



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 10 КЛАСС. Вариант 12

1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел  $(a; b; c)$  таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение  $abc$  равно  $5^{360} \cdot 7^{90}$ ?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 3) - x(11y - 34) + 32y - 101 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника  $ABC$  описана окружность  $\Omega$ . Точки  $D$  и  $E$  – середины сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно,  $CF$  – биссектриса угла  $C$  треугольника  $ABC$ . Прямые  $ED$  и  $CF$  пересекаются в точке  $G$ , принадлежащей  $\Omega$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что площадь треугольника  $BCF$  в 25 раз больше площади треугольника  $DGF$ .

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции  $y = -x^5 + ax$ . Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой  $y = 2x$ , а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра  $a$  и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения  $abc$ .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ) вписан в окружность  $\omega$ , а на дуге  $AC$ , не содержащей точку  $B$ , взяты точки  $E$  и  $D$  так, что отрезки  $AD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $F$ . На лучах  $EA$  и  $DC$  отметили точки  $X$  и  $Y$  соответственно таким образом, что  $AX = CF$  и  $CY = AF$ . Найдите площадь четырёхугольника  $BXYF$ , если  $BF = 19$ ,  $XY = 36$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|$  Оде части  $\geq 0$ , а значит  
могут выражаться их в квадрате

$$x^3 - x^2 - 8 = x^3 - 9 - (x^2 - 1)$$

$$(x^3 - 9)^2 + (x^2 - 1)^2 + 2(x^2 - 1)(x^3 - 9) \leq (x^2 - 1)^2 + (x^3 - 9)^2$$

$$-2(x^2 - 1)(x^3 - 9)$$

и

$$4(x^2 - 1)(x^3 - 9) \leq 0$$

$$(x^2 - 1)(x^3 - 9) \leq 0$$

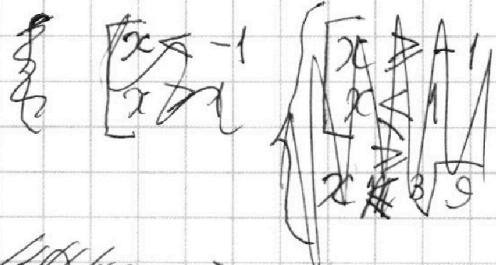
$$(x^2 - 1)(x^3 - 9) \leq 0$$

$$x^2 - 1 = 0 \quad x^3 - 9 = 0$$

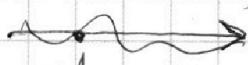
$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

$$x = \sqrt[3]{9}$$



$x \in [-1, 1] \cup [1, \sqrt[3]{9}]$



$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x^3 - 9 \leq 0 \end{cases}$$

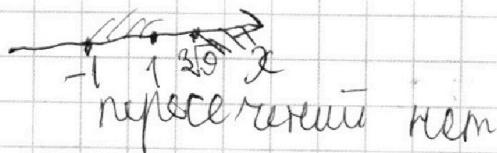
$$\begin{cases} x^2 - 1 \leq 0 \\ x^3 - 9 \geq 0 \end{cases}$$



$$x \in (-\infty, 1] \cup [1, \sqrt[3]{9}]$$

Однако:  $x \in (-\infty, 1] \cup$

$$\cup [1, \sqrt[3]{9}]$$



непрерывный нет



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c \in \mathbb{Z}$  могут быть любые  
 $a \cdot b \cdot c = a^3 q^3 \Rightarrow$  можно извлечь куб

$\frac{a^3}{a^9} \cdot \frac{b^3}{b^9} \cdot \frac{c^3}{c^9} = 5^{\frac{360}{7}} \cdot 7^{\frac{90}{7}}$   $5^{120} \cdot 7^{30} - a^3 q^3$ . Отсюда  
выходит тройка  $5^{120}, 5^{120}, 7^{30}$

$5^{120} \cdot 7^{30} -$  это гарантированное число  $b = aq$

$$\cancel{5^{120} \cdot 7^{30}} \cdot 5^{120} \cdot 7^{30} \cdot 5^{120} \cdot 7^{30} \cdot 5^{120} \cdot 7^{30} = 5^{360} \cdot 7^{90}$$

