



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $5^{360} \cdot 7^{90}$?
3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 3) - x(11y - 34) + 32y - 101 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 25 раз больше площади треугольника DGF .
5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 2x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.
6. [5 баллов] Числа a , b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 19$, $XY = 36$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$|x^3-9|+|x^2-1| \leq |x^3-x^2-8|$ Обе части ≥ 0 , а значит
мы можем возвести их в квадрат

$$x^3-x^2-8 = x^3-9 - (x^2-1)$$

$$(x^3-9)^2 + (x^2-1)^2 + 2(x^2-1)(x^3-9) \leq (x^2-1)^2 + (x^3-9)^2 - 2(x^2-1)(x^3-9)$$

$$4(x^2-1)(x^3-9) \leq 0$$

$$(x^2-1)(x^3-9) \leq 0$$

$$(x^2-1)(x^3-9) \leq 0$$

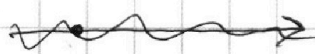
$$x^2-1=0$$

$$x^3-9=0$$

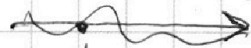
$$x^2=1$$

$$x=\pm 1$$

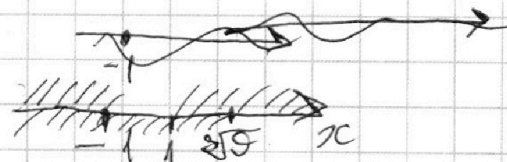
$$x=\sqrt[3]{9}$$



$$x \in (-\infty; 1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$$

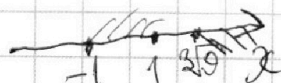


$$\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x^3-9 \leq 0 \end{cases}$$



$$x \in (-\infty; 1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$$

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; 1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$$



пересечение им

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a, b, c \in \mathbb{N}$ ~~натуральные~~
 $a \cdot b \cdot c = a^3 \cdot 9 \Rightarrow$ можно извлечь куб

$5^{360} \cdot 7^{90} = 5^{120} \cdot 7^{30} - a \cdot 9$. Отсюда
выходит тройка $5^{120}, 5^{120}, 7^{30}$
 $5^{120}, 5^{120}, 7^{60}$

$5^{120} \cdot 7^{30} - a \cdot 9$ - это гарантировано число $b = a \cdot 9$

~~$5^{120} \cdot 7^{30} \cdot 9 = 5^{120} \cdot 7^{30} \cdot 9$~~

$7^{30}, 5^{120} \cdot 7^{30}, 5^{240} \cdot 7^{30}$ - данная тройка

точно удовлетворяет ус-вию

$7^{1360}, 5^{120} \cdot 7^{30}, 7^{75} \cdot 5^{180}$

$7^2 \cdot 5^{120}, 7^{30} \cdot 5^{120}, 7^{58} \cdot 5^{120}$

$7 \cdot 5^{120}, 7^{30} \cdot 5^{120}, 7^{31} \cdot 5^{120}$

$7^{30} \cdot 5^{120}, 7^{30} \cdot 5^{120}, 7^{30} \cdot 5^{120}$

\Rightarrow Если проанализировать данные тройки

чисел, то можно сделать

вывод, что если существует

такая ~~троечка~~ тройка, или

все 7^{200} но это не годится

что как следствие не 0

и получаем $7^{30} \cdot 5^{120}$, а после это

Но беря какое-то число a , равное $7^k \cdot 5^n$, мы заменили $7^{30-n} \cdot 5^{120-k}$

и k -крат степеней

и k ~~не кат~~

не мало заменили $7^{30-n} \cdot 5^{120-k}$ на $7^{60-n} \cdot 5^{240-k}$

получаем $7^{30+30-n} \cdot 5^{120+120-k} = 7^{60-n} \cdot 5^{240-k}$

Далее и получаем $7^{60-n+1+30} \cdot 5^{240-k+k+120}$

$= 7^{91-2n} \cdot 5^{360}$ ~~и все степени чисел не могут быть ≤ 0 иначе будет противоречие с $a \in \mathbb{N}$~~

