МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12

1. [4 балла] Решите неравенство

$$\left|x^3-9\right|+\left|x^2-1\right| \leqslant \left|x^3-x^2-8\right|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a;b;c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $5^{360}\cdot 7^{90}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y-3)-x(11y-34)+32y-101=0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC. Прямые ED и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что площадь треугольника BCF в 25 раз больше площади треугольника DGF.

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y=-x^5+ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y=2x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a, b и c не все равны между собой, и при этом

$$a+\frac{7}{b}=b+\frac{7}{c}=c+\frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения abc.

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC $(AB=BC)$ вписан в окружность ω, а на дуге AC, не содержащей точку B, взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F. На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX=CF$ и $CY=AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF=19$, $XY=36$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 1

$|x^3-9|+|x^2-1| \le |x^3-x^2-8|$

$|x^3-9|+|x^2-1| \le |x^3-9-(x^2-1)|$

Если $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$, то $x^2 \ge 1$ и $x^3 \le 9$,

зн. $x^3-9 \le 0$ и $x^2-1 \ge 0$, т. е. $x^3-9-(x^2-1) \le 0$, зн.
$|x^3-9| = 9-x^3$, $|x^2-1| = x^2-1$, $|x^3-9-(x^2-1)| = x^2-1-(x^3-9)$.
$9-x^3+x^2-1 \le x^2-1-(x^3-9)$
$9-x^3 \le 9-x^3$
$9 \le 9$ — верно, зн. все числа из промежутка $(-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$ удовлетворяют данному неравенству.

Если $x \in (-1; 1)$, то $x^3 < 1$ и $x^2 < 1$, $-x^2 \le 0$, зн.
$|x^3-9| = 9-x^3$, $|x^2-1| = 1-x^2$, $x^3-x^2-8 < 0$, зн. $|x^3-x^2-8| = 8+x^2-x^3$.
$9\cancel{-x^3}+1-x^2 \le 8+x^2\cancel{-x^3}$
$2x^2 \ge 2$
$x^2 \ge 1$, но $x^2 < 1$ — противоречие, зн. все числа из промежутка $(-1; 1)$ не удовлетворяют данному неравенству.

Если $x \in (\sqrt[3]{9}; +\infty)$, то $x^3 > 9$ и $x^2 > 1$, зн.
$|x^3-9| = x^3-9$, $|x^2-1| = x^2-1$, $|x^3-x^2-8| = x^3-x^2-8$ или
$|x^3-x^2-8| = 8+x^2-x^3$. Разберём оба случая:

$\cancel{x^3}-9+x^2-1 \le \cancel{x^3}-x^2-8$
$2x^2 \le 2$
$x^2 \le 1$, но $x^2 > 1$ — противоречие.

$x^3-9+\cancel{x^2}-1 \le 8+\cancel{x^2}-x^3$
$2x^3 \le 18$
$x^3 \le 9$, но $x^3 > 9$ — противоречие.

Таким образом, все числа из промежутка $(\sqrt[3]{9}; +\infty)$ не удовлетворяют данному неравенству, зн. решение данного неравенства — промежуток $(-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$.

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2

Если a, b и c – натуральные числа, то $\frac{b}{a}=\frac{c}{b} \Leftrightarrow b^2=ac$, т. е. условие, что числа a, b и c в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию, равносильно равенству $b^2=ac$, но тогда $b^3=abc=5^{360}\cdot 7^{90} \Rightarrow b=5^{120}\cdot 7^{30}$, зн. $ac=5^{240}\cdot 7^{60}$. $ac \vdots a$, зн. $a=5^k\cdot 7^n$, где $k\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}$, $0\leq k\leq 240$ и $0\leq n\leq 60$, $c=5^{240-k}\cdot 7^{60-n}$. Таким образом, каждому варианту значения a соответствует ровно одна удовлетворяющая условию задачи тройка чисел $(a; b; c)$, при этом возможны 241 вариант значения k и 61 вариант значения n, т. е. всего $241\cdot 61=14701$ вариант значения a, а значит, 14701 тройка чисел $(a; b; c)$, удовлетворяющая условию задачи (если знаменатель геометрической прогрессии не может равняться 1, то $a=5^{120}\cdot 7^{30}$ не подходит, и указанных троек на 1 меньше).

