



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Решите уравнение

$$3 \operatorname{tg} 2x + 1 = \operatorname{tg} \left(x + \frac{3\pi}{4} \right).$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{150}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2 x - (x - 1) \ln(2x) + (\ln 2) \ln x \geq 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -4x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC . Лучи DE и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $\frac{CF}{DF} = \frac{1}{2}$.

6. [5 баллов] Числа x , y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 + \frac{7}{z^3} = z^3 + \frac{7}{x^3}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения $x y z$.

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{5}$, $AD = DC = \sqrt{2}$, $AC = 2$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2 + \sqrt{5}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB , SBC и ребра SD .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1 Распишем $\operatorname{tg}(2x) = \operatorname{tg}(x+x)$ и $\operatorname{tg}(x + \frac{3\pi}{4})$ как сумму в tg :

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin(x+x)}{\cos(x+x)} = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}; \quad \operatorname{tg}(x + \frac{3\pi}{4}) = \frac{\sin(x + \frac{3\pi}{4})}{\cos(x + \frac{3\pi}{4})} = \frac{\sin x \cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} \cos x}{\cos x \cos \frac{3\pi}{4} - \sin x \sin \frac{3\pi}{4}}$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x}{-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x}$$

Подставляем это в исходное уравнение:

$$3 \operatorname{tg} 2x + 1 = \operatorname{tg}(x + \frac{3\pi}{4}) \Rightarrow \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x}{-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x} = \frac{2\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)}{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)}$$

$$\Rightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x)(\sin x - \cos x) = (2\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x)(\cos x + \sin x)$$

Применяем формулы в tg — не 0 (указано в условии), а $\cos^2 x - \sin^2 x$ — разность квадратов.

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)(\sin x - \cos x) = (\cos x + \sin x)(2\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$\Rightarrow 1) \cos x + \sin x \neq 0 \Rightarrow \cos x = -\sin x \Rightarrow x_1 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k; x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Иногда сократили и раскрыли скобки:

$$(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) = 2\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x \Rightarrow$$

$$2\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin x \cos x \Rightarrow 4\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos x(2\sin x + \cos x) = 0. \text{ Какая-то ошибка — с.}$$

$$2) 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ и } x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3) 2\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2} \text{ (т.к. } \cos x \neq 0 \text{ рассмотрим иначе)}$$

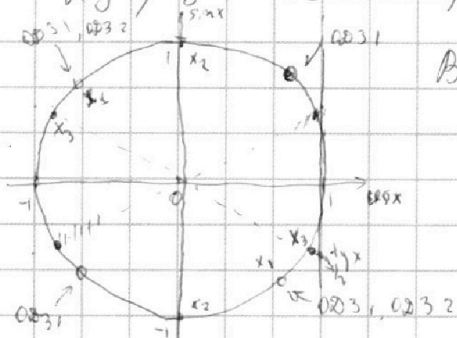
Проверим ОДЗ для tg :

$$1) \operatorname{tg} 2x \text{ — существует} \Rightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ и } 2x \neq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \text{ Тогда } x \neq \frac{\pi}{4} + \pi k \text{ и } x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \operatorname{tg}(x + \frac{3\pi}{4}) \text{ — существует} \Rightarrow x + \frac{3\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ и } x + \frac{3\pi}{4} \neq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \text{ и } x \neq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Изобразим всё на триг. окружности.



Видно, что остались только x_3 , где $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$

$$\text{Ответ: } x = \operatorname{arctg}(-\frac{1}{2}) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