$5^{120} \cdot 7^{30}, 5^{120} \cdot 7^{30}, 5^{120} \cdot 7^{30} -$  даётся прогрессия  
может удовлетворять условию

$$7^{1360}, 5^{120} \cdot 7^{30}, 7^{45} \cdot 5^{180}$$

$$7^{2120}, 7^{30} \cdot 5^{120}, 7^{58} \cdot 5^{120}$$

$$7 \cdot 5^{120}, 7^{30} \cdot 5^{120}, 7^{31} \cdot 5^{120}$$

$$7^{260} \cdot 5^{120}, 7^{30} \cdot 5^{120}, 7^{30} \cdot 5^{120}$$

Но ведь какое-то college, надо всего лишь  
число  $a$ , любое  $y$   
 $4^n k$ , мы делаем  
его на  $7^{30-n} \cdot 5^{120-k}$  и получаем  $7^{30} \cdot 5^{120}$ , а после это  
все число делится настолько же и

$$получаем 7^{30+30-n} \cdot 5^{120+120-k} = 7^{60-n} \cdot 5^{240-k}$$

Умножаем и получаем  $7^{60-n+120} \cdot 5^{240-k+k+120} =$   
 $= 7^{280} \cdot 5^{360}$  при этом все степени чисел не могут быть  $< 0$  иначе

значение  $60 - n + 120$  не может быть больше 240 иначе  
степени будут  $> 360$  и 360 сюда  $\Rightarrow$  все тройки некорректны  
также  $61 \cdot 241$ , что надо учитывать, что степень  $61 < 241$  (бесконечна)



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2(y-3) - x(11y - 34) + 32y - 101 = 0$$

$$12x^2(y-3) - 11x(y-3) - 2 + 32(y-3) - 5 = 0$$

$$(y-3)(x^2 - 11x + 32) - x - 5 = 0$$

$$x^2 - 11x + 32 = 0 \quad \begin{cases} y=8 \\ x=-5 \end{cases}$$

$$D = 121 - 128 < 0$$

$$D = (11y - 84)^2 + 4(y-3)(32y - 101) = 121y^2 + 48y +$$

$$+ 1156 - 128y^2 + 404y + 384y - 1212 = -56 - 4y^2 + 408y$$

$$-7y^2 - 56 + 40y = 0 \quad 7y^2 + 56 - 40y = 0$$

$$D = 1600 - 1568 = 32 \quad g = \frac{40 \pm \sqrt{32}}{14} = \frac{40 \pm 2\sqrt{2}}{7}$$

$$x = \frac{11y - 34 \pm \sqrt{(11y - 34)^2 + 4(2y^2 - 20y + 25)}}{2y - 6} - \text{uz ganteng}$$

$y > \frac{2x+2\sqrt{2}}{4}$  *the domain of the function is*  $x > -1$

$y < \frac{20 - 2\sqrt{2}}{7}$  gives two max runs of  
for one arrival marko

$y < \frac{20 - 2\sqrt{2}}{4}$  юже чисто максима  
и не означает максимума

para 3 u - -5 u 3

$$\text{Umkehr}(-5; 3)$$





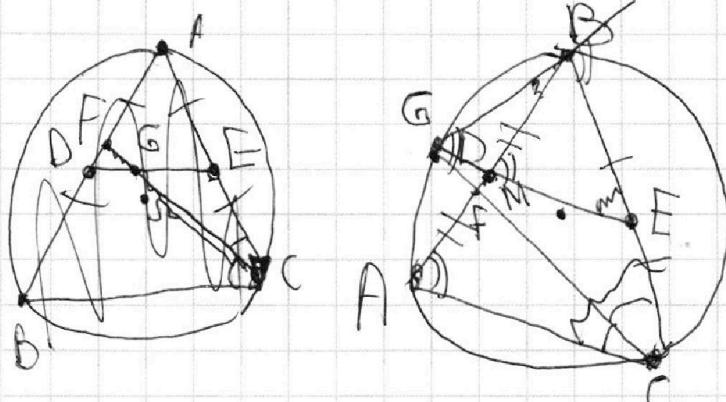
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{BCF} = 2.5 S_{GDF}$$

$$\angle D \cong \angle A$$

$$\angle GFM = \frac{\angle B - \angle C}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

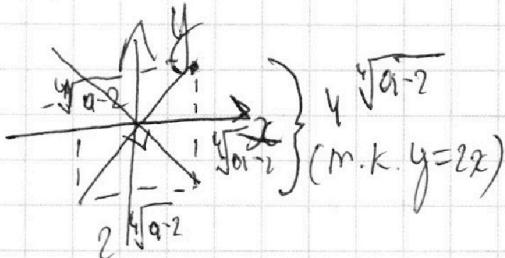
$$y = -x^5 + ax$$

$$y = 2x$$

$$2x = -x^5 + ax \quad x = \pm \sqrt[4]{a-2}$$

$$2x = -x^4 + a \quad \text{Найдем значение}$$

$$\text{диагональ} = \sqrt{4\sqrt[4]{a-2} + 16\sqrt[4]{a-2}} =$$



$$= 2\sqrt{5\sqrt[4]{a-2} + 16\sqrt[4]{a-2}} = 2\sqrt{5}\sqrt[4]{a-2} \approx 2\sqrt{5}\sqrt{a-50}$$