$$\begin{array}{r} \times\ 241 \\ 61 \\ \hline 241 \\ +\ 1446 \\ \hline 14701 \end{array}$$

Ответ: 14701.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 3

$x^2(y-3)-x(11y-34)+32y-101=0$

Если $y=3$, то

$x^2\cdot(3-3)-x(11\cdot3-34)+32\cdot3-101=0$

$0x^2-x\cdot(-1)-5=0$

$x-5=0$

$\underline{x=5}$, зн. пара чисел $(5;3)$ является решением данного уравнения.

Если $y\neq3$, то $y-3\neq0$. Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно переменной x. Оно имеет решения, если $D\geq0$, т. е.

$(11y-34)^2-4(y-3)(32y-101)\geq0$

$121y^2-748y+1156-4(32y^2-101y-96y+303)\geq0$

$121y^2-748y+1156-128y^2+788y-1212\geq0$

$-7y^2+40y-56\geq0$

$7y^2-40y+56\leq0$

$f(x)=7x^2-40x+56$, график функции – парабола, ветви направлены вверх.

$f(x)=0$

$7x^2-40x+56=0$

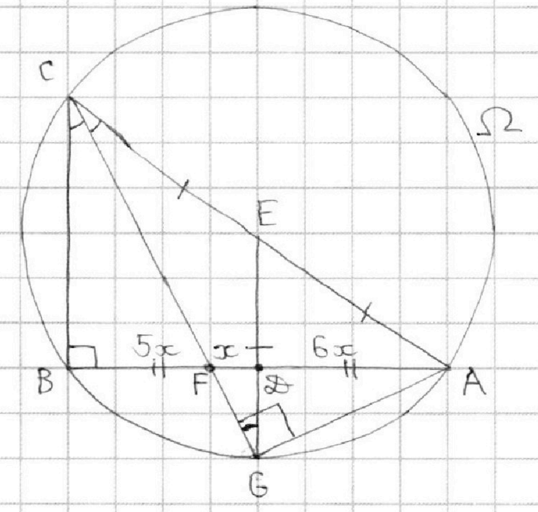
$\frac{D}{4}=(-20)^2-7\cdot56=400-392=8$, 2 корня

$x_{1,2}=\frac{20\pm2\sqrt{2}}{7}$, зн. $f(x)\leq0$ при $\frac{20-2\sqrt{2}}{7}\leq x\leq\frac{20+2\sqrt{2}}{7}$,

т. е. $7y^2-40y+56\leq0$ при $\frac{20-2\sqrt{2}}{7}\leq y\leq\frac{20+2\sqrt{2}}{7}$, но если $y\in\mathbb{Z}$ и $y\neq3$, то $y\leq2=\frac{14}{7}=\frac{20-6}{7}<\frac{20-2\sqrt{2}}{7}$ или $y\geq4=\frac{28}{7}=\frac{20+8}{7}>\frac{20+2\sqrt{2}}{7}$, т. е. $\cancel{7x^2-4}$ $7y^2-40y+56>0$, зн. данное уравнение не имеет никаких решений в целых числах кроме пары $(5;3)$.

Ответ: $(5;3)$.

№ 4



D – середина AB, E – середина AC, зн. $AD=BD$, $AE=CE=\frac{1}{2}AC$, DE – средняя линия $\triangle ABC$, зн. $DE \parallel BC$.

$\triangle BCF \sim \triangle DGF$ по I признаку ($\angle BFC=\angle DFG$ как вертикальные, $\angle BCF=\angle DGF$ как накрест лежащие при $BC \parallel DE$ и секущей CG), зн. $\frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle DGF}}=\left(\frac{BF}{DF}\right)^2$.

$S_{\triangle BCF}=25S_{\triangle DGF}$, зн. $BF=5DF$. Пусть $DF=x$, тогда $BF=5x$, $AF=AD+DF=BD+DF=BF+DF+DF=5x+x+x=7x$, зн. $\cancel{\frac{BF}{DF}}$ $\frac{BF}{AF}=\frac{5}{7}$.