- №2) Рассмотрим 3 варианта не имея геом. прогрессии ($a=t, b=q^2t, c=q^2t$):
1. $a=b=c$ (т.е. прогр. с $q=1$), тогда $abc=2^{150} \cdot 3^{150} \Rightarrow a=b=c=2^{50} \cdot 3^{50}$ - т.е. один вариант.
 2. $q=-1$ ~~тогда $a=b=c$ (т.е. прогрессия)~~
 $a=-b=c \Rightarrow a \cdot b \cdot c = a \cdot (-a) \cdot a = -a^3 = 2^{150} \cdot 3^{150} \Rightarrow a = -2^{50} \cdot 3^{50}, b = 2^{50} \cdot 3^{50}, c = -2^{50} \cdot 3^{50}$ - т.е. еще 1 вариант.
 3. ~~МНЧЧЧ~~ $(b=q^2t, c=t \Rightarrow a > b > c)$ обозначим $b=x$, тогда $a=\frac{x}{q}, c=xq \Rightarrow$
 $\Rightarrow abc = \frac{x}{q} \cdot x \cdot (xq) = x^3 = 2^{150} \cdot 3^{150} \Rightarrow b=x=2^{50} \cdot 3^{50}$, ~~тогда чтобы a получилось целым, нужно выбрать q так, чтобы $2^{50} \cdot 3^{50}$ делилось на это q . Показано, что все такие $q=2^d \cdot 3^p$, где $d, p \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq d, p \leq 50$. Значит всего получится 51^2 вариантов, но при $d=p=0$ имеем $q=1$, что мы уже рассматривали. Значит подходит $51^2 - 1$ вариантов на q . Очевидно, что при всех них все числа целые и имеют нужное произведение.~~
~~Можно заметить, что если поменять местами $(a, b, c) \rightarrow (c, b, a)$, то мы получим в предыдущий вариант, значит здесь тоже чисел $51^2 - 1$ вариант на q .~~
 4. $q < -1 \Rightarrow a < b < c$ ~~аналогично обозначениям в 3, а $q=2^d \cdot 3^p$ тогда при~~
~~если изменить последовательность $(a, b, c) \rightarrow (c, b, a)$, то мы получим в предыдущий вариант, значит здесь тоже чисел $51^2 - 1$ вариант на q .~~
 5. $q < -1$ обозначим $b=x, a=\frac{x}{q}, c=xq \Rightarrow abc = x^3 = 2^{150} \cdot 3^{150} \Rightarrow b=x=2^{50} \cdot 3^{50}$
 Тогда a и c - отрицательные целые $\Rightarrow$ какому такому набору (a, b, c) можно сопоставить $(-a, b, -c)$, где уже $q > 1$ и тогда мы получили в 3 уже подходит $51^2 - 1$ вариантов q .
 6. $-1 < q < 0$ аналогично сопоставим $(a, b, c) \leftrightarrow (-a, b, -c)$ и получим 6 вариант. А, где тоже $51^2 - 1$ вариантов q .
- Мы рассмотрели все варианты q , сомневаюсь, что других нет (осталось только $q=0$, но при нем числа (хотя бы 1) отсутствуют и их произведение $-c$). Все варианты, очевидно, различны.