более 60 a^k не может быть больше 240 иначе

степени будут ≥ 360 и 360 соответственно \Rightarrow все тройки имеют вид $61 \cdot 240$, но надо учитывать, что степеней 61 и 240 (или) Ответ: 1701

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$$

$$\text{Или } x^2(y-3) - 11x(x-3) - 2 + 32(y-3) - 5 = 0$$

$$(y-3)(x^2 - 11x + 32) - x - 5 = 0$$

$$x^2 - 11x + 32 = 0 \quad \begin{cases} y=3 \\ x=-5 \end{cases}$$

$$D = 121 - 128 < 0$$

$$D = (11y-34)^2 - 4(y-3)(32y-101) = 121y^2 - 748y + 1156 - 128y^2 + 404y + 384y - 1212 = -56 - 7y^2 + 40y$$

$$-7y^2 - 56 + 40y = 0 \quad 7y^2 + 56 - 40y = 0$$

$$D = 1600 - 1568 = 32 \quad y = \frac{40 \pm \sqrt{32}}{14} = \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{7}$$

$$x = \frac{11y-34 \pm \sqrt{(11y-34)^2 - 4(y-3)(32y-101)}}{2y-6} \quad \text{из формулы Виета}$$

$y > \frac{20+2\sqrt{2}}{7}$ и второе число получается
 $y < \frac{20-2\sqrt{2}}{7}$ второе число, так что y нас остается только пара 3 и -5

Ответ: $(-5; 3)$



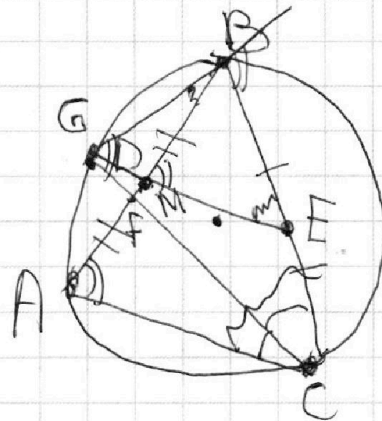
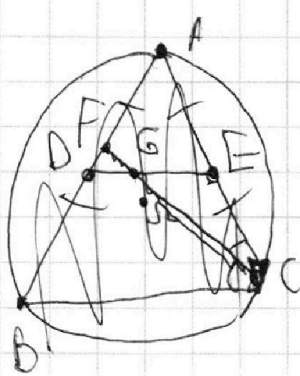
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{BCF} = 2.5 S_{GDF}$$

$$\angle DFE = \angle A$$

$$\angle GFM = \frac{\angle B - \angle C}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

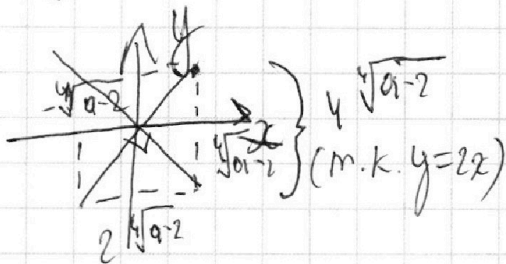


$$y = -x^5 + ax$$

$$2x = -x^5 + ax \quad x = \pm \sqrt[4]{a-2}$$

$$y = 2x$$

$$2x = -x^5 + ax \quad \text{Найдем диагональ из прямоугольного \(\Delta\)}$$



$$\text{диагональ} = \sqrt{4\sqrt[4]{a-2} + 16\sqrt[4]{a-2}} =$$

$$= 2\sqrt{5\sqrt[4]{a-2}} = 2\sqrt{5a-50}$$

$$\text{сторона} = \frac{\text{диагональ}}{\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt{2\sqrt{5a-50}} =$$

$$= \sqrt[4]{100a-200}$$

Можно сказать что вторая диагональ лежит на стороне

на стороне заданной $y = -\frac{1}{2}x$ т.к. при этом образуется прямая угол между диагоналями, что нам и нужно, ибо у нас квадрат