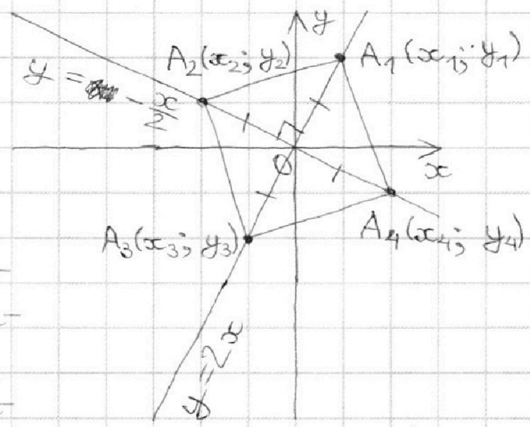
CF – биссектриса $\triangle ABC$, зн. $\angle ECF=\angle BCF=\angle DGF$, зн. $\triangle CEG$ равнобедренный, $GE=CE=\frac{1}{2}AC$, зн. $\triangle ACG$ прямоугольный, $\angle AGC=90°$.

$\angle ABC=\angle AGC=90°$ как вписанные углы, опирающиеся на $\smile AC$, зн. $\triangle ABC$ прямоугольный, AC – гипотенуза.

По свойству биссектрисы $\frac{BC}{AC}=\frac{BF}{AF}=\frac{5}{7}$, зн. $\angle BAC=\arcsin\frac{BC}{AC}=\arcsin\frac{5}{7}$, $\angle ACB=\arccos\frac{BC}{AC}=\arccos\frac{5}{7}$.

Ответ: $\angle ABC=90°$, $\angle BAC=\arcsin\frac{5}{7}$, $\angle ACB=\arccos\frac{5}{7}$.

№ 5



Обозначим вершины квадрата, лежащие в $\overline{\text{I}}$, $\overline{\text{II}}$, $\overline{\text{III}}$ и $\overline{\text{IV}}$ координатных четвертях, как $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$, $A_3(x_3;\ y_3)$ и $A_4(x_4;\ y_4)$ соответственно. Все они равноудалены от начала координат, диагонали квадрата перпендикулярны, зн. при повороте на 90° против часовой стрелки относительно т. $O(0;0)$ A_1 переходит в A_2, A_2 – в A_3, A_3 – в A_4, A_4 – в A_1, зн. $y_1=x_4$, $x_1=-y_4$.

Точки A_1 и A_3 лежат на прямой $y=2x$, т. к. она проходит через $\overline{\text{I}}$ и $\overline{\text{III}}$ четверти, зн.
$y_1=2x_1$, но $y_1=-x_1^5+ax_1$, зн.
$-x_1^5+ax_1=2x_1$
$x_1^5-ax_1+2x_1=0$
$x_1(x_1^4-a+2)=0$, но $x_1\neq 0$, зн. $x_1^4-a+2=0$, $x_1^4=a-2$.

$y_1=2x_1$
$x_4=-2y_4$
$y_4=-\frac{1}{2}x_4$, но $y_4=-x_4^5+ax_4$, зн.
$-x_4^5+ax_4=-\frac{1}{2}x_4$
$x_4^5-ax_4-\frac{1}{2}x_4=0$
$x_4(x_4^4-a-\frac{1}{2})=0$, но $x_4\neq 0$, зн. $x_4^4-a-\frac{1}{2}=0$, $x_4^4=a+\frac{1}{2}$.

$x_4^4=y_1^4=(2x_1)^4=16x_1^4$, зн. $a+\frac{1}{2}=16(a-2)$

$a+\frac{1}{2}=16a-32$
$15a=32\frac{1}{2}$
$15a=\frac{65}{2}$
$\underline{a=\frac{13}{6}}$, зн. $x_1^4=a-2=\frac{13}{6}-2=\frac{1}{6}$, $x_1^2=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $y_1^2=(2x_1)^2=$
$=4x_1^2=\frac{4}{\sqrt{6}}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$OA_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{4}{\sqrt{6}}}=\sqrt{\frac{5}{\sqrt{6}}}$, $A_1A_4=OA_1\cdot\sqrt{2}=$
$=\sqrt{\frac{10}{\sqrt{6}}}=\sqrt{\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\sqrt[4]{\frac{50}{3}}$.