Ответ: $2 + 4(51^2 - 1)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6 Рассмотрим ~~систему~~ ^{систему} ~~первое~~ ^{первое} ~~уравнение~~ ^{уравнение} и ~~второе~~ ^{второе} ~~уравнение~~ ^{уравнение} в
них z^3 : $\begin{cases} x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 + \frac{7}{z^3} \\ x^3 + \frac{7}{y^3} = z^3 + \frac{7}{x^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{z^3} = \frac{x^3}{y^3} + \frac{1}{y^3} - \frac{y^3}{z^3} = \frac{x^3 y^3 + 7 - y^6}{7 y^3} \\ \frac{1}{x^3} = \frac{y^3}{z^3} + \frac{1}{z^3} - \frac{z^3}{x^3} = \frac{y^3 z^3 + 7 - z^6}{7 z^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{7}{x^3 + y^3 - \frac{7}{y^3}} \\ x = \frac{7}{y^3 + z^3 - \frac{7}{z^3}} \end{cases}$
Приравняв, имеем: $\frac{7}{x^3} + y^3 - \frac{7}{y^3} = x^3 + \frac{7}{y^3} - \frac{7}{x^3} \Rightarrow (y^3 - x^3) + 2 \cdot \frac{1}{x^3 y^3} = 0$. Решая для этих x, y ,
имеем $y = x$ или $y = -\sqrt[3]{14}/x$. Попробуем это можно изобразить
взять другие уравнения (выразить x или y) и получится аналогичные
уравнения (т.к. все симметрично). Тогда:
 $\begin{cases} y = x \\ y = -\sqrt[3]{14}/x \end{cases}$ и $\begin{cases} y = z \\ y = -\sqrt[3]{14}/z \end{cases}$ и $\begin{cases} z = x \\ z = -\sqrt[3]{14}/x \end{cases}$ Рассмотрим все варианты, возьмем
 $x = t$:
• В первом $y = x \Rightarrow z \neq y \Rightarrow \begin{cases} z = -\sqrt[3]{14}/z \\ z = x \end{cases} \Rightarrow z = -\sqrt[3]{14}/t \Rightarrow (x, y, z) = (t, t, -\sqrt[3]{14}/t)$
• В первом $y = -\sqrt[3]{14}/x$, во втором $y = z \Rightarrow z = -\sqrt[3]{14}/x \Rightarrow (x, y, z) = (t, -\sqrt[3]{14}/t, -\sqrt[3]{14}/t)$
• В первом $y = -\sqrt[3]{14}/x$, во втором $y = -\sqrt[3]{14}/z \Rightarrow z = x \Rightarrow (x, y, z) = (t, -\sqrt[3]{14}/t, t)$.
Проверим. Попробуем, что теперь все проверим:
1) $(x, y, z) = (t, t, -\sqrt[3]{14}/t) \Rightarrow t^3 + \frac{7}{t^3} = t^3 - \frac{7t^3}{14} = -\frac{14}{t^3} + \frac{7}{t^3} \Rightarrow \frac{7}{t^3} = -\frac{14}{t^3} \Rightarrow -t^6 = 14$ - такого не бывает.
2) $(x, y, z) = (t, -\sqrt[3]{14}/t, -\sqrt[3]{14}/t) \Rightarrow t^3 + \frac{7}{14} = -\frac{14}{t^3} + \frac{7t^3}{14} = -\frac{14}{t^3} + \frac{7}{t^3} \Rightarrow t^3 = -\frac{14}{t^3}$
 $\Rightarrow t^6 = -14$ - такого не бывает.
3) $(x, y, z) = (t, -\sqrt[3]{14}/t, t) \Rightarrow t^3 - \frac{7t^3}{14} = -\frac{14}{t^3} + \frac{7}{t^3} = t^3 + \frac{7}{t^3} \Rightarrow -\frac{14}{t^3} = t^3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow t^6 = -14$ - такого не бывает.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

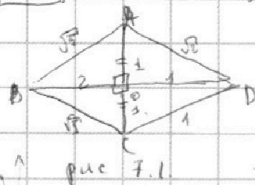
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7



Рассмотрим основание $ABCD$. $AB=BC \Rightarrow B$ — на сепере к AC , $AD=DC \Rightarrow D$ на сепере к $AC \Rightarrow$ если $AC \perp BD$ и в точке пересечения O : $AO=OC=\frac{AC}{2}=1$. Основаниями получились прямоугольные треугольники $\Rightarrow BO^2=AB^2-AO^2=BC^2-OC^2=5-1=4=2^2 \Rightarrow BO=2$; $OD^2=AD^2-AO^2=DC^2-OC^2=2-1=1=1^2$. Введем координаты так, что $O(0;0;0)$.

