



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел  $(a; b; c)$  таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение  $abc$  равно  $2^{150} \cdot 3^{300}$ ?
3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 2) - x(13y - 27) + 44y - 94 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника  $ABC$  описана окружность  $\Omega$ . Точки  $D$  и  $E$  – середины сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно,  $CF$  – биссектриса угла  $C$  треугольника  $ABC$ . Прямые  $ED$  и  $CF$  пересекаются в точке  $G$ , принадлежащей  $\Omega$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что площадь треугольника  $BCF$  в 16 раз больше площади треугольника  $DGF$ .
5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции  $y = x^5 + ax$ . Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой  $y = -3x$ , а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра  $a$  и сторону квадрата.
6. [5 баллов] Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения  $abc$ .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ) вписан в окружность  $\omega$ , а на дуге  $AC$ , не содержащей точку  $B$ , взяты точки  $E$  и  $D$  так, что отрезки  $AD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $F$ . На лучах  $EA$  и  $DC$  отметили точки  $X$  и  $Y$  соответственно таким образом, что  $AX = CF$  и  $CY = AF$ . Найдите площадь четырёхугольника  $BXFY$ , если  $BF = 17$ ,  $XY = 31$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.  $|x^3+4| + |x^2-1| \leq |x^3-x^2+5|$

Пользуясь тем, что  $|a| = |-a|$ , заменим внутри модульных выражений второго слагаемого левой части на противоположное по знаку:

$$|x^3+4| + |-x^2+1| \leq |x^3+4-x^2+1|$$

Пусть  $x^3+4 = a$ , а  $-x^2+1 = b$ :

$|a| + |b| \leq |a+b|$ . Согласно известному неравенству: сумма модулей всегда больше или равна модулю суммы  $\Rightarrow |a| + |b| \geq |a+b|$ . Отсюда можно сделать вывод, что  $|a| + |b| = |a+b|$ , иначе одно из условий не будет выполнено. Если из чисел  $a$  и  $b$  одно  $> 0$ , а другое  $< 0$ , то равенство не достигается. Возможны лишь случаи: 1)  $a \geq 0, b \geq 0$  и 2)  $a \leq 0, b \leq 0$ .

Случай 1:  $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ |a| + |b| = |a+b| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3+4 \geq 0 \\ -x^2+1 \geq 0 \\ |x^3+4| + |-x^2+1| = |x^3-x^2+5| \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq -\sqrt[3]{4} \\ x \in [-1; 1] \\ x^3+4-x^2+1 = x^3-x^2+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\sqrt[3]{4} \\ x \in [-1; 1] \end{cases}, \text{ но } -1 < \sqrt[3]{4} < 2 \Rightarrow \Rightarrow -2 \leq -\sqrt[3]{4} \leq -1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  у системы (1) нет решений.  $\xleftarrow{\sqrt[3]{4}}$   $x \in [-1; 1]$  - реш.   
  $1 < \sqrt[3]{4} < 2 \Rightarrow -1 > -\sqrt[3]{4} > -2 \Rightarrow$  у системы (1) решение нет.

Случай 2:  $\begin{cases} a \leq 0 \\ b \leq 0 \\ |a| + |b| = |a+b| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3+4 \leq 0 \\ -x^2+1 \leq 0 \\ |x^3+4| + |-x^2+1| = |x^3-x^2+5| \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq -\sqrt[3]{4} \\ x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \\ -x^3-4+x^2-1 = -x^3+x^2-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -\sqrt[3]{4} \\ x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \end{cases}$$

$\Rightarrow$  у системы (2)  $x \in [-\sqrt[3]{4}; -1]$  - решение.   
 Объединяя оба решения систем в совокупность, получим: Ответ:  $x \in [-\sqrt[3]{4}; 1]$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача:  $(a; b; c)$  - геом. прогрессия;  $abc = 2^{150} \cdot 3^{100}$ .

Числа  $a, b, c$  можно представить в виде:  $a = a; b = aq; c = aq^2$ .

