МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11

1. [4 балла] Решите неравенство

$$\left|x^3+4\right|+\left|x^2-1\right| \leqslant \left|x^3-x^2+5\right|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a;b;c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150}\cdot 3^{300}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y-2)-x(13y-27)+44y-94=0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC. Прямые ED и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что площадь треугольника BCF в 16 раз больше площади треугольника DGF.

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y=x^5+ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y=-3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a, b и c не все равны между собой, и при этом

$$a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения abc.

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC $(AB=BC)$ вписан в окружность ω, а на дуге AC, не содержащей точку B, взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F. На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX=CF$ и $CY=AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF=17$, $XY=31$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 1. $|x^3+4|+|x^2-1| \le |x^3-x^2+5|$

Пользуясь тем, что $|a|=|-a|$, заменим внутри подмодульное выражение второго слагаемого левой части на противоположное по знаку:

$$|x^3+4|+|-x^2+1| \le |x^3+4-x^2+1|$$

Пусть $x^3+4=a$, а $-x^2+1=b$:

$|a|+|b| \le |a+b|$. Согласно известному неравенству: сумма модулей всегда больше либо равна модулю суммы $\Rightarrow |a|+|b| \ge |a+b|$. Отсюда можно сделать вывод, что $|a|+|b|=|a+b|$, иначе одно из условий не будет выполнено. Если из чисел a и b одно >0, а другое <0, то равенство не достигается. Возможны лишь случаи: 1) $a\ge0$; $b\ge0$ и 2) $a\le0$; $b\le0$.

Случай 1: $\begin{cases} a\ge0 \\ b\ge0 \\ |a|+|b|=|a+b| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3+4\ge0 \\ -x^2+1\ge0 \\ |x^3+4|+|-x^2+1|=|x^3-x^2+5| \end{cases} \Rightarrow$

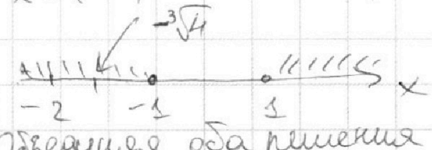
$\Rightarrow \begin{cases} x\ge-\sqrt[3]{4} \\ x\in[-1;1] \\ x^3+4-x^2+1=x^3-x^2+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge-\sqrt[3]{4} \\ x\in[-1;1] \end{cases}$ (1), ~~но $1<\sqrt[3]{4}<2$ $\Rightarrow -2<-\sqrt[3]{4}<-1$~~ $\Rightarrow$

~~$\Rightarrow$ у системы (1) нет решений: $\sqrt[3]{4}<$~~

$1<\sqrt[3]{4}<2 \Rightarrow -1>-\sqrt[3]{4}>-2 \Rightarrow$ у системы (1) ~~решений нет~~. $x\in[-1;1]$ – реш.

Случай 2: $\begin{cases} a\le0 \\ b\le0 \\ |a|+|b|=|a+b| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3+4\le0 \\ -x^2+1\le0 \\ |x^3+4|+|-x^2+1|=|x^3-x^2+5| \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x\le-\sqrt[3]{4} \\ x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty) \\ -x^3-4+x^2-1=-x^3+x^2-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le\sqrt[3]{4} \\ x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty) \end{cases}$



$\Rightarrow$ у системы (2) $x\in[-\sqrt[3]{4};-1]$ – решение.

Объединяя оба решения систем в совокупность, получим: Ответ: $x\in[-\sqrt[3]{4};1]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 2. $(a;b;c)$ - геом. прогрессия; $abc=2^{150}\cdot3^{300}$.

