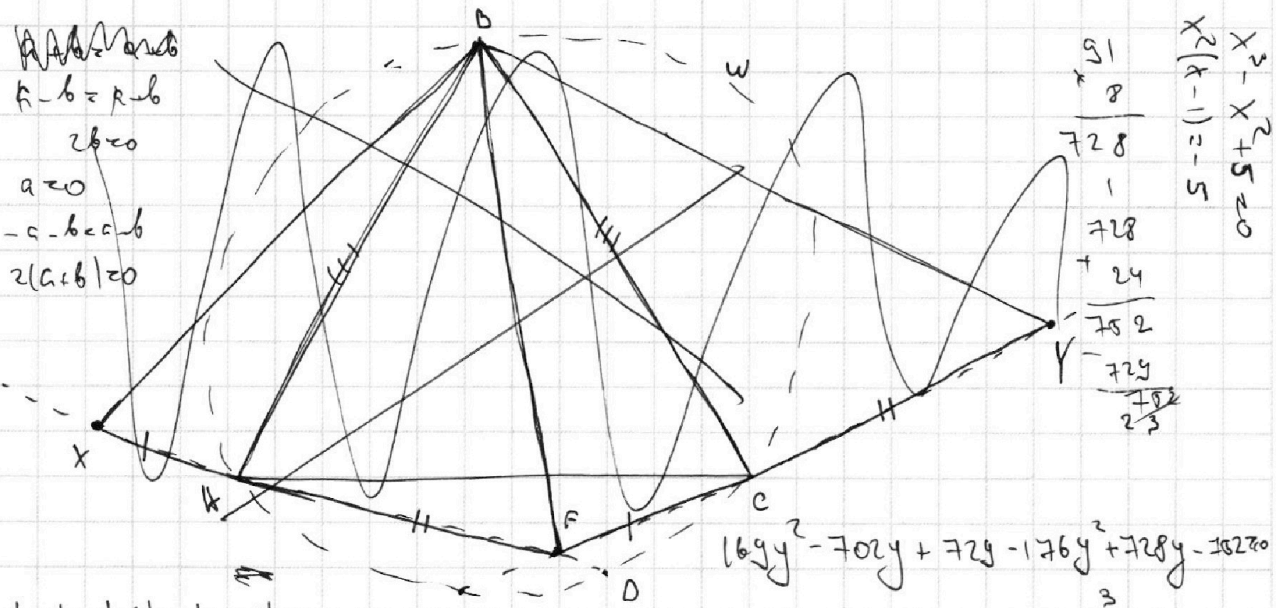
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

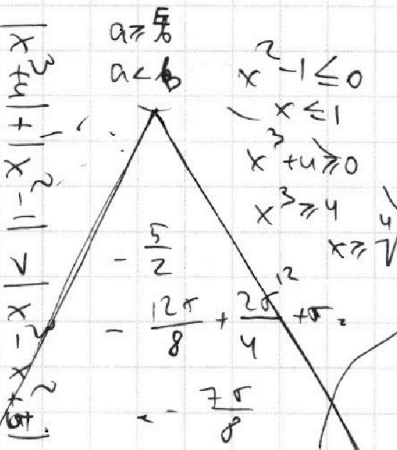
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$a+b=c$~~
 ~~$a-b=c$~~
 ~~$2b=c$~~
 ~~$a=c$~~
 ~~$-a-b=c$~~
 ~~$2(a+b)=c$~~