Тогда:  $abc = a^3 q^3 = 2^{150} \cdot 3^{100} \Rightarrow aq = \sqrt[3]{2^{150} \cdot 3^{100}} = 2^{50} \cdot 3^{100/3}$ , т.е. второй член прогрессии равен  $2^{50} \cdot 3^{100}$ , первый будет равен  $\frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{q}$ , а третий равен  $2^{50} \cdot 3^{100} q$ , т.е. мы имеем тройку чисел:

$(\frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{q}; 2^{50} \cdot 3^{100}; 2^{50} \cdot 3^{100} q)$ . Знаменатель прогрессии  $q$  это какая-то дробь  $\frac{m}{n}$ , где обязательно  $m = 2^i 3^j$ , а  $n = 2^k 3^l$ , т.к. в противном случае числа  $a, b, c$  не будут принадлежать множеству натуральных чисел.

Таким образом:  $q = \frac{m}{n} = \frac{2^i 3^j}{2^k 3^l} = 2^{i-k} \cdot 3^{j-l}$ .

Знаменатель прогрессии  $q$  можно представить, как

(1)  $q = \frac{1}{2^k 3^l}$  или (2)  $q = 2^k 3^l$  или (3)  $q = \frac{2^k}{3^l}$  или (4)  $q = \frac{3^l}{2^k}$ , где  $l, k$  -

- неотрицательные целые числа. Других простых множителей кроме 2 и 3 он содержать не может, так как либо 10й член не будет целым, либо 3й.

Рассмотрим 1й вариант (1). Если  $k, l > 0$ , то  $k \in [1; 50]$ ,  $l \in [1; 100]$   $\Rightarrow 50 \cdot 100 = 5000$  вариантов образования  $q$ . Если  $k=0, l>0$ , то ещё 100 вар. Если  $l=0, k>0$ , то ещё 50 вар.

Рассмотрим вариант (2). Аналогично варианту (1) получим 5150 вариантов образования  $q$ .

Рассмотрим вариант (3). Здесь используем только случаи, когда  $k > 0, l > 0$ , т.к. случаи равенства  $k$  или  $l$  нулю мы уже рассмотрели в первых двух вариантах. Получим  $50 \cdot 100 = 5000$  способов образ.  $q$ , где  $k \in [1; 50]$ ,  $l \in [1; 100]$ .

Рассмотрим вариант (4). Аналогично варианту (3) здесь 5000 способов образования  $q$ . Итого имеем всего

$5150 \cdot 2 + 5000 \cdot 2 = 10300 + 10000 = 20300$  вар.  $\Rightarrow$  существует 20300 троек таких чисел, т.к.  $q$  задает 1 тройку. Ответ: 20300 троек

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.  $x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$   
Можно рассмотреть это уравнение, как квадратное относительно  $x$ . Оно имеет решение в действ. числах, если его дискриминант неотрицателен.

$$D = (13y-27)^2 - 4 \cdot (y-2)(44y-94) \geq 0$$

$$169y^2 + 27^2 - 26 \cdot 27y - 4(44y^2 - 88y - 94y + 188) \geq 0$$

$$(169 - 4 \cdot 44)y^2 + y(88 + 94) \cdot 4 - 26 \cdot 27 + 27^2 - 4 \cdot 188 \geq 0$$

$$-7y^2 + 26y - 23 \geq 0$$

$$7y^2 - 26y + 23 \leq 0 \quad (1)$$

Каждому числу функции  $f(y)$  в левой части неравенства:

$$7y^2 - 26y + 23 = 0$$

$$D = 26^2 - 4 \cdot 7 \cdot 23 = 26^2 - 28 \cdot 23 = 676 - 644 = 32 = 4\sqrt{2}$$

$$y_1 = \frac{26 + 4\sqrt{2}}{14} \quad y_2 = \frac{26 - 4\sqrt{2}}{14} \Rightarrow$$