Числа a, b, c можно представить в виде: $a=a$; $b=aq$; $c=aq^2$.
Тогда: $abc=a^3q^3=2^{150}\cdot3^{300} \Rightarrow aq=\cancel{2^{100}\cdot3^3}\sqrt[3]{2^{150}\cdot3^{300}}=$
$=2^{50}3^{100}$, т.е. второй член прогрессии равен $2^{50}\cdot3^{100}$, первый будет равен $\frac{2^{50}\cdot3^{100}}{q}$, а третий равен $2^{50}\cdot3^{100}q$, т.е. мы имеем тройку чисел:
$\left(\frac{2^{50}\cdot3^{100}}{q}; 2^{50}\cdot3^{100}; 2^{50}\cdot3^{100}q\right)$. ~~Знаменатель прогрессии q это какая-то дробь $\frac{m}{n}$, где обязательно $m=2^i3^j$, а $n=2^k3^l$, т.к. в противном случае числа a, b, c не будет принадлежать множеству натуральных чисел.~~
~~Таким образом: $q=\frac{m}{n}=\frac{2^i3^j}{2^k3^l}=2^{(i-k)}\cdot3^{(j-l)}$.~~

Знаменатель прогрессии q можно представить, как
(1) $q=\frac{1}{2^k3^l}$ или (2) $q=2^k3^l$ или (3) $q=\frac{2^k}{3^l}$ или (4) $q=\frac{3^l}{2^k}$, где l, k — неотрицательные целые числа. Других простых множителей кроме 2 и 3 он содержать не может, так как либо 1ый член не будет целым, либо 3ий.

Рассмотрим ~~1ый~~ вариант (1). Если $k, l>0$, то $k\in[1;50]$, $l\in[1;100] \Rightarrow 50\cdot100=5000$ вариантов образования q. Если $k=0$, $l>0$, то ещё 100 вар. Если $l=0$, $k>0$, то ещё 50 вар.

Рассмотрим вариант (2). Аналогично варианту (1) тут вместе 5150 вариантов образования q.

Рассмотрим вариант (3). Здесь учитываем только случай, когда $k>0$, $l>0$, т.к. случаи равенства k или l нулю мы уже учли в первых двух вариантах. Получим $50\cdot100=5000$ способов образов. q, где $k\in[1;50]$, $l\in[1;100]$.

Рассмотрим вариант (4). Аналогично варианту (3) здесь 5000 способов образования q. Итого имеем всего $5150\cdot2+5000\cdot2=10300+10000=20300$ вар. $\Rightarrow$ существует 20300 троек таких чисел, т.к. q задает 1 тройку. Ответ: 20300 троек

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 3. $x^2(y-2)-x(13y-27)+44y-94=0$

Можно разглядеть это уравнение, как квадратное относительно x. Оно имеет решение в дейст. числах, если его дискриминант неотрицателен.

$$D=(13y-27)^2-4\cdot(y-2)(44y-94)\geq 0$$
$$169y^2+27^2-26\cdot 27y-4(44y^2-88y-94y+188)\geq 0$$
$$(169-4\cdot 44)y^2+y((88+94)\cdot 4-26\cdot 27)+27^2-4\cdot 188\geq 0$$
$$-7y^2+26y-23\geq 0$$
$$7y^2-26y+23\leq 0 \quad (1)$$

Найдем нули функции $f(y)$ в левой части неравенства:

$$7y^2-26y+23=0$$
$$D=26^2-4\cdot 7\cdot 23=26^2-28\cdot 23=676-644=32=4\sqrt{2}$$
$$y_1=\frac{26+4\sqrt{2}}{14} \quad y_2=\frac{26-4\sqrt{2}}{14} \Rightarrow$$

неравенство (1) верно при $y\in\left[\frac{26-4\sqrt{2}}{14};\frac{26+4\sqrt{2}}{14}\right]$. Оценим границы данного отрезка:

$\cancel{\frac{26+4\sqrt{2}}{14}}$: $1<\sqrt{2}<2$

$4<4\sqrt{2}<8$

$30<26+4\sqrt{2}<34$

$2\frac{1}{7}=\frac{30}{14}<\frac{26+4\sqrt{2}}{14}<\frac{34}{14}=2\frac{3}{7}$. Т.к. $y\in\mathbb{Z}$, то $y\leq 2$ (*)

$-8<-4\sqrt{2}<-4$ $\qquad y\in[2;2]$

$18<26-4\sqrt{2}<22$

$1\frac{2}{7}=\frac{18}{14}<\frac{26-4\sqrt{2}}{14}<\frac{22}{14}=1\frac{4}{7}$. Т.к. $y\in\mathbb{Z}$, то $y\geq 2$ (**)

Из (*) и (**) следует, что $y=2$, тогда исходное уравнение при подстановке примет вид:

$$-x(13\cdot 2-27)+44\cdot 2-94=0$$
$$x+(-6)=0 \Rightarrow x=6$$

Т.е. подходит единственная пара $(6;2)$.