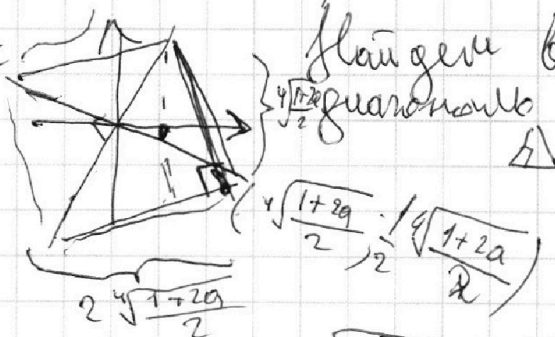
$$-\frac{1}{2}x = -x^5 + ax$$

$$-1 = -2x^4 + 2a$$

$$1 = 2x^4 - 2a$$

$$\frac{1+2a}{2} = x^4$$

$$x = \pm \sqrt[4]{\frac{1+2a}{2}}$$



$$\text{диагональ} = \sqrt{2\sqrt[4]{\frac{1+2a}{2}}} = \sqrt{2\sqrt[4]{\frac{1+2a}{2}}} =$$

$$= \sqrt[4]{25+50a}$$

$$\sqrt[4]{\frac{25+50a}{2}} = 2\sqrt[4]{\frac{25a-50}{121^2}}$$

$$\text{длина ст.} = \sqrt[4]{100 \cdot \frac{13}{6} \cdot 200} =$$

$$= \sqrt[4]{100 \cdot \frac{1}{6}} = \sqrt[4]{\frac{100}{6}} =$$

$$\frac{25+50a}{2} = 16(25a-50a) / 121$$

$$\frac{1+2a}{2} = 16a - 32a / 121$$

$$a = \frac{65}{30} = 2\frac{1}{6}$$

Ответ: $2\frac{1}{6}; \sqrt[4]{16(6)}$

$$1+2a = 32a - 64 \quad 30a = 65$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}$$

$$a = b - \frac{7}{b} + \frac{7}{c} = c - \frac{7ab - 7ac - 7bc - 7ac + 7ab}{abc}$$

$$b = c - \frac{7}{c} + \frac{7}{b} + \frac{7}{a} = c - \frac{7ab + 7ac - 7bc}{abc}$$

$$= \frac{7ab - 7ac - 7bc}{abc} = \frac{abc^2 - 7ab + 7ac + 7bc}{abc} = a$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|$

$|x^3 - x^2 - 8| = |x^3 - 9 - x^2 + 1|$

$|x^3 - y^3| = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

$x^3 + yx^2 + xy^2 - y^3 = x^2xy + xy^2 - y^2x - y^2xy^3$

$|x - 9| + |(x - 1)(x + 1)| \leq |(x - 2)(x^2 + 2x + 4) - x^4$

$x^3 - 9 < 0$ $(x - 1)(x + 1) < 0$

$x^3 < 9$ $x < x - 1 < 0$

$x < \sqrt[3]{9}$ $x > x < 1$

$2 < \sqrt[3]{9} < 2,1$

$y = -x^5 + ax$

$y = 2x$

$2x = -x^5 + ax$

$2 = -x^4 + a$

$|a| + |b| \leq |a - b|$

$2 + x^4 = a$

$1 - 1 \leq x \leq 1$ 2) $1 < x \leq 2$

$9 - x^3 + 1 - x^2 \leq 8 + x^2 - x^3$ $9 - x^3 + x^2 - 1 \leq 8 + x^2 - x^3$

$1 \leq 2x^2$

$x^2 \geq \frac{1}{2}$

$x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x \in [-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}; 1]$

$(x^3 - 9)^2 + (x^2 - 1) + 2(x^2 - 1)(x^3 - 9)$

$\leq (x^3 - 9)^2 + (x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1)(x^3 - 9)$