неравенство (1) верно при  $y \in \left[ \frac{26 - 4\sqrt{2}}{14}; \frac{26 + 4\sqrt{2}}{14} \right]$ . Определим границы данного отрезка:

$$\frac{26 + 4\sqrt{2}}{14} = 1 < \sqrt{2} < 2$$

$$\frac{26 - 4\sqrt{2}}{14} = 4 < 4\sqrt{2} < 8$$

$$\frac{26 + 4\sqrt{2}}{14} < 30 < 26 + 4\sqrt{2} < 34$$

$$2\frac{1}{7} = \frac{30}{14} < \frac{26 + 4\sqrt{2}}{14} < \frac{34}{14} = 2\frac{3}{7}. \text{ Т.к. } y \in \mathbb{Z}, \text{ то } y \leq 2 \quad (*)$$

$$-8 < -4\sqrt{2} < -4$$

$$18 < 26 - 4\sqrt{2} < 22$$

$$1\frac{2}{7} = \frac{18}{14} < \frac{26 - 4\sqrt{2}}{14} < \frac{22}{14} = 1\frac{4}{7}. \text{ Т.к. } y \in \mathbb{Z}, \text{ то } y \geq 2 \quad (**)$$

Из (\*) и (\*\*) следует, что  $y = 2$ , тогда исходное уравнение при подстановке примет вид:

$$-x(13 \cdot 2 - 27) + 44 \cdot 2 - 94 = 0$$

$$x + (-6) = 0 \Rightarrow x = 6. \text{ Т.е. подходит единствен-}$$

ная пара  $(6; 2)$ .

Ответ:  $(6; 2)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

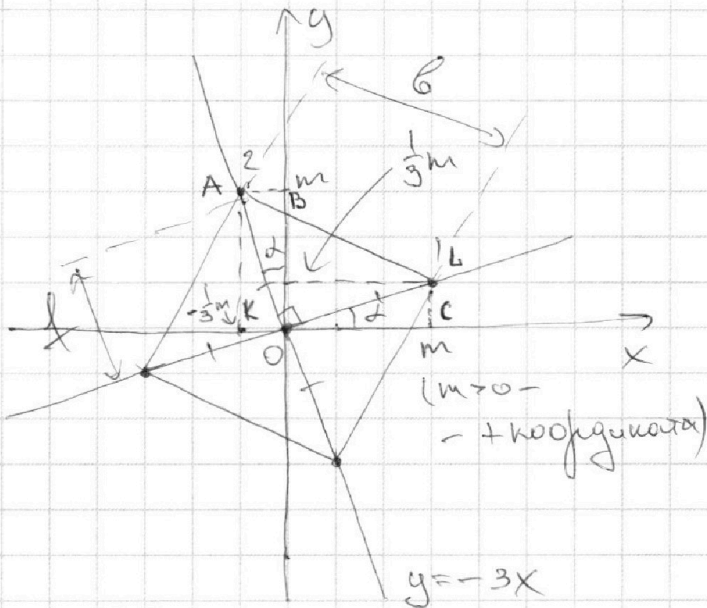
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5  $y = x^5 + ax$ ;  $y = -3x$  — прямая диагональ квадрата, центр совпадает с началом координат.

Диагональ квадрата  $\perp \Rightarrow$  вторая диагональ его должна лежать на прямой  $y = \frac{1}{3}x$ . Это можно показать поворотом системы координат на угол между прямой  $y = -3x$  и осью ординат. В силу симметрии, если прямая, содержащая вторую диагональ квадрата должна совпасть с  $Ox$  после поворота  $\Rightarrow$  угол между 2ой прямой и осью  $Ox$  также равен  $\alpha \Rightarrow$  вторая прямая задается уравнением  $y = \frac{1}{3}x$



Из симметрии рисунка видно, что если точка 1 имеет координаты  $(m; \frac{1}{3}m)$ , то точка 2 имеет координаты  $(-\frac{1}{3}m; m)$ ,  $\triangle AOB = \triangle LOC$  по гипотенузе и острому углу. Тогда справедливы уравнения:

$$\begin{cases} m^5 = (-\frac{1}{3}m)^5 + a(-\frac{1}{3}m) & (1) \\ \frac{1}{3}m = m^5 + am & (2) \end{cases}$$