Ответ: $(6;2)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

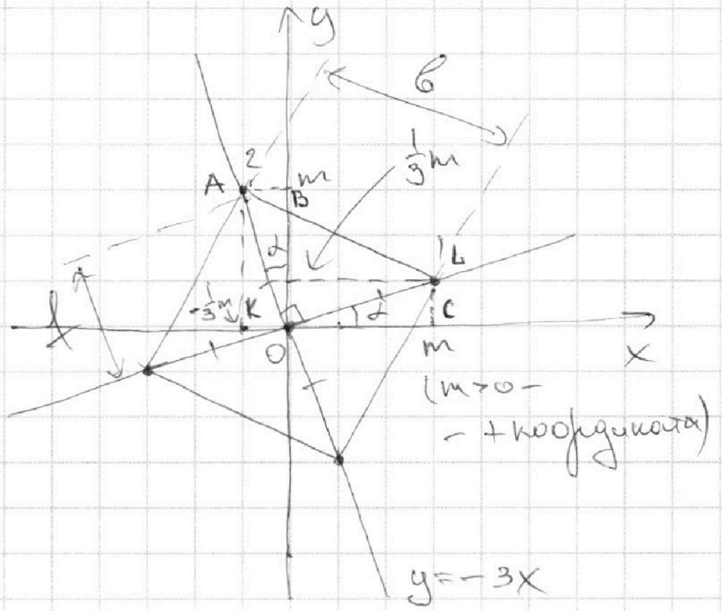
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5 $y=x^5+ax$; $y=-3x$ — прямая диагонали центр совпадает с началом координат.

Диагонали квадрата $\perp$ $\Rightarrow$ вторая диагональ его должна лежать на прямой $y=\frac{1}{3}x$. Это можно понять поворотом системы координат на угол между прямой $y=-3x$ и осью ординат. В силу $\perp$сти прямая, содержащая вторую диагональ квадрата должна совпасть с Ox после поворота $\Rightarrow$ угол между 2ой прямой и осью Ox также равен α $\Rightarrow$ вторая прямая задаётся уравнением $y=\frac{1}{3}x$



Из симметрии рисунка видно, что если точка 1 имеет координаты $(m;\frac{1}{3}m)$, то точка 2 имеет координаты $(-\frac{1}{3}m; m)$, $\triangle AOB=\triangle LOC$ по гипотенузе и острому углу. Тогда справедливы уравнения:

$$\begin{cases} m^{\cancel{5}} = \left(-\frac{1}{3}m\right)^5 + a\left(-\frac{1}{3}m\right) & (1) \\ \left(\frac{1}{3}m\right) = m^5 + am & (2) \end{cases}$$

Из уравнения (2): ~~$a = m^4 - \frac{1}{3}m$~~ $a = \frac{1}{3} - m^4$, при $m\neq 0$. (3)

Подставим a из (3) в (1):

$$\cancel{\tfrac{1}{3}}\, m = \left(-\frac{1}{3}\right)^5 m^5 - \frac{1}{3}m\left(\frac{1}{3}-m^4\right), \text{ при } m\neq 0:$$

$$-1 = \frac{1}{3^5}m^4 + \frac{1}{9} - \frac{1}{3}m^4 \Rightarrow \cancel{\left(\frac{1}{3^5}-\frac{1}{3}\right)m^4} = \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3^5}\right)m^4 = \frac{10}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{80}{243}m^4 = \frac{10}{9} \Rightarrow m^4 = \frac{10}{9}\cdot\frac{243}{80} = \frac{243}{72} = \frac{81}{24} \Rightarrow m = \pm\frac{3}{\sqrt[4]{24}}, \text{ но}$$