$D(1;0;0)$, $B(-2;0;0)$, $C(0;-1;0)$, $A(0;1;0)$, $S(1;0;h)$ (S над D , т.к. $SD \perp ABCD$ по условию). Из координат, числен $SA^2=1^2+1^2+h^2=2+h^2$;

$SB^2=3^2+0^2+h^2=9+h^2 \Rightarrow SA+SB=2+\sqrt{5}=\sqrt{2+h^2}+\sqrt{9+h^2}$. Возведем в квадрат:

$4+5+4\sqrt{5}=2+h^2+9+h^2+2\sqrt{(2+h^2)(9+h^2)} \Rightarrow 4\sqrt{5}=h^2+7+2\sqrt{(2+h^2)(9+h^2)} \Rightarrow \sqrt{(2+h^2)(9+h^2)}=2\sqrt{5}-1-h^2$

Возведем еще раз: $(2+h^2)(9+h^2)=20+1+h^4-4\sqrt{5}h^2-2h^2 \Rightarrow h^4+h^2(2-4\sqrt{5})+(21-4\sqrt{5})=h^4+11h^2+18 \Rightarrow h^2(2-4\sqrt{5}-11)=(4\sqrt{5}-3) \Rightarrow h^2=\frac{4\sqrt{5}-3}{-4\sqrt{5}-9}$. В итоге,

что получается $h^2 < 0 \Rightarrow$ картинка выглядит не так, а B и D по одну сторону от AC . Тогда правильный рисунок — 7.2.

Пусть $D(0;0;0)$, $A(1;1;0)$, $C(1;-1;0)$, $B(-1;0;0)$, $S(0;0;h) \Rightarrow SA^2=h^2+2$, $SB^2=h^2+1 \Rightarrow 2+\sqrt{5}=\sqrt{2+h^2}+\sqrt{1+h^2}$. Возведем

еще раз, что такое h всего одно, а $h=\sqrt{3}$ — подходит.

Тогда: S — площадь $ABCD$: $2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1) = 1$, в $SABCD$ $h=\sqrt{3} \Rightarrow$ объем $SABCD$: $1 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Пусть R — центр шара из пункта 6. Тогда очевидно, что

пусть $R(R_x, R_y, R_z)$, но نکته, что $|R_x|=r$, где r — радиус шара (из касания SD и $|R_z|=r$ — из касания $ABCD$, а $R_y=0$, т.к. картинка сим. отн. BDS

Тогда имеем $R(-r, 0, r)$, но нужно учесть касание SAD и SBC . Тогда

используем формулу касания шара к плоскости: $\frac{|R_x - R_x'|}{\sqrt{1+1+1}} = r$ (где R_x' — проекция центра шара на плоскость SAD).

Рассмотрим пирамиды $BASR$, $BCSR$, $BA\&SR$ и $SADR$ и $SC\&R$. Показано, что высоты от R на BA , BC и BD равны, а высоты на SA и SC получены по $r/\sqrt{2}$ (из-за того, что они лежат в сечении по $r=r$ и отн. $ARDH$ — р/б прилож. с тл. r). Считаем площади

граней: BAS — $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$; $B\&S$ — $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$; SAB и SCB по рис 7.4: $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$. Запишем уравнение:

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r \cdot 2 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} + \frac{r \cdot 2 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} + \frac{r \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} + \frac{r \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} + \frac{r \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} + \frac{r \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{2}{3}r + \frac{2}{3}r + \frac{1}{3}r + \frac{1}{3}r + \frac{1}{3}r + \frac{1}{3}r$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = r \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \Rightarrow r = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{5}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1/\sqrt{3}}{5/\sqrt{3} + 1/\sqrt{3}} = \frac{1/\sqrt{3}}{6/\sqrt{3}} = \frac{1}{6}$

Ответ: а) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ б) $\frac{\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}$

Рис 7.3: A 3D diagram showing a sphere of radius r centered at R(-r, 0, r) tangent to the plane SAD and the plane SBC. The sphere is also tangent to the base plane ABCD at the origin D(0,0,0). The height of the sphere from the base is r.

Рис 7.4: A 2D diagram showing the base of the pyramid ABCD in the xy-plane. The vertices are A(0,1,0), B(-1,0,0), C(1,-1,0), and D(0,0,0). The side length of the rhombus is 2. The area of the base is 1.

Рис 7.5: A 3D diagram showing the pyramid BASR. The base is the triangle BAS in the xy-plane. The apex is R(-r, 0, r). The height of the pyramid from R to the base BAS is r.