Из уравнения (2):  $a = \frac{1}{3}m - m^4$ , при  $m \neq 0$ . (3)

Подставим  $a$  из (3) в (1):

$$\frac{1}{3}m = (-\frac{1}{3})^5 m^5 - \frac{1}{3}m(\frac{1}{3} - m^4), \text{ при } m \neq 0:$$

$$-1 = \frac{1}{3^5} m^4 + \frac{1}{9} - \frac{1}{3}m^4 \Rightarrow \left(\frac{1}{3^5} - \frac{1}{3}\right)m^4 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3^5}\right)m^4 = \frac{10}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{80}{243}m^4 = \frac{10}{9} \Rightarrow m^4 = \frac{10}{9} \cdot \frac{243}{80} = \frac{243}{72} = \frac{81}{24} \Rightarrow m = \pm \sqrt[4]{24}, \text{ но}$$

$$m > 0 \Leftrightarrow m = \sqrt[4]{24} \Rightarrow a = \frac{1}{3} - \frac{81}{24} = -\frac{73}{24}. \text{ Теперь найдём}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

**МФТИ**

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

сторону в квадрата. По Теореме Пифагора:

$$b^2 = f^2 + f^2 \Rightarrow b = \sqrt{2}f. \text{ Остается найти расстояние}$$

$f$ . Если воспользоваться Т. Пифагора для  $\triangle AOK$ :

$$f^2 = m^2 + \left(\frac{1}{3}m\right)^2 \Rightarrow f^2 = m^2 + \frac{1}{9}m^2 = \frac{10}{9}m^2 \Rightarrow f = \frac{\sqrt{10}}{3}m =$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{100}{24}} = \sqrt{\frac{50}{12}} = \sqrt{\frac{25}{6}} \Rightarrow b = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{25}{6}} =$$

$$= \sqrt{4} \cdot \sqrt{\frac{25}{6}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 4}{6}} = \sqrt{\frac{100}{6}} - \text{сторона квадрата.}$$

$$\text{Ответ: } a = -\frac{13}{24}; \quad b = \sqrt{\frac{100}{6}} - \text{сторона квадрата}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6  $a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$

$$\begin{cases} a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} \quad | \cdot abc \\ b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \quad | \cdot abc \\ a + \frac{5}{b} = c + \frac{5}{a} \quad | \cdot abc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(abc) + 5ac = (abc) \cdot b + 5ab \\ b(abc) + 5ab = (abc) \cdot c + 5bc \\ c(abc) + 5bc = (abc) \cdot a + 5ac \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (abc)(a-b) = 5a(b-c) \\ (abc)(b-c) = 5b(c-a) \\ (abc)(c-a) = 5c(a-b) \end{cases} \quad \div : (abc)$$

Перемножим:  $(abc)^3 \cdot (a-b)(b-c)(c-a) = 5^3 \cdot abc(b-c)(c-a)(a-b)$

Если  $\geq 1$  из скобок равна 0, то  $a=b=c$ , что

противоречит условию  $\Rightarrow (abc)^3 = 5^3 \cdot abc \Rightarrow$

$$\Rightarrow abc = \sqrt[3]{5^3} = 5\sqrt{5}$$

Ответ:  $abc_{\min} = 5\sqrt{5}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