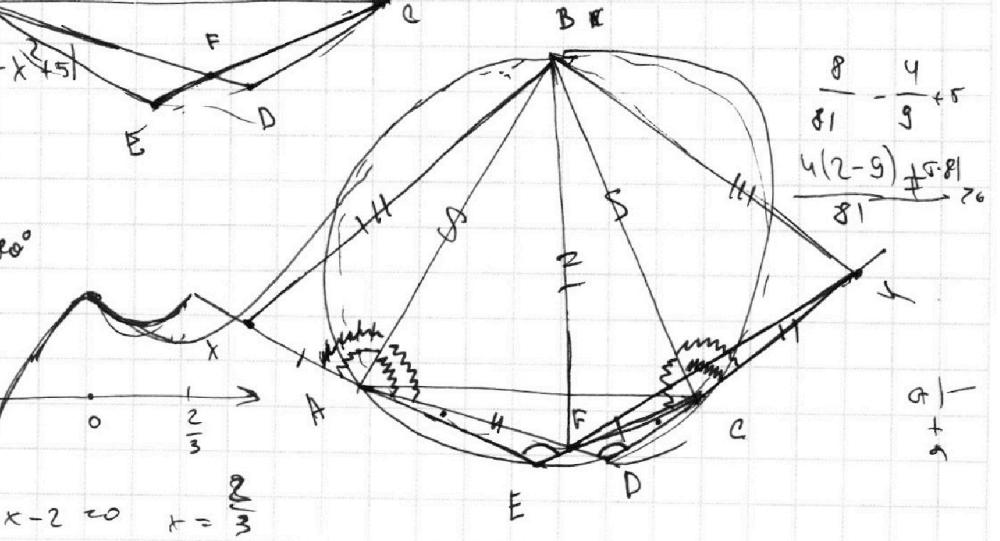


$|a| + |b| \leq |a-b|$
 $a-b \geq |a+b|$
 $b-a \geq |a+b|$
 $|a| + |-b| \leq |a+b|$
 $|a| + |b| \leq |a+b|$
 $|a| + |b| = |a+b|$



$169y^2 - 702y + 729 - 176y^2 + 728y - 702y = 0$
 $-7y^2 + 26y - 23 = 0$
 $7y^2 - 26y + 23 \leq 0$
 $D = 26^2 - 4 \cdot 7 \cdot 23 = 676 - 624 = 52$
 $y = \frac{26 \pm \sqrt{52}}{14}$

$|x^3 + 1| + |1 - x^2| = |x^3 - x^2 + 1|$
 $x \leq 1$
 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$
 $3x^2 - 2x = 0$
 $x(3x-2) = 0$
 $x = 0$ or $3x-2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$



$\frac{8}{81} - \frac{4}{9} + 5$
 $\frac{4(2-9) \pm \sqrt{81}}{81} = \frac{-20 \pm 9}{81}$
 $\frac{9}{81}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

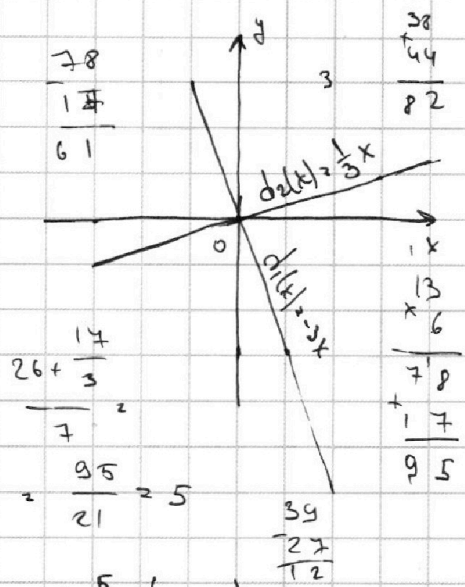
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Асимптотически касательные перпендикулярны, поэтому $d_1(x) \perp d_2(x) \Rightarrow$
 $\Rightarrow d_2(x) = \frac{1}{3}x$, т.е. проходит через центр.

2) $f(x) = x^5 + ax$ - искомая функция
 $f(x) \cap d_1(x) \Leftrightarrow f(x) - d_1(x) = 0$
 $x^5 + ax + 3x = 0$ $-a-3 \geq 0 \Rightarrow a \leq -3$

$x^5 + (3+a)x = 0$ $x = 0$ - не интересно, вырожденный случай

$x^4 - (-a-3) = 0$ $g^2 + 1 = (g+1)(g^2 - g + 1) = 10 \cdot 73$

$(x^2 - \sqrt{-a-3})(x^2 + \sqrt{-a-3}) = 0$, $-a-3 \geq 0 \Rightarrow a \leq -3$ $\frac{1}{3} | a \geq 0 | a \leq \frac{1}{3}$

$(x - \sqrt[4]{-a-3})(x + \sqrt[4]{-a-3})(x^2 + \sqrt{-a-3}) = 0$, $x + \sqrt{-a-3} = 0$ - не имеет корней, $x \neq 0, \sqrt{-a-3} \geq 0$.