$m>0 \Rightarrow m = \frac{3}{\sqrt[4]{24}} \Rightarrow a = \frac{1}{3} - \frac{81}{24} = -\frac{73}{24}$. Теперь найдём

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

сторону в квадрата. По теореме Пифагора:

$\text{в}^2 = f^2 + f^2 \Rightarrow \text{в} = \sqrt{2} f$. Остается найти расстояние

f. Его найдём по Th. Пифагора для ΔAOK:

$$f^2 = m^2 + \left(\frac{1}{3}m\right)^2 \Rightarrow f^2 = m^2 + \frac{1}{9}m^2 = \frac{10}{9}m^2 \Rightarrow f = \frac{\sqrt{10}}{3}m =$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt[4]{24}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt[4]{24}} = \sqrt[4]{\frac{100}{24}} = \sqrt[4]{\frac{50}{12}} = \sqrt[4]{\frac{25}{6}} \Rightarrow \text{в} = \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{\frac{25}{6}} =$$

$$= \sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[4]{\frac{25}{6}} = \sqrt[4]{\frac{25\cdot 4}{6}} = \sqrt[4]{\frac{100}{6}}$$ – сторона квадрата.

Ответ: $a = -\frac{13}{24}$; $\text{в} = \sqrt[4]{\frac{100}{6}}$ – сторона квадрата

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6 $\quad a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a}$

$$\begin{cases} a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c} \,\Big|\cdot abc \\ b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a} \,\Big|\cdot abc \\ a+\frac{5}{b}=c+\frac{5}{a} \,\Big|\cdot abc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(abc)+5ac=(abc)\cdot b+5ab \\ b(abc)+5ab=(abc)\cdot c+5bc \\ c(abc)+5bc=(abc)\cdot a+5ac \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (abc)(a-b)=5a(b-c) \\ (abc)(b-c)=5b(c-a) \\ (abc)(c-a)=5c(a-b) \end{cases} \quad \cancel{\neq \;:\; (abc)}$$

Перемножим: $(abc)^3\cdot\underbrace{(a-b)(b-c)(c-a)}=5^3\cdot abc\,(b-c)(c-a)(a-b)$

Если ≥ 1 из скобок равна 0, то $a=b=c$, что

противоречит условию $\Rightarrow (abc)^3=5^3\cdot abc \Rightarrow$

$\Rightarrow abc=\sqrt[2]{5^3}=5\sqrt{5}$

Ответ: $abc_{min}=5\sqrt{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a}$

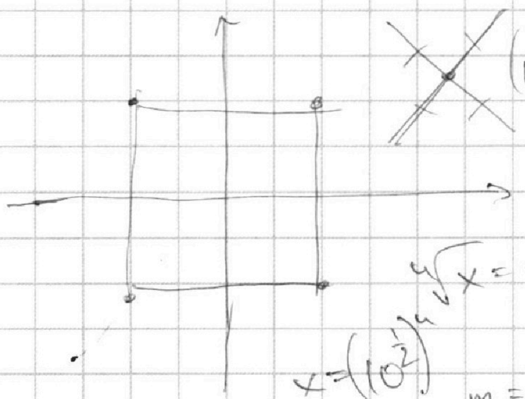
5. $y=x^5+ax$ $\quad y'(x)=5x^4+a$

$y=-3x$

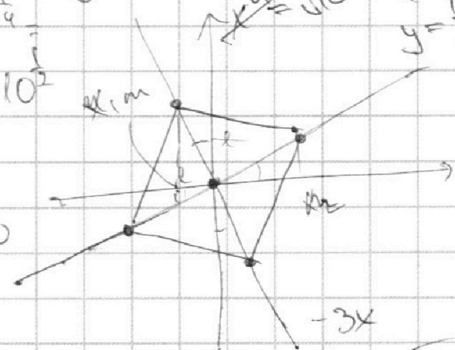
$(\sqrt{10})^4=\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}$