$$\text{сторона} = \frac{\text{диагональ}}{\sqrt{2}} =$$

$$(\text{м.к. квадрат}) = \sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{a-50} =$$

$$= \sqrt{100a-200} =$$

Можно сказать при  
второй диагональ лежит  
на сфере графике  $y = -\frac{1}{2}x$ , м.к. при этом  
образуется прямой угол между диагональю  
и, что надо и нужно, что у нас квадрат

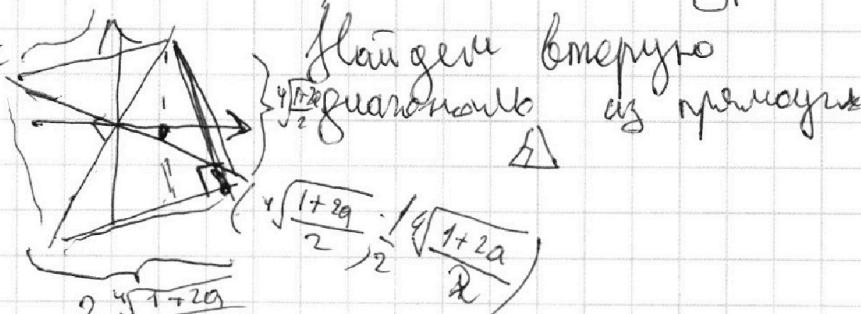
$$-\frac{1}{2}x = -x^5 + ax$$

$$-1 = -2x^4 + 2a$$

$$1 = 2x^4 - 2a$$

$$\frac{1+2a}{2} = x^4$$

$$x = \pm \sqrt[4]{\frac{1+2a}{2}}$$



$$\text{диагональ} = \sqrt{100\sqrt[4]{\frac{1+2a}{2}}} = \sqrt{100}\sqrt[4]{\frac{1+2a}{2}} =$$

$$= \sqrt{25+50a}$$

$$\sqrt[4]{\frac{25+50a}{2}} = 2\sqrt{25a-50}/14^2 \quad \text{или} \quad \text{см} = \sqrt[4]{100 \cdot \frac{13}{6}-200} =$$

$$\frac{25+50a}{2} = 16(25a-50) / 125$$

$$\frac{1+2a}{2} = 16a - 32a / 12$$

$$1+2a = 32a - 64 \quad 30a = 64$$

$$= \sqrt{100 \cdot \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{100}{6}} =$$

$$= \sqrt{16/6} \approx 2$$

$$\text{Ответ: } 2\frac{1}{6} \cdot \sqrt[4]{16/6}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}$$

$$a = b - \frac{7}{b} + \frac{7}{c} = c - \frac{ab - 7ac - 7bc + 7ab}{abc}$$

$$b = c - \frac{4}{c} + \frac{7}{b} + \frac{7}{a} = c - \frac{7ab + 7ac + 7bc}{abc}$$

$$-c - \frac{14abc - 14ac - 7bc}{abc} = \frac{abc^2 - 14abc + 14ac + 7bc}{abc} = a$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8| + |x^3 - x^2 - 8| = |x^3 - x^2 - 8|$$

$$|x^3 - x^2 - 8| = |x^3 - x^2 - x + 1|$$

$$(x-y)(x-2)(x^2+3x+4)$$

$$|x^3 - 9| + |(x-1)(x+1)| \leq |(x-2)(x^2+2x+4) - x^2|$$

$$x^3 - 9 < 0 \quad (x-1)(x+1) < 0 \quad |x^3 - 8 - x^2| < 0$$

$$x^3 < 9$$

$$x < \sqrt[3]{9}$$

$$2 < \sqrt[3]{9} < 2\sqrt{3}$$

$$x < 2 \quad x - 1 < 0$$

$$x > 1 \quad x < 1$$

$$x + 1 < 0$$

$$x < -1$$

$$y = -x^5 + ax$$

$$y = 2x$$

$$\frac{2}{2} \frac{1}{1} \frac{4}{4} \frac{1}{1}$$

$$\frac{8}{8} \frac{2}{2} \frac{6}{6}$$

$$|a| + |b| \leq |a-b|$$

$$2 + a^4 = a$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$2) \quad 1 < x \leq 2$$