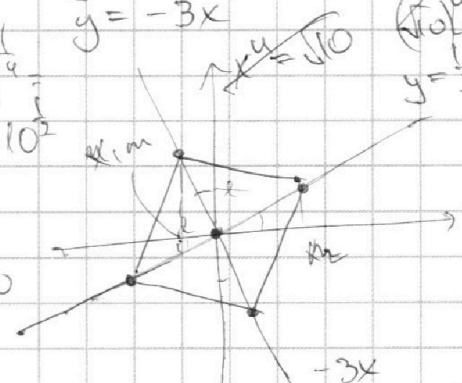
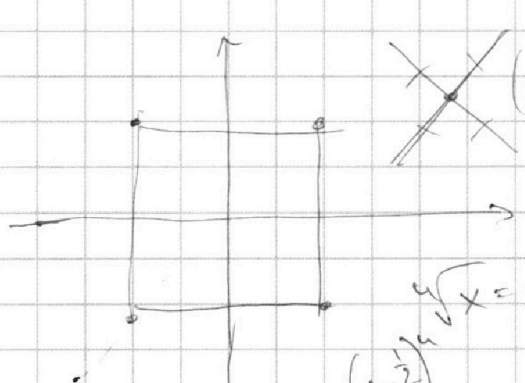
$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

5.

$$y = x^5 + ax \quad y'(x) = 5x^4 + a$$

$$y = -3x$$

$$y = \frac{1}{3}x$$

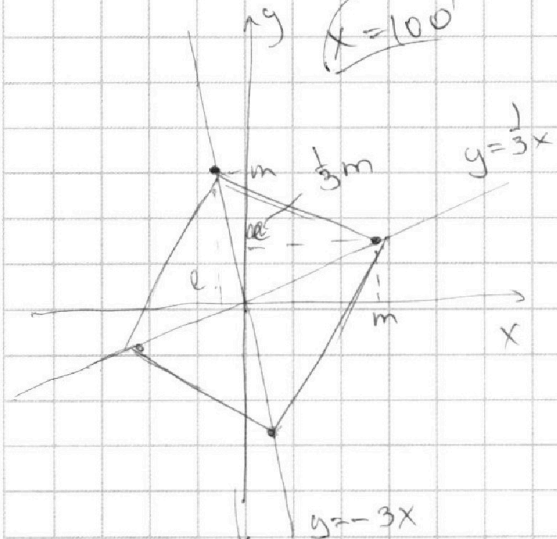


$$\sqrt[4]{100^2} = 100^{2 \cdot \frac{1}{4}} = 100^{1/2} = 100^{0.5} = 10$$

$$x = (10^2)^{1/4} = 100^{1/2} = 10$$

$$m = \frac{1}{3} \quad (m = -3l, l = \frac{1}{3}m)$$

$$l = -\frac{1}{3}3l = -l$$



$$y = x^5 + ax \quad l = m^5 + am$$

$$l = m^5 + ax \quad m = l^5 + al$$

$$m = l^5 + ax$$

$$g \cdot g = 81$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{2}$$

$$x = (\sqrt{2})^4$$

$$x = (2^2)^2 = 4$$

$$l = m^5 + am = \frac{1}{3}m$$

$$m^4 + a = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3} - m^4$$

$$y = x^5 + (\frac{1}{3} - m^4)x$$

$$2^4 = 16$$

$$m = (\frac{1}{3}m)^5 + (\frac{1}{3} - m^4) \cdot (\frac{1}{3}m)$$

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

$$\sqrt{2 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

$$1 = -(\frac{1}{3})^5 \cdot m^4 + (m^4 - \frac{1}{3}) \cdot \frac{1}{3}$$

$$1 = -\frac{1}{3^5} + m$$

$$1 = (\frac{1}{3})^5 m^4 + \frac{1}{3}m - \frac{1}{9}$$

$$243 : 3 = 81$$

$$m^4 (\frac{1}{3^5} + \frac{1}{3}) = \frac{10}{9}$$

$$12 : 3 = 24$$

$$m^4 = \frac{10 \cdot 3^5}{9 \cdot (3^4 + 1)}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{81}{24} =$$

$$m^4 = \frac{10 \cdot 3^5}{9 \cdot (3^4 + 1)}$$

$$= \frac{8-81}{24} = -\frac{73}{24}$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{3^5} =$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c}$$