Рис 7.6: A 3D diagram showing the pyramid BCSR. The base is the triangle BCS in the xy-plane. The apex is R(-r, 0, r). The height of the pyramid from R to the base BCS is r.

Рис 7.7: A 3D diagram showing the pyramid SADR. The base is the triangle SAD in the xy-plane. The apex is R(-r, 0, r). The height of the pyramid from R to the base SAD is r.

Рис 7.8: A 3D diagram showing the pyramid SC\&R. The base is the triangle SC\& in the xy-plane. The apex is R(-r, 0, r). The height of the pyramid from R to the base SC\& is r.

Рис 7.9: A 3D diagram showing the pyramid BASR. The base is the triangle BAS in the xy-plane. The apex is R(-r, 0, r). The height of the pyramid from R to the base BAS is r.

Рис 7.10: A 3D diagram showing the pyramid BCSR. The base is the triangle BCS in the xy-plane. The apex is R(-r, 0, r). The height of the pyramid from R to the base BCS is r.

Рис 7.11: A 3D diagram showing the pyramid SADR. The base is the triangle SAD in the xy-plane. The apex is R(-r, 0, r). The height of the pyramid from R to the base SAD is r.

Рис 7.12: A 3D diagram showing the pyramid SC\&R. The base is the triangle SC\& in the xy-plane. The apex is R(-r, 0, r). The height of the pyramid from R to the base SC\& is r.

Рис 7.13: A 3D diagram showing the pyramid BASR. The base is the triangle BAS in the xy-plane. The apex is R(-r, 0, r). The height of the pyramid from R to the base BAS is r.

Рис 7.14: A 3D diagram showing the pyramid BCSR. The base is the triangle BCS in the xy-plane. The apex is R(-r, 0, r). The height of the pyramid from R to the base BCS is r.

Рис 7.15: A 3D diagram showing the pyramid SADR. The base is the triangle SAD in the xy-plane. The apex is R(-r, 0, r). The height of the pyramid from R to the base SAD is r.

Рис 7.16: A 3D diagram showing the pyramid SC\&R. The base is the triangle SC\& in the xy-plane. The apex is R(-r, 0, r). The height of the pyramid from R to the base SC\& is r.

Рис 7.17: A 3D diagram showing the pyramid BASR. The base is the triangle BAS in the xy-plane. The apex is R(-r, 0, r). The height of the pyramid from R to the base BAS is r.

Рис 7.18: A 3D diagram showing the pyramid BCSR. The base is the triangle BCS in the xy-plane. The apex is R(-r, 0, r). The height of the pyramid from R to the base BCS is r.

Рис 7.19: A 3D diagram showing the pyramid SADR. The base is the triangle SAD in the xy-plane. The apex is R(-r, 0, r). The height of the pyramid from R to the base SAD is r.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



(a, b, c)
 $a = b = c = 2^{50}$

$$abc = 2^{150} \cdot 3^{150} = \frac{x}{q} \cdot x \cdot q = x^3$$

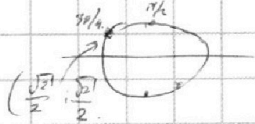
$$x = 2^{50} \cdot 3^{50}$$

$$\text{Ans: } 1 + 2(51^2 - 1) = 2 \cdot 51^2 - 2 = 2 \cdot 51^2 - 1$$

$$(x+1)^2 \rightarrow x^2 + 2x + 1 \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \pm i$$

3 4 5 6 7

$$\text{tg}(x + \frac{3\pi}{4}) = \frac{\sin(x + \frac{3\pi}{4})}{\cos(x + \frac{3\pi}{4})} = \frac{\sin x \cos \frac{3\pi}{4} + \cos x \sin \frac{3\pi}{4}}{\cos x \cos \frac{3\pi}{4} - \sin x \sin \frac{3\pi}{4}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x}{-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x}$$



$$-\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x$$

$$\frac{\sin x \cos \frac{3\pi}{4} + \cos x \sin \frac{3\pi}{4}}{\cos x \cos \frac{3\pi}{4} - \sin x \sin \frac{3\pi}{4}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x}{-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x}$$