$$-x^3 + 1 - x^2 \leq 8 + x^2 - x^3$$

$$9 - x^3 + x^2 - 1 \leq 8 + x^2 - x^3$$

$$1 \leq 2x^2$$

$$-x^5 + 2x^2 + x^5$$

$$-\overbrace{x^5}^0 + 2x^2 + x^5$$

$$x^2 \geq \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq -\frac{1}{4} \end{cases} \quad x \in \left[-1, -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, 1\right]$$

$$3) \quad 2 < x < 2,1$$

$$(x^3 - 9)^2 + (x^2 - 1) + 2(x^2 - 1)(x^3 - 9)$$

$$4(x^2 - 1)(x^3 - 9) \leq 0$$

$$(x^3 - 9)^2 + (x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1)(x^3 - 9) \leq 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2(y-3) - 11x(11y-34) + 32y - 101 = 0$$

$$\Delta = (11y-34)^2 - 4(y-3)(32y-101) =$$

$$= 121y^2 - 748y + 1156 - 128y^2 + 404y + 384y - 1212 =$$

$$\times \begin{array}{r} 32 \\ 2 \\ \hline 740 \end{array} \quad \times \begin{array}{r} 34 \\ 89 \\ \hline 136 \end{array} \quad \times \begin{array}{r} 32 \\ 4 \\ \hline 128 \end{array} \quad \times \begin{array}{r} 32 \\ 12 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 102 \\ \hline 1156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ 4 \\ \hline 392 \\ 3 \\ \hline 892 \\ 4 \\ \hline 1568 \end{array}$$

82

$$\begin{array}{r} 13 \\ 389 \\ \hline 1568 \end{array}$$

$$-7y^2 + 40y - 56 = 0$$

$$7y^2 - 40y + 56 = 0$$

$$\Delta = 1600 - 7392 = -1600 -$$

$$-1568 = 32$$

$$y = \frac{-40 \pm \sqrt{32}}{14} =$$

$$= \frac{-40 \pm 4\sqrt{2}}{14} = \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{14} = \frac{10 \pm \sqrt{2}}{7}$$

$$x^2(y-3) - 11x(y-3) - x +$$

$$+ 32y - 32(y-3) - 5 = 0$$

$$x^2(y-3) - 11x(y-3) - x +$$

$$+ 32(y-3) - 5 = 0$$

$$(y-3)(x^2 - 11x + 32) - x - 5 = 0$$

$$x^2 - 11x + 32 = 0 \quad (y-3)(x^2 - 11x + 32) - x - 5 = 0$$

$$\Delta = 121 - 128 = 0$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$34 \cdot \frac{32}{11} = 2 \frac{10}{11}$$

$$-3x^2 + 34x + 340 \mid 11$$

$$-33 \mid 3$$

$$34 \mid 11$$

$$-22 \mid 3$$

$$-10 \mid 3$$

$$-89$$

$$-3x^2 + 34x - 101 = 0$$

$$\Delta = 1156 - 1212 = 44$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