$$ab + 5 = b^2 + \frac{5}{c}b$$

$$b^2 + (\frac{5}{c} - a)b - 5 = 0$$

$$c^2 + (\frac{5}{a} - b)c - 5 = 0$$

$$a^2 + (\frac{5}{b} - c)a - 5 = 0$$

$$abc^2 + (\frac{5}{c} - a)abc = 5^3$$

$$100 =$$

$$= 100^{1/4} =$$

$$(10^2)^{1/4} = 10^{1/2} = \sqrt{10}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2(y-2) \cdot x(13y+27) + 44y - 94 = 0$$

$$x^2y - 2x^2 - 13xy + 27x + 44y - 94 = 0$$

$$xy(x-13)$$

$$(13y+27)^2 - 4(y-2)(44y-94) \geq 0 = 176$$

$$(13y+27)^2 - 4(y-2)(44y-94) \geq 0$$

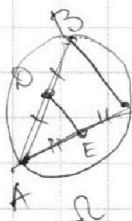
$$169y^2 + 27^2 - 2 \cdot 13 \cdot 27 - 4 \cdot (44y^2 - 88y - 94y + 94 \cdot 2) \geq 0$$

$$169y^2 + 27^2 - 26 \cdot 27y - 4 \cdot (44y^2 - 182y + 188) \geq 0$$

$$169y^2 + 27^2 - 26 \cdot 27y - 4 \cdot 44y^2 + 4 \cdot 182y - 4 \cdot 188 \geq 0$$

$$y^2(169 - 4 \cdot 44) + y(4 \cdot 182 - 26 \cdot 27) + 27^2 - 4 \cdot 188 \geq 0$$

$$-7y^2 + 26y - 729 \geq 0 \quad y \in \mathbb{C} \dots$$



$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 128 - 26 \cdot 27 \\ 728 - 702 = 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 23 \\ \hline 184 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 11 \\ \hline 616 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1 < \sqrt{2} < 2 \\ 4 < 4\sqrt{2} < 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ -176 \\ \hline -7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 27 \\ \hline 189 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 54 \\ \times 11 \\ \hline 594 \end{array}$$

$$-(752 - 729) = 23$$

$$\begin{array}{r} 44 \\ \times 4 \\ \hline 176 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 27 \\ \hline 702 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 52 \\ \times 4 \\ \hline 208 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 702 \\ -208 \\ \hline 494 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 182y \\ \times 4 \\ \hline 728y \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 182 \\ \times 4 \\ \hline 728 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 188 \\ \times 4 \\ \hline 752 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26^2 - (4 \cdot 7 \cdot 23) \\ 676 - 724 = -48 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$abc \geq$$

$$a \neq b \neq c$$

$$abc \rightarrow \min$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c}$$

$$ab + 5 = bc + 5$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

$$26 \quad 30 < 4\sqrt{2} + 26 < 34 = -23$$

$$\frac{30}{14} < \frac{4\sqrt{2} + 26}{14} < \frac{34}{14} \quad \frac{34}{14} = 2 \frac{6}{7} \quad 26^2 - 28 \cdot 23$$

$$30 < \frac{4\sqrt{2} + 26}{14} < 2$$

$$2 < \frac{4\sqrt{2} + 26}{14} < 3$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{7}} \quad \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{7}}$$

$$88 - 94 = -6$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1.  $\frac{|x^3+4|}{a} + \frac{|x^2-1|}{b} \leq \frac{|x^3-x^2+5|}{a+b}$   $\leftarrow x^2+5$   $|3|+|5| = |8|$   
 $|a|+|b| \leq |a+b|$   $\frac{x^3+4-x^2+1}{a+b}$   $| -3|+|5| = |2|$   
 $|a|+|b| \leq |a+b| \Leftrightarrow$   $| -3|+| -4| = | -7|$   
 но  $|a|+|b| > |a+b|$   $3+4 = 7$