$$\frac{\cos x \cos \frac{3\pi}{4} - \sin x \sin \frac{3\pi}{4}}{\cos x \cos \frac{3\pi}{4} - \sin x \sin \frac{3\pi}{4}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x}{-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x) (6 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x) = (\cos^2 x - \sin^2 x) (\sin x + \cos x) (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x)$$

$$(\sin x + \cos x) (6 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x) = (\cos x - \sin x) (\cos x + \sin x) (\sin x - \cos x)$$

$$1) \sin x + \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k; x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$(a-b)(b-a) = ab - a^2 - b^2$$

$$2) \cos^2 x + 6 \sin x \cos x - \sin^2 x = -\cos^2 x - \sin^2 x + 2 \cos x \sin x$$

$$\text{tg} = \frac{\sin}{\cos}$$

$$4 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0 \Rightarrow 2 \cos x (2 \sin x + \cos x) = 0$$

$$2) \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$3) 2 \sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \text{tg} x = -\frac{1}{2}$$

$$3) \ln^2 x - (x-1) \ln(2x) + (\ln 2) \ln x \geq 0 \Rightarrow \ln^2 x - (x-1) \ln 2 - \ln x + \ln 2 \ln x \geq 0$$

$$\ln x^2 = 2 \ln x$$

$$\ln 2x = \ln 2 + \ln x$$

$$\ln x (\ln x - x \ln 2 + 2 \ln 2) \geq 0$$

7)

$$y = -4x \Rightarrow \text{opred} \Rightarrow (x_1, -4x_1)$$

$$y = \frac{1}{4}x \Rightarrow \text{opred} \Rightarrow (x_2, \frac{1}{4}x_2)$$

$$(x_3, \frac{1}{4}x_3)$$

$$(x_4, \frac{1}{4}x_4)$$

$$x_1 = t, x_2 = -t$$

$$x_3 = t, x_4 = -t$$

$$y_1 = t^3 - 4t, y_2 = -t^3 + 4t$$

$$y_3 = 4t^3 - 4t, y_4 = -4t^3 + 4t$$

$$\begin{cases} -4t^3 = t^3 - 4t \\ 4t^3 = -t^3 + 4t \\ t = 64t^3 - 4t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5t^3 = 4t \\ 63t^3 = 4t \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^3 = 4t \\ 63t^3 = 4t \end{cases}$$

$$z(x, y): \begin{cases} x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 - \frac{7}{x^3} \\ x^3 - \frac{7}{y^3} = y^3 - \frac{7}{x^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 - \frac{7}{x^3} \\ x^3 - \frac{7}{y^3} = y^3 - \frac{7}{x^3} \end{cases}$$

$$x^3 - y^3 + 14 \left(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{x^3} \right) = 0$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) + 14 \frac{x^2 - y^2}{y^3 x^3} = 0$$

$$x^3 - y^3 + 14 \frac{x^2 - y^2}{y^3 x^3} = 0 \Rightarrow (x^3 - y^3) \left(1 + \frac{14}{y^3 x^3} \right) = 0$$

$$(y^3 - z^3) \left(1 + \frac{14}{y^3 z^3} \right) = 0$$

$$(x^3 - z^3) \left(1 + \frac{14}{x^3 z^3} \right) = 0$$

$$x^3 - 14 = x \cdot x \cdot \frac{y^3 - 14}{x^2}$$

$$x^3 - 14 = x \cdot x \cdot \frac{y^3 - 14}{x^2}$$

$$x^3 - 14 = x \cdot x \cdot \frac{y^3 - 14}{x^2}$$

$$\frac{2 \cdot 7}{y^3} = \frac{2 \cdot 7}{x^3} - x^3$$

$$-1 = \frac{14}{y^3 x^3} \Rightarrow y^3 x^3 = -14$$

$$(x-y, y-x, z=\sqrt{14}/x) \oplus$$

$$(x=x, y=\sqrt{14}/x, z=x) \Rightarrow x = \frac{1}{x} \cdot x = 0$$

$$(x=x, y=\sqrt{14}/x, z=\sqrt{14}/x) \oplus$$

$$\begin{cases} y = x \\ y = \sqrt{14}/x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = z \\ y = \sqrt{14}/x \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = x \\ z = \sqrt{14}/x \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 2 & 4 & 8 \\ -2 & 4 & 8 \end{matrix}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