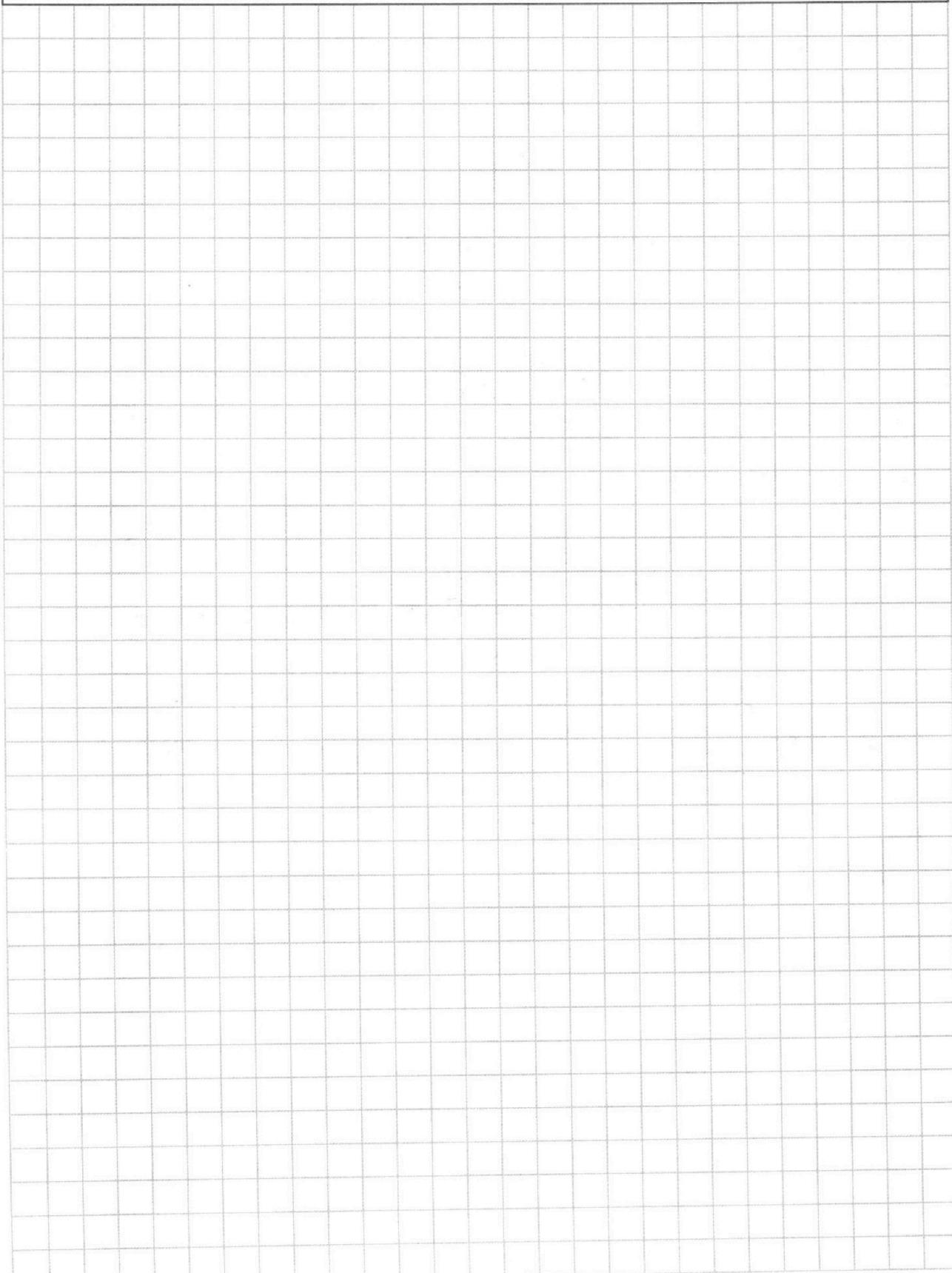
5

6

7

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                                   | 6                        | 7                        |

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y = -x^5 + ax$$

$$y = 2x$$

$$\begin{cases} -x^5 + ax = 2x \\ \sqrt[5]{a+2} = -2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^5 + ax = 2x \\ -x^5 + a = -2 \end{cases}$$

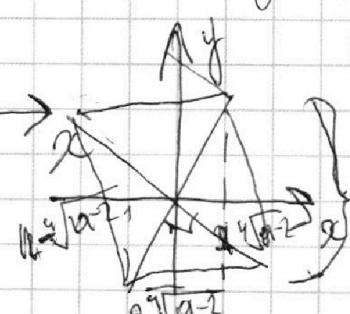
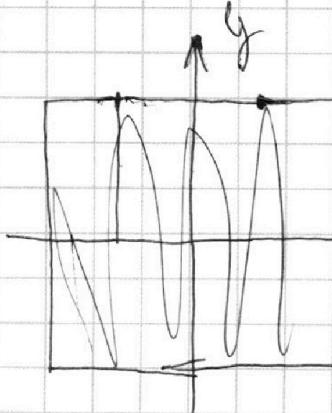
$$\begin{cases} a = 2+x^5 \\ x = \pm \sqrt[4]{a+2} \end{cases}$$

$$-x^5 + -x^5 + ax = 2x - 36$$

$$-x^5 + (a-2)x = 0$$

$$x(x^4 + a - 2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{но это невозможно для } x \neq 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{a-2} \Rightarrow \text{сторона квадрата } 2\sqrt[4]{a-2}$$



ПК все вершины квадрата лежат на графике  $-x^5 + ax$  и при этом одна из диагоналей лежит под  $y = 2x$ , а значит  $-x^5 + ax$  это прямая.

Но максимум можно сказать, что график дифференцируем будем лежать под  $-x^5 + ax$

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ f''(x) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -100 \\ 100 \\ \hline 6 \\ 40 \\ \hline 16 \\ 4 \\ \hline \end{array}$$

$$x = 0 \Rightarrow 2\sqrt[4]{a-2} \text{ диаметр } 2\sqrt[4]{a-2}$$

$$d = \frac{2\sqrt{25a-10}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{25a-10}}{2} = \frac{\sqrt{10a-40}}{2}$$