$\Rightarrow |a|+|b| = |a+b|$

$\begin{cases} a = -x, x, y \geq 0 \\ b = y \end{cases}$

$|x^3+4| + |x^2-1| = |x^3-x^2+5|$

$x+y = |y-x| \Rightarrow \sqrt[3]{4} \leq 2$

$x+y = y-x \Rightarrow x=0$

Если разность знамен, то не работает

1)  $\frac{x^3+4 \geq 0}{x^2+1 \geq 0}$  2)  $\frac{x^3+4 < 0}{x^2+1 < 0}$  1)  $\frac{x^3+4 \geq 0}{-x^2+1 \geq 0}$  2)  $\frac{x^3+4 < 0}{-x^2+1 < 0}$

~~$x^3+4+x^2-1 = |x^3+4|$~~

~~$x^3+4+x^2-1 = x^3-x^2+5$~~

Вариант:

$|x^3+4| + |x^2-1| \leq |x^3-x^2+5|$

$|a|+|b| = |a+b|$

$x+y = |y-x|$

$x^2 \leq 1 \Rightarrow x \in [-1; 1]$

$|x^3+4| + |-x^2+1| \leq |x^3+4-x^2+1|$

$\begin{cases} x+y = x-y \\ x+y = y-x \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x^3 \geq -4 \\ x \geq \sqrt[3]{4} \end{cases}$

но  $|a|+|b| > |a+b|$

$\Rightarrow |a|+|b| = |a+b|$

Случай 1:  $a \geq 0, b \geq 0: \begin{cases} x^3+4 \geq 0 \\ -x^2+1 \geq 0 \end{cases}$

Случай 2:  $a \leq 0, b \leq 0$

~~$-x^3-4+x^2-1 = -x^3-4+x^2-1$~~

$x^3+4-x^2+1 = x^3+4-x^2+1$

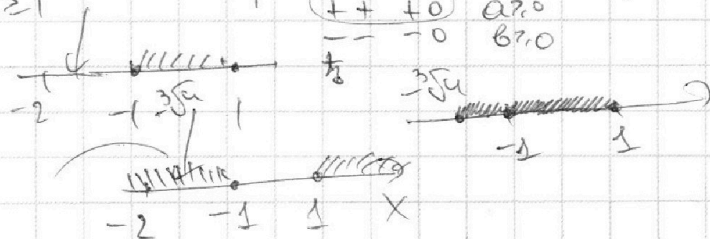
$\forall x, \text{ при } x^3 \leq -4$

при любых таких x работает

$x \leq -\sqrt[3]{4}$

$x^2 \geq 1$

$x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(a, b, c) \in \mathbb{N} \quad abc = 2^{50} \cdot 3^{300}$$

$$\begin{aligned} a &= a \\ b &= aq \\ c &= aq^2 \end{aligned} \quad (a; aq; aq^2)$$

$$a^3 q^3 = 2^{150} \cdot 3^{900}$$

$$aq = 2^{50} \cdot 3^{300}$$

Свободы  
для a:

$$a = 2^k \cdot 3^m$$

$$0 \leq k \leq 50$$

$$0 \leq m \leq 100$$

~~$$a; 2^{50} \cdot 3^{100}; 2^{50} \cdot 3^{100}$$~~

$$1; 2^{50} \cdot 3^{100}; 2^{100} \cdot 3^{200}$$

$$2^{150} \cdot 3^{300}$$

Если a простое  $\rightarrow$

$\rightarrow$  простое q  $\Rightarrow$

$$6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

$$51 \cdot 101 \in$$

Бот  
стабильно  
амерк

крас

$$0 \leq p_i \leq 50 \quad a = \frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{q^{50}}$$

$$0 \leq p_i \leq 50$$

$$(x; 2^{50} \cdot 3^{100}; y)$$

$$q = \frac{m}{n}$$

$$51 \cdot 101$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{6(q^2-1)}{q^2-1} \quad z \in [0; 50] \\ & \quad k \in [0; 50] \\ & \quad t \in [0; 100] \\ & \quad m \in [0; 100] \end{aligned}$$