$\cancel{x^4=\sqrt{10}}$

$y=\frac{1}{3}x$ $\quad \sqrt{10}$



$(10)^{\frac{1}{4}}=10^{\frac{1}{2}}$



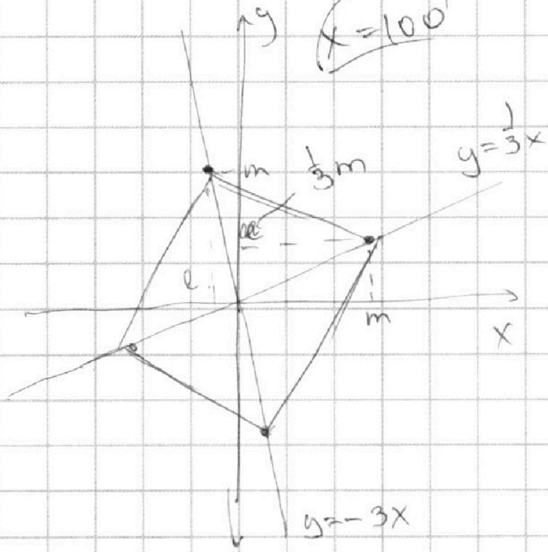
$\sqrt[4]{100^2}=100^{2\cdot\frac{1}{4}}=100^{\frac{1}{2}}=10$

$\sqrt[4]{x}=\sqrt{10}$

$x=\left(10^{\frac{1}{2}}\right)^4$

$x=100$

$m=\frac{1}{3}$ $\quad \begin{cases} m=-3l \\ l=\frac{1}{3}m \end{cases}$ $\quad l=-\frac{1}{3}\cdot 3l \quad l=-l\ ??$



$y=x^5+ax$ $\quad l=m^5+am$ $\quad 9\cdot 9=81$

$\cancel{l=m^5}+ax$ $\quad m=l^5+al$

$m=\cancel{l^5}+ax$ $\quad 3^4=9\cdot$ $\quad \sqrt[4]{x}=\sqrt{2}$

$x=(\sqrt{2})^4$

$\cancel{l}=m^5+am=\frac{1}{3}m$ $\quad x=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^4=$

$m^4+a=\frac{1}{3} \Rightarrow a=\frac{1}{3}-m^4$ $\quad x=4$

$2^4=16$

$y=x^5+\left(\frac{1}{3}-m^4\right)x$

$\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$

$m=\left(-\frac{1}{3}m\right)^5+\left(\frac{1}{3}-m^4\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}m\right)$

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=4$

$1=-\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot m^4+\left(m^4-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}$

$a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a}$ $\quad \frac{1}{3}-\frac{1}{3^5}=$

$1=-\frac{1}{3^5}+m$ $\quad 1=\left(\frac{1}{3}\right)^5m^4+\frac{1}{3}m^4-\frac{1}{9}$

$a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c}$

$ab+5=b^2+\frac{5}{c}b$ $\quad \frac{3^4-1}{3^5}=\frac{80}{81\cdot 3}=$

$ab+5=b^2+\frac{5}{c}b$

$ab+5=b^2\ldots b-5=0$

$243:3=81$

$72:3=24$

$m^4\left(\frac{1}{3^5}+\frac{1}{3}\right)=\frac{10}{9}$

$b^2+\left(\frac{5}{c}-a\right)b-5=0$

$c^2+\left(\frac{5}{a}-b\right)c-5=0$ $\quad =\frac{80}{243}$

$a^2+\left(\frac{5}{b}-c\right)a-5=0$

$\cancel{abc=5^3}$

$m^4=\frac{10\cdot 3^5}{9\cdot(3^4+1)}$

$\frac{1}{3}-\frac{81}{24}=$

$\sqrt[4]{100}=$

$=100^{\frac{1}{4}}=$ $\quad =\frac{8-81}{24}=-\frac{73}{24}$ $\quad \frac{73}{24}$

$(abc)^2\times\left(\frac{5}{c}-a\right)\left(\frac{5}{a}-b\right)\left(\frac{5}{b}-c\right)$