$x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{-a-3}$, $y_{1,2} = d_1(x_{1,2}) = \pm \sqrt[4]{-a-3} \cdot \frac{1}{3}$

Асимптотически решаем $f(x) - d_2(x) = 0$

$$x^5 + \left(\frac{1}{3} - a\right)x = 0$$

$$x^4 - \left(\frac{1}{3} - a\right) = 0$$

$(x + \sqrt[4]{\frac{1}{3} - a})(x - \sqrt[4]{\frac{1}{3} - a})(x^2 + \sqrt{\frac{1}{3} - a}) = 0$, т.е. $a \leq -3$

$$-a-3 = -8|a-8| \cdot 3 = \frac{1}{3} - a$$

$$80a = -8|a-8| \cdot 3 = \frac{-81 \cdot 9 - 1}{3} = -\frac{730}{3}$$

$$a = -\frac{730}{3 \cdot 80} = -\frac{73}{24}$$

$$\sqrt[4]{-a-3} = \frac{10}{9} \sqrt{\frac{1}{3}-a}$$

$$\frac{\sqrt{-a-3}}{\sqrt{\frac{1}{3}-a}} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{-a-3}{\frac{1}{3}-a} = \frac{1}{81}$$

$$x + \sqrt{\frac{1}{3} - a} = 0$$

$$x^2 + \sqrt{\frac{1}{3} - a} = 0$$

$$x^2 + \sqrt{\frac{1}{3} - a} = 0$$

$$x^2 + \sqrt{\frac{1}{3} - a} = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$4x + 2x + 2x + 2x + 4 = 13$
 $2 \cdot 10 + 10 + 13 = 33$
 $2 \cdot 23$
 $x \cdot 7$
 $\frac{161}{2}$

$20^2 - 7^2 = \frac{3^2 + 4^2}{2}$
 $20^2 - 7^2 = 301$

$22y^2 - 91y + 94$

$8(22y^2 - 91y + 94)$
 $2a = -\frac{91}{3}$
 91
 27
 $27^2 = 3$
 17
 $\frac{17}{2} \cdot 4 = \frac{17}{3}$

$20^2 - 7^2 = 301$
 91
 94
 7

$x^2(y-2) + x(3y-27) + 2(22y-47) = 0$
 $D = (3y-27)^2 - 8(y-2)(22y-47) = 0$
 $169y^2 - 202y + 729 - 176y^2$

$f(x) = x^5 + ax$
 $d_1(x) = -3x$
 $d_2(x) = \frac{1}{3}x$

$f(x) - d_1(x) = 0 \Rightarrow x^5 + (a+3)x = 0$
 $x^4 + a + 3 = 0$
 $x^4 - (-a-3) = 0$
 $x = \sqrt[4]{-a-3}$

$f(x) - d_2(x) = 0 \Rightarrow x^5 + (a-\frac{1}{3})x = 0$
 $x^4 + a - \frac{1}{3} = 0$
 $x^4 = (\frac{1}{3} - a)$
 $x = \sqrt[4]{\frac{1}{3} - a}$

$\sqrt{\frac{\frac{1}{3}-a}{-a-3}} = 100$
 $\frac{\frac{1}{3}-a}{-a-3} = 100$

$\frac{1}{3} - a = 10(-a-3)$
 $\frac{1}{3} - a = -10a - 30$
 $9a = -30 \frac{1}{3}$
 $x^2 = -\sqrt{-a-3}$
 $x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{-a-3}$

$x_{3,4} = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{3}-a}$
 $y_{3,4} = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{3}-a}$

$P(x,y) = P(0, (x,y))$
 $= \sqrt[2]{\sqrt{-a-3}} + \sqrt[2]{\sqrt{-a-3}} = P(0, (x_3, y_3)) = \sqrt[2]{\sqrt{\frac{1}{3}-a}} + \sqrt[2]{\sqrt{\frac{1}{3}-a}}$

$10\sqrt{-a-3} = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{1}{3}-a}$
 $= \sqrt[2]{\sqrt{\frac{1}{3}-a}} + \sqrt[2]{\sqrt{\frac{1}{3}-a}}$