$$q = \frac{2^k \cdot 3^m}{2^2 \cdot 3^t}$$

$$q = \frac{2^k \cdot 3^m}{2^2 \cdot 3^t}$$

$$\frac{2^2 \cdot 3^t}{2^k \cdot 3^m} \in \mathbb{N}$$

~~$$2^2 \cdot 3^t \rightarrow 2^2 \cdot 3^t \cdot 50 \cdot 101$$~~

$$1 \cdot 101$$

$$2^2 \cdot 3^t \quad 2^2 \cdot 3^t$$

$$2^2 \cdot 3^t$$

$$= 2500 + 102 = 2602 \text{ наим}$$

$$q = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}}$$

~~$$50 \cdot 50 = 2500$$~~

$$50 \cdot 100$$

$$= 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}$$

$$\frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{q} \quad \alpha, \beta > 0$$

$$\frac{1}{2^{\alpha}} \cdot 50 + 50$$

$$+ (100 + 100)$$

$$\alpha, \beta < 0$$

$$50 \cdot 50 =$$

$$\begin{cases} 2^{50} \cdot 3^{100} \cdot 2^{-\alpha} \cdot 3^{-\beta} = \frac{1}{2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}} \\ 2^{50} \cdot 3^{100} \cdot 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} = \frac{1}{2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}} \end{cases}$$

$$2 \cdot 50 \cdot 100 + 100 + 200 =$$

$$= 100^2 + 300 =$$

$$= 10000 + 300 =$$

$$= 10300$$

$$\alpha, \beta > 0$$

$$\frac{1}{2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}}$$

$$\frac{1}{2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}}$$

$$50 \cdot 100 + 100 + 50$$

$$\frac{1}{2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}}$$

$$\frac{1}{2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}}$$

$$\frac{1}{2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}}$$

$$\frac{2^{\alpha}}{2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}}$$

$$\frac{1}{2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~Задача 6.~~  $a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} \quad | \cdot b \quad a = b + \frac{5}{c} - \frac{5}{b}$$

$$ab + 5 = b^2 + \frac{5b}{c}$$

$$b + \frac{5}{c} = c + \frac{5bc}{b^2c + 5b - 5c} \quad b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{b + \frac{5}{c} - \frac{5}{b}}$$

$$\frac{bc + 5}{c} = \frac{b^2c^2 + 5bc - 5c^2 + 5bc}{b^2c + 5b - 5c} = \frac{b^2c^2 + 10bc - 5c^2}{b^2c + 5b - 5c}$$

$$b^2c^3 + 10bc^2 - 5c^3 = b^3c^2 + 5b^2c - 5c^2b + 5b^2c + 25b - 25c$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \quad abc = z$$

$$\frac{z}{bc} + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} \quad z = z + 5c = b^2c + 5b \quad abc \rightarrow \min$$

$$\frac{z}{ab} + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \quad z + 5a = b^2a + 5c \quad a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c}$$

$$z + 5b = a^2b + 5a \quad \swarrow \min \quad abc + 5$$

$$z = b^2c + b \cdot 5 - 5c \quad z = \frac{25}{4c^2} - \frac{25}{2c} - 5c$$

$$x_{\text{пр}} = \frac{-5}{2c}$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

$$abc + 5c = b^2c + 5b$$

$$b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

$$1) a \cdot (abc) + 5ac = (abc) \cdot b + 5ab$$

$$abc + 5a = b^2c + 5c$$

$$b \cdot (abc)$$

$$b \cdot (abc) + 5ab = (abc) \cdot c + 5bc$$

$$2) b \cdot (abc) + 5ab = (abc) \cdot c + 5bc$$

$$(abc)(a-b) = 5a(b-c) \quad a=b$$

$$3) c \cdot (abc) + 5bc = (abc) \cdot a + 5ac$$

$$(abc)(b-c) = 5b(c-a)$$

$$(abc)(c-a) = 5c(a-b)$$

$$(abc)^3 = 5^3 abc$$

$$abc = 5^2$$

$$(abc)$$

$$(abc) = \begin{cases} a = 5a(a-c) \\ a = 0 & a=c \\ b=c \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.  
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