$\left(10^2\right)^{\frac{1}{4}}=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x^2(y-2) - x(13y+27) + 44y - 94 = 0$

$x^2y - 2x^2 - 13xy - 27x + 44y - 94 = 0$

$xy(x-13)$

$(13y+27)^2 - 4(y-2)(44y-94) \geq 0$ $\quad 160+16 = 176$

$(13y-27)^2 - 4(y-2)(44y-94) \geq 0$

$169y^2 + 27^2 - 2\cdot 13\cdot 27 - 4\cdot(44y^2 - 88y - 94y + 94\cdot 2) \geq 0$

$169y^2 + 27^2 - 26\cdot 27y - 4\cdot(44y^2 - 182y + 188) \geq 0$

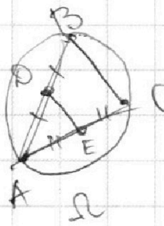
$169y^2 + 27^2 - 26\cdot 27y - 4\cdot 44y^2 + 4\cdot 182y - 4\cdot 188 \geq 0$

$y^2(169 - 4\cdot 44) + y(4\cdot 182 - 26\cdot 27) + 27^2 - 4\cdot 188 \geq 0$

$-7y^2 + 26y - \quad y \in [\dots]$

$94 + 88 = 182 \quad 94 + 94 = 188 \quad 26\cdot 27 = 702 \quad 182\cdot 4 = 728$

$27\cdot 27 = 729 \quad 188\cdot 4 = 752 \quad 44\cdot 4 = 176 \quad 182\cdot 4$



$26\cdot 26 = 676$

$728 - 26\cdot 27$

$728 - 702 = 26$

$169 - 176 = -7$

$28\cdot 23 = 644$

$27\cdot 27 = 729$

$26\cdot 27 = 702$

$188\cdot 4 = 752$

$1 < \sqrt2 < 2$

$4 < 4\sqrt2 < 8$

$-(752-729) =$

$= -23$

abc ≥

$26 \quad 30 < 4\sqrt2 + 26 < 34$

$26^2 - (4\cdot 7\cdot 23)$

$a \neq b \neq c$

$\frac{30}{14} < \frac{4\sqrt2+26}{14} < \frac{34}{14}$

$\frac{34}{14} = 2\frac{6}{14}$

$26^2 - 28\cdot 23$

abc → min

$\frac{4\sqrt2+26}{14} < 2$

$26 - 8 = 18$

$2 \quad \frac{30}{14}$

$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$

$2 < \frac{4\sqrt2+26}{14} < 3$

$2 \quad 3$

~~$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c}$~~

$1\frac{2}{7} \quad 1\frac{4}{7}$

~~$ab + 5 = bc + 5$~~

$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$

$88 - 94 =$
$= 6$

$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1. $\underbrace{|x^3+4|}_{a} + \underbrace{|x^2-1|}_{b} \le \underbrace{|x^3-x^2+5|}_{\cancel{a-b}\ a+b}$ $\cancel{b=-x^2+5}$

$|3|+|5| = |8|$

$8=8$

$\cancel{|a|+|b| \le |a-b|}$ $\underbrace{x^3+4}_{a}\underbrace{-x^2+1}_{b}$

$|-3|+|5|$ $|\cancel{8}\ 2|$

$8>2$

$|a|+|b| \le |a+b|$ }=>

но $|a|+|b| \ge |a+b|$

$|-3|+|-4|$ $|-7|$

$3+4=7$

$\begin{cases} a=-x \\ b=y \end{cases}$, $x,y\ge 0$

$\Rightarrow |a|+|b| = |a+b|$

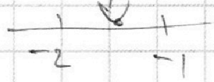
$x+y=|y-x|$ $\quad 1 \le \sqrt[3]{4} \le 2$