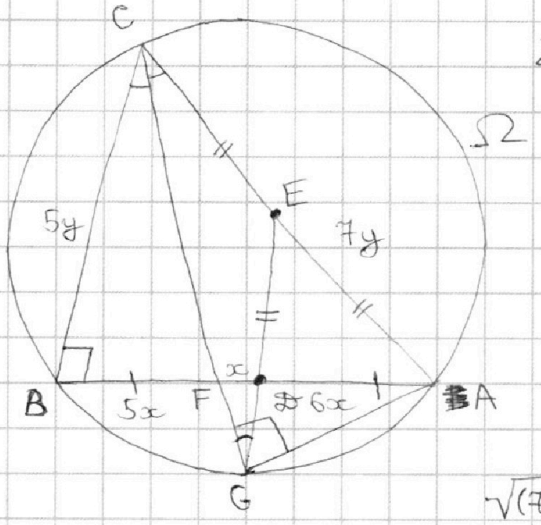
Ответ: $a=\frac{13}{6}$, сторона квадрата равна $\sqrt[4]{\frac{50}{3}}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

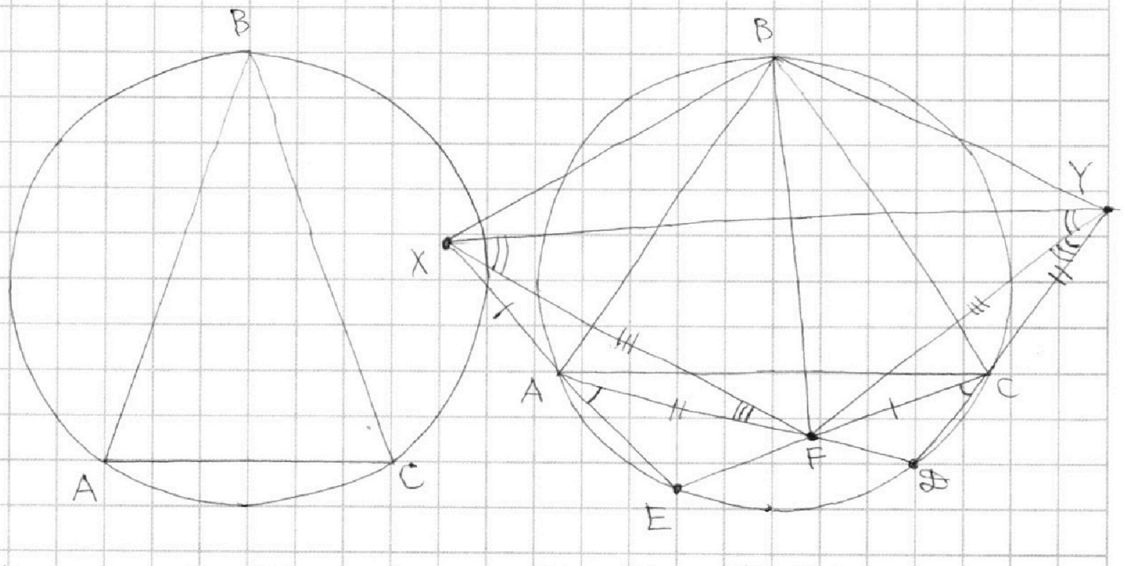
МФТИ



$240 \cdot 60 = 14400$

$\sqrt{(7y)^2-(5y)^2}=\sqrt{24y^2}=2\sqrt{6}\,y$

$k=240-x,\quad a=-120+x,\quad c=5^{x}\cdot\ldots$



$k=240+x,\quad a=-120-x,$
$c=5^{-x}\cdot\ldots$

$BF=19,\quad XY=36$

$a \le b \le c$

$a=5^{k}\cdot 7^{n},\quad q=5^{\alpha}\cdot 7^{\beta}=5^{120-k}\cdot 7^{120-n}$

$abc=a^3q^3 \Rightarrow aq=5^{120}\cdot 7^{30}=5^{k+\alpha}\cdot 7^{n+\beta}$

$k>240 \Rightarrow \alpha<120$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$|x^3-9|+|x^2-1| \leq |x^3-x^2-8|$