$4(x^2 - 1)(x^3 - 9) \leq 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$$

$$D = (11y-34)^2 - 4(y-3)(32y-101) =$$

$$= 121y^2 - 778y + 1156 - 128y^2 + 404y + 384y - 1212 =$$

$$= -7y^2 + 40y - 56$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 324 \\ \hline 648 \\ 102 \\ \hline 102 \\ 1156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 34 \\ \hline 68 \\ 102 \\ \hline 102 \\ 1156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 32 \\ \hline 64 \\ 102 \\ \hline 102 \\ 128 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 32 \\ \hline 64 \\ 102 \\ \hline 102 \\ 128 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 56 \\ \hline 112 \\ 102 \\ \hline 102 \\ 1568 \end{array}$$

$$-7y^2 + 40y - 56 = 0$$

$$7y^2 - 40y + 56 = 0$$

$$D = 1600 - 4 \cdot 392 = 1600 - 1568 = 32$$

$$-1568 = 32$$

$$y = \frac{40 \pm \sqrt{32}}{14}$$

$$= \frac{40 \pm 4\sqrt{2}}{14} = \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{7}$$

$$x = y - 11y + 34 = 34 - 10y = 34 - 10 \cdot \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{7}$$

$$x^2(y-3) - 11x(y-3) - x +$$

$$+ 32y - 32(y-3) - 5 = 0$$

$$(y-3)(x^2 - 11x + 32) - x - 5 = 0$$

$$x^2 - 11x + 32 = 0$$

$$(y-3)(x^2 - 11x + 32) - x - 5 = 0$$

$$D = 121 - 128 = -7 < 0$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$34 \cdot \frac{32}{11} = 2 \frac{10}{11}$$

$$\begin{array}{r} -3x^2 + 34x - 101 \\ 340 \quad | \quad 11 \\ -33 \quad | \quad 13 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 340 \\ -340 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \quad | \quad 11 \\ -22 \quad | \quad 30 \\ \hline 100 \quad | \quad 30 \\ -85 \quad | \quad 15 \\ \hline \end{array}$$

$$-3x^2 + 34x - 101 = 0$$

$$D = 1156 - 1212 = -56$$



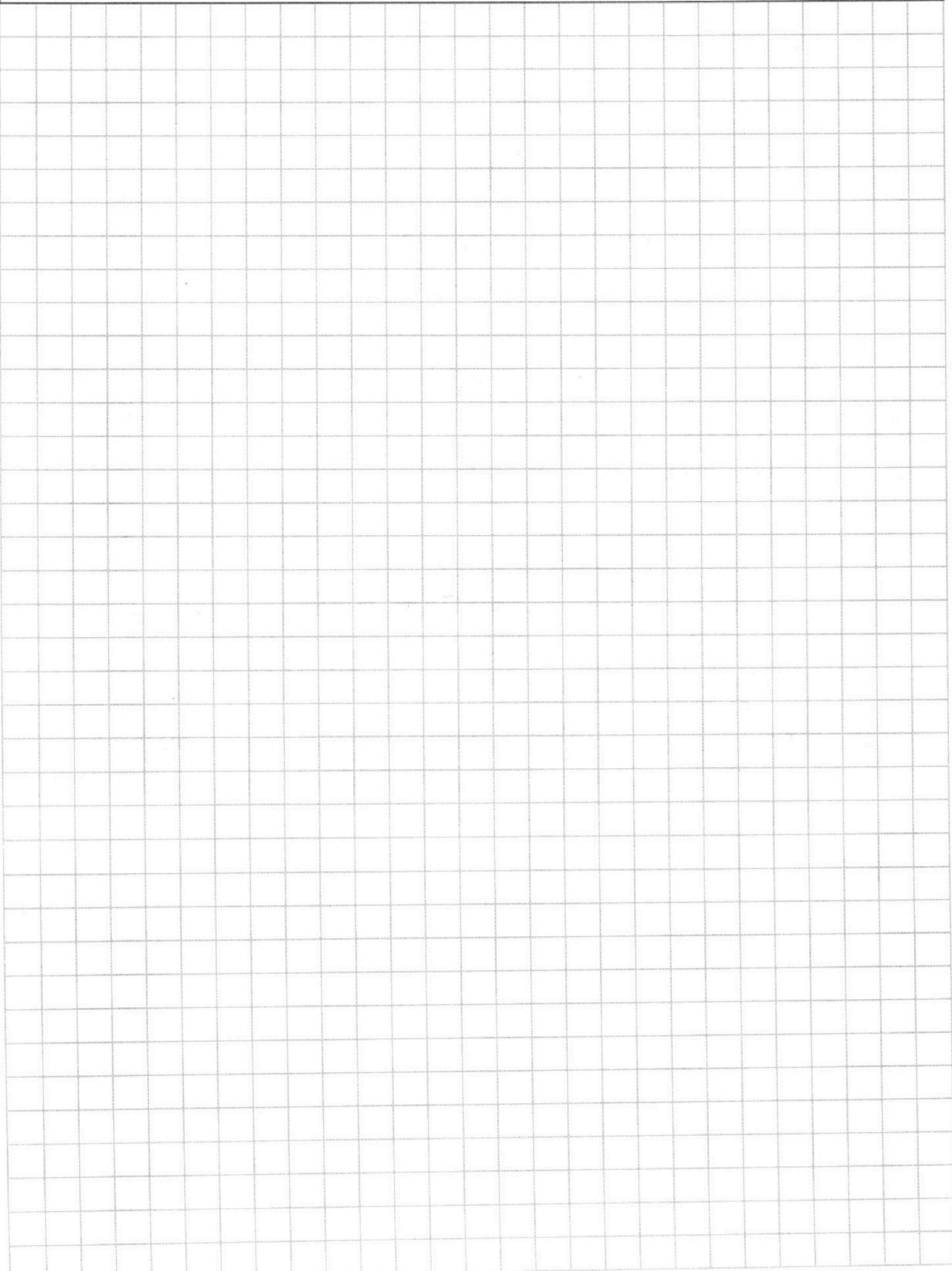
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = -x^5 + ax$$