$|x^3+4|+|x^2-1| = |x^3-x^2+5|$

$x+y=y-x$ $\quad -1 \ge -\sqrt[3]{4} \ge -2$

~~error~~

$x=0$



Если разного знака, то не работает

1) $\cancel{x^3+4\ge 0}$, $\cancel{x^2-1\ge 0}$ 2) $x^3+4<0$, $\cancel{x^2-1<0}$

1) $x^3+4\ge 0$, $-x^2+1\ge 0$ 2) $x^3+4<0$, $-x^2+1<0$

$\cancel{x^3+4+x^2-1 = |x^3+4}$

$\cancel{x^3+4+x^2-1 = x^3-x^2+5}$

$\cancel{4=5}$

Заново:

$\cancel{-x^3-4=}$

$a=x$, $b=-y$, $x,y>0$

$|a|+|b|=|a+b|$

$|x^3+4|+|x^2-1| \le |x^3-x^2+5|$

$x+y=|x-y|$

$x^2\le 1 \Rightarrow x\in[-1;1]$

$|x^3+4|+|-x^2+1| \le |x^3+4-x^2+1|$

$x+y=x-y$, $x+y=y-x$ }=> $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$x^3 \ge -4$, $x \ge -\sqrt[3]{4}$

$|a|+|b| \le |a+b|$ => $|a|+|b|=|a+b|$

но $|a|+|b| \ge |a+b|$

Случай 1: $a\ge 0, b\ge 0$: $\begin{cases} x^3+4\ge 0 \\ -x^2+1\ge 0 \end{cases}$

Случай 2: $a\le 0; b\le 0$

$-x^3-4+x^2-1 = -x^3-4+x^2-1$

$x^3+4-x^2+1 = x^3+4-x^2+1$

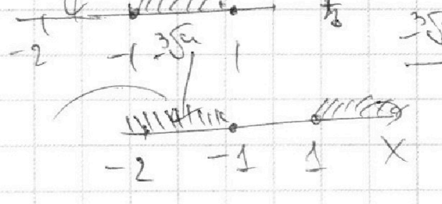
$\forall x$, при $x^3\le -4$, $x^2\ge 1$

При любом таком x работает

$x \le -\sqrt[3]{4}$

$x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

$a\ge 0$, $b\ge 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$(a, b, c) \in \mathbb{N}$ $abc = 2^{150} \cdot 3^{300}$

$a = a$
$b = aq$
$c = aq^2$

$(a; aq; aq^2)$

$a^3q^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$

$aq = 2^{50} \cdot 3^{100}$

Способы для a:

$a = 2^k \cdot 3^m$

$(a; 2^{50} \cdot 3^{100}; aq^2)$

$q = \frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{a}$

$0 \le k \le 50$
$0 \le m \le 100$

$1; 2^{50} \cdot 3^{100}; 2^{100} \cdot 3^{200}$ $2^{150} \cdot 3^{300}$

$2^{50} \cdot 3^{100}$ $2^{50} \cdot 3^{100}$

При a опред $\to$ опред q $\Rightarrow$

$6 \cdot \frac{1}{2} = 3$

$51 \cdot 101$ ← вот столько a шек

$q = \frac{n}{m}$

$\Rightarrow$

$a = \frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{q}$

$(x; 2^{50} \cdot 3^{100}; y)$

$0 \le \varphi_2 \le 50$

$0 \le \varphi_1 \le 50$

$\frac{2^\alpha}{3^\beta}$

$\left(\frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{q}; 2^{50} \cdot 3^{100}; 2^{50} \cdot 3^{100} q\right)$ $51 \cdot 101$

51

$S = \frac{b(q^n - 1)}{q-1}$

$z \in [0; 50]$
$k \in [0; 50]$
$f \in [0; 100]$
$m \in [0; 100]$

$\boxed{q \ne 1}$

$q = \frac{2^k 3^m}{2^z 3^f}$

$\frac{2^z 3^f}{2^k 3^m} \in \mathbb{N}$

$2^{z-k} \cdot 3^{f-m}$

$2^1 \cdot 3^{-1}$

$2^{50} \cdot 3^{100}$ 1 брацуем

$\frac{2}{3}$

$\alpha, \beta > 0$

$50 \cdot 50 +$
$+ 51 + 51$

$q = 2^\alpha 3^\beta$ $\frac{1}{q} = \frac{1}{2^\alpha 3^\beta}$

$\frac{1}{2^\alpha 3^\beta}$ $2^i 3^j$ $2^\alpha 3^\beta$

$= 2500 + 102 = 2602$ двойки

$\frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{q}$ $\boxed{\alpha, \beta > 0}$