$x^3-9=0 \Rightarrow x^3=9 \Rightarrow x=\sqrt[3]{3^2}=\sqrt[3]{9}=3^{\frac{2}{3}}$

$x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$

$x^3-x^2-8=0$

$x<-1: \quad x^3<9, \quad x^3-x^2-8<0$

$-1 \leq x \leq 1: \quad x^3<9, \quad x^3-x^2<8$

$x^2(y-3)+x(34-11y)+32y-101=0$

$(11y-34)^2-4(y-3)(32y-101) \geq 0$

$121y^2-748y+1156-4(32y^2-197y+303) \geq 0$

$121y^2-748y+1156-128y^2+788y-1212 \geq 0$

$-7y^2+40y-56 \geq 0$

$\Leftrightarrow$

$7y^2-40y+56 \leq 0$

$\frac{D}{4}=400-7\cdot 56=400-392=8$

$y_{1,2}=\frac{20\pm 2\sqrt{2}}{7}$

$\frac{20+2\sqrt{2}}{7}<\frac{28}{7}=4, \quad \frac{20-2\sqrt{2}}{7}>\frac{14}{7}=2 \Rightarrow \underline{y=3}$

$-x\cdot(-1)+96-101=0$

$\underline{x=5}$ $\quad (5;\ 3)$

$$\begin{array}{r} \times\ 34 \\ 34 \\ \hline 136 \\ +\ 102\ \ \\ \hline 1156 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$x^3 > 9$ и $x^2 < 1$, ~~$-1 \le x \le 1$~~

$x^3 - x^2 - 8 = (x^3-9) - (x^2-1)$

$x^3 \geq 9$ и $x^2 \leq 1$ – реш. нет

$x^3 \le 9$ и $x \geq 1$ – $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9})$ $+$

$-1 < x < 1$: $9 - \cancel{x^3} + 1 - x^2 \le 8 - \cancel{x^3} + x^2$

$2x^2 \geq 2$

$x^2 \geq 1$ $-$

$9 - x^3 + 1 - \cancel{x^2} \le x^3 - \cancel{x^2} - 8$

$2x^3 \geq 2$

$x \geq 1$ $-$

$x^3 > 9$: $\cancel{x^3} - 9 + x^2 - 1 \le 8\, \cancel{x^3} - x^2 - 8$

$2x^2 \le 2$

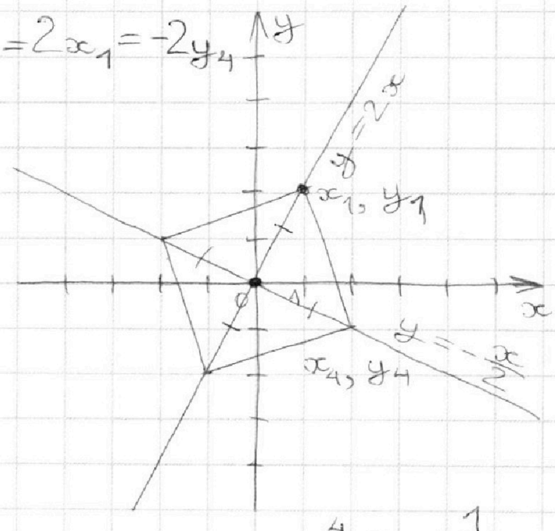
$-1 \le x \le 1$

$x^3 - 9 + \cancel{x^2} - 1 \le 8 - x^3 + \cancel{x^2}$

$2x^3 \le 18$

$x^3 \le 9$

$y_1 = x_4 = 2x_1 = -2y_4$



$x(x^4 - a + 2) = 0$ $x^4 = a - 2$

$-x^5 + ax = 2x$

$x^5 - ax = -2x$

$-x^5 + ax = -\frac{x}{2}$

$x(x^4 - a - \frac{1}{2}) = 0$

$x^4 = a + \frac{1}{2}$

$y^4 = a + \frac{1}{2}$ $a = \frac{13}{6}$

$x_4^4 = 16x_1^4$

$16(a-2) = a + \frac{1}{2}$ $15a = 32\frac{1}{2} = \frac{65}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!