00 3 4 5 6 7



$$1^2 + 4 = -4 + 2 = -1/4$$

$$5^2 = -4,25$$

$$\frac{320}{17} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{r} 320 \\ \times 4 \\ \hline 1280 \\ + 1280 \\ \hline 2560 \end{array}$$

$$x^6$$

$$x_B^2 + 4x_B^2 = x_C^2 + \frac{1}{16}x_C^2$$

$$x_B^2 \cdot 5 = x_C^2 \cdot \frac{17}{16}$$

$$\frac{80}{17} = 1 \quad x_C = x_B \cdot \pm \sqrt{\frac{17 \cdot 5}{16}}$$

$$\begin{array}{r} 1257 \\ \times 7 \\ \hline 8799 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 59 \\ \times 6 \\ \hline 354 \end{array}$$

$$x_B^2 + 16x_B^2 = x_C^2 + \frac{1}{16}x_C^2$$

$$x_C = 4x_B$$

$$\frac{1}{3} + \frac{7}{13} = -\frac{3\sqrt{14}}{4}$$

$$1^3 + \frac{7}{13} = 1^3 + \frac{7}{13} = 1^3 - \frac{13}{2}$$

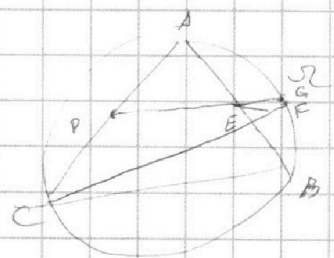
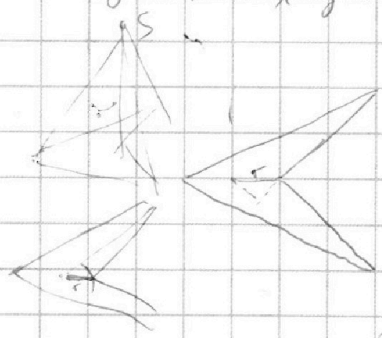
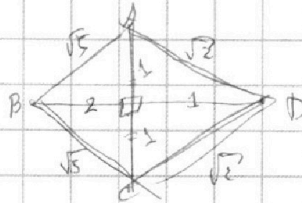
$$= 1^3 - \frac{14}{13} + \frac{7}{13} = -\frac{7}{13}$$

$$x^3 + \frac{7}{y^3} = z^3 + \frac{7}{x^3} \Rightarrow \frac{1}{y^3} - \frac{z^3}{7} + \frac{1}{x^3} - \frac{x^3}{7} = \frac{z^3x^3 + 7 - x^6}{7x^3}$$

$$y^3 + \frac{7}{z^3} = z^3 + \frac{7}{y^3} \Rightarrow y^3 - z^3 + \frac{7}{z^3} - \frac{7}{y^3}$$

$$(x^3y^3 + 7 - y^6) \cdot y^3 \cdot x^3 \cdot y^3 = \frac{7y^3}{x^3y^3 + 7 - y^6}$$