$\cancel{50 \cdot 50 = 2500}$
$50 \cdot 100$ $+ 50 \cdot 100$

$= 2^\alpha \cdot 3^{-\beta}$

$\frac{1}{2^\alpha 3^\beta \cdot \cancel{\lambda}} = 2^i 2^j$

$\frac{1}{2^i 3^j}$

$\frac{1}{2^\alpha}$ $50 + 50$
$+ 100 + 100$

$\alpha, \beta < 0$

$50 \cdot 50 =$

$2^{50} \cdot 3^{100} \cdot 2^{-\alpha} \cdot 3^{+\beta} =$
$2^{50} \cdot 3^{100} \cdot 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot \cancel{\lambda}$

$0 \le \alpha \le 50$
$0 \le \beta \le 100$

$2 \cdot 50 \cdot 100 + 100 + 200 =$
$= 100^2 + 300 =$
$= 10000 + 300 =$
$= 10300$

$= 2$

$2, 3$

α, β

$\alpha, \beta > 0$ $\alpha, \beta > 0 \Rightarrow$

$50 \cdot 100 + 100 +$
$+ 50$

$\frac{2^k}{3^l} = \frac{2}{3^l}$

$\frac{1}{2^k 3^l}$

$\frac{\alpha}{2^\alpha 2^\beta}$

$\frac{\alpha}{2^\alpha 3^\beta}$

$\frac{1}{2^\alpha 2^\beta}$

$\frac{2^\alpha}{3^\beta}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~Задача 6.~~ $a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a}$

$a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c} \quad |\cdot b \qquad a=b+\frac{5}{c}-\frac{5}{b}$

$\cancel{ab+5=b^2+\frac{5b}{c}}$

$b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{b+\frac{5}{c}-\frac{5}{b}}$

$b+\frac{5}{c}=c+\frac{5bc}{b^2c+5b-5c}$

$\frac{bc+5}{c}=\frac{b^2c^2+5bc-5c^2+5bc}{b^2c+5b-5c}=\frac{b^2c^2+10bc-5c^2}{b^2c+5b-5c}$

$b^2c^3+10bc^2-5c^3=b^3c^2+5b^2c-5c^2b+5b^2c+25b-25c$

$a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a} \qquad abc=z$

$abc\to\min$

$\frac{z}{bc}+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c} \qquad z= \quad z+5c=b^2c+5b$

$\frac{z}{ab}+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a} \qquad z+5a=c^2a+5c \qquad a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c}$

$z+5b=a^2b+5a$

min

$z=b^2c+b\cdot 5-5c \qquad z=\frac{25}{4c^2}-\frac{25}{2c}-5c \qquad \cancel{abc+\frac{5}{}}$

$x_B=\frac{-5}{2c}$

$a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a}$

$abc+5c=b^2c+5b \qquad b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a}$

1) $a\cdot(abc)+5ac=(abc)\cdot b+5ab \qquad abc+5a=ac^2+5c$

$\cancel{b\cdot(abc)}$ $\qquad b\cdot(abc)+5ab=(abc)\cdot c+5bc$

2) $b\cdot(abc)+5ab=(abc)\cdot c+5bc$

3) $c\cdot(abc)+5bc=(abc)\cdot a+5ac$

$(abc)(a-b)=5a(b-c) \qquad a=b$

$(abc)(b-c)=5b(c-a)$

$(abc)^3=5^3abc \qquad (abc)(c-a)=5c(a-b)$

$abc=\sqrt{5^3}$

$\cancel{(abc)}$

$0=5a(a-c)$

$(abc)= \qquad \cancel{a=0} \quad a=c$

$b=c$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