$$y = 2x$$

$$\begin{cases} -x^5 + ax = 2x \\ -x^5 + ax = -2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^5 + ax = 2 \\ -x^5 + ax = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 + x^4 \\ a = -2 - x^4 \end{cases}$$

$$x = \pm \sqrt[4]{a-2}$$

$$-x^5 + (-x^5 + ax) = 2x$$

$$-2x^5 + (a-2)x = 0$$

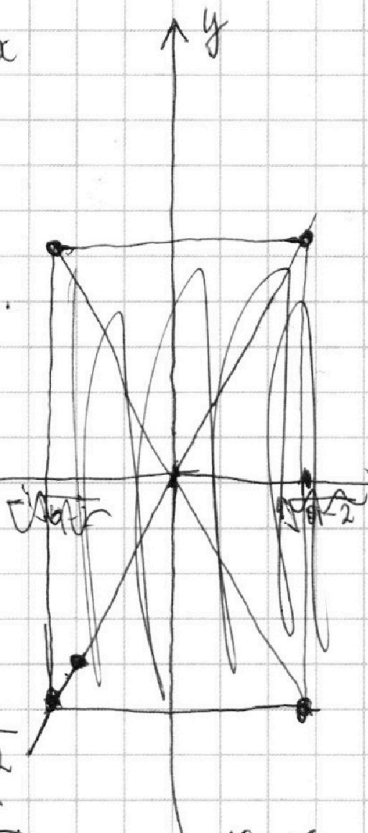
$$x(x^4 + a - 2) = 0$$

$x = 0$, но это невозможно или $x = \pm \sqrt[4]{a-2} \Rightarrow$ длина стороны

$$-2x^4 + a - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{a-2} \Rightarrow$$

длина стороны квадрата $2\sqrt[4]{a-2}$

$$d = \frac{2\sqrt[4]{25a-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{100a-40}$$



т.к. все вершины квадрата лежат на графике $-x^5 + ax$ и при этом одна из диагоналей лежит на $y = 2x$, а значит оно пересекет $-x^5 + ax$.

Поэтому можно сказать, что длина диагонали будет лежать на $y = 2x$

$$\begin{cases} 2x \\ -2x^4 + a - 2 \end{cases}$$