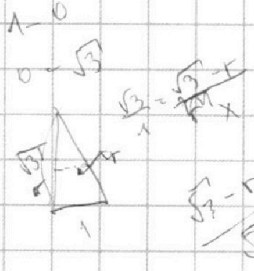
$$3/5/6$$



$$\begin{array}{l} 3+2\sqrt{2} \sqrt{2+5} \\ 1+\sqrt{2} \sqrt{5} \\ 3+2\sqrt{2} \sqrt{5} \\ 2\sqrt{2} \sqrt{2} \end{array}$$

$$c = 2a$$

$$(c, d) - (d, c) = 2c$$





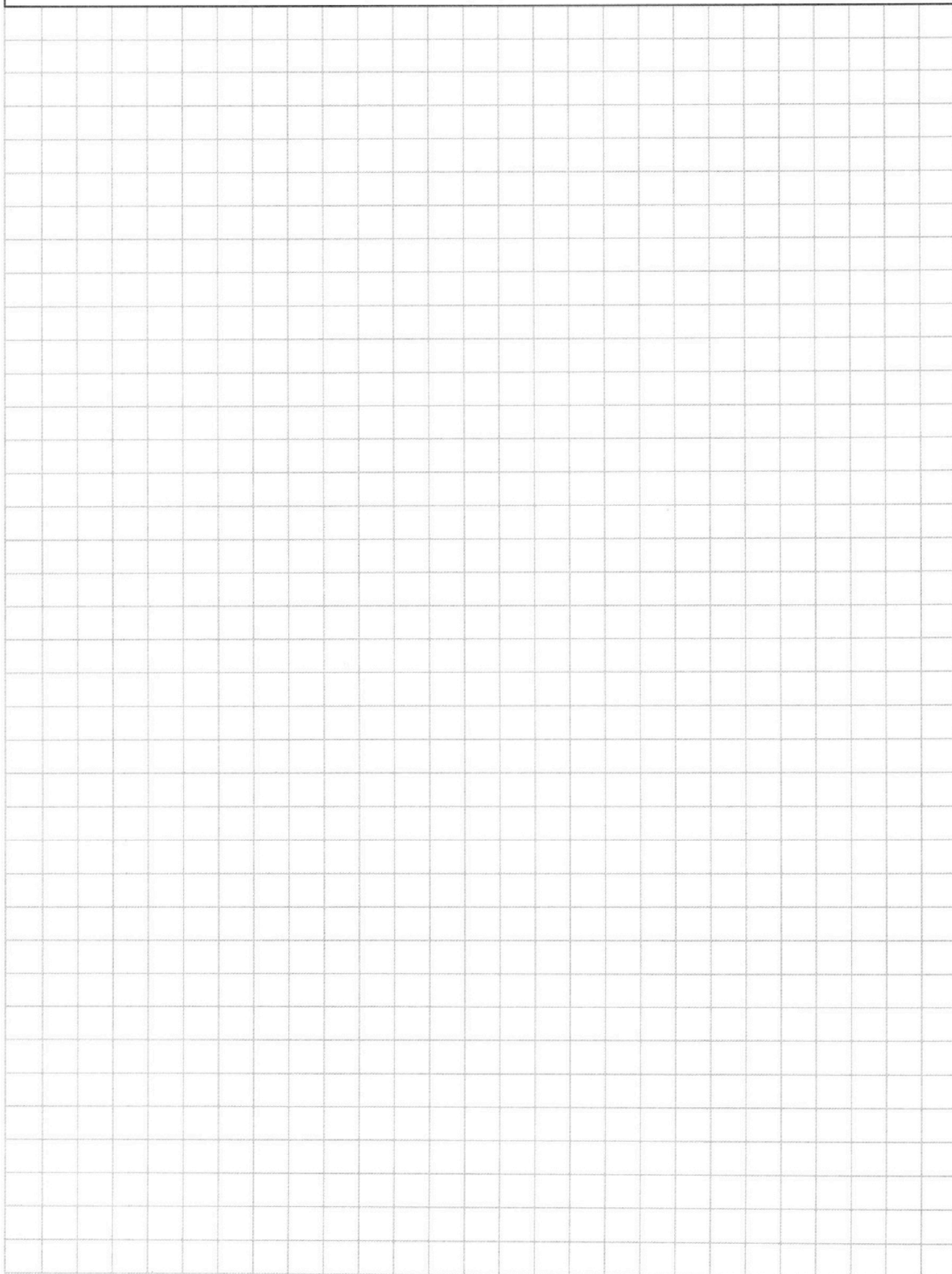
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

