



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 5



√1. [4 балла] Решите уравнение

$$3 \operatorname{tg} 2x + 1 = \operatorname{tg} \left(x + \frac{3\pi}{4} \right).$$

√2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{150}$?

√3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2 x - (x - 1) \ln(2x) + (\ln 2) \ln x \geq 0.$$

√4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -4x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC . Лучи DE и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $\frac{CF}{DF} = \frac{1}{2}$.

6. [5 баллов] Числа x , y и z не все равны между собой, и при этом

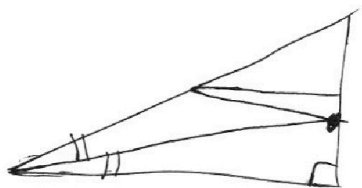
$$x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 + \frac{7}{z^3} = z^3 + \frac{7}{x^3}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения xyz .

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{5}$, $AD = DC = \sqrt{2}$, $AC = 2$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2 + \sqrt{5}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB , SBC и ребра SD .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\# k \in \mathbb{Z}$$
$$3 \operatorname{tg} 2x + 1 = \operatorname{tg} \left(x + \frac{3\pi}{4} \right); \quad \text{отсюда: } \begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x + \frac{3\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k \end{cases}$$
$$3. \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 1 = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{4} \right)}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1}$$

$$\# t = \operatorname{tg} x$$

$$\frac{2t}{1-t^2} - \frac{t-1}{t+1} + 1 = \frac{6t - (t-1)(1-t) + 1-t^2}{1-t^2} = 0$$

$$\frac{6t + t^2 - 2t + 1 + 1 - t^2}{1-t^2} = 0; \quad \frac{4t+2}{1-t^2} = 0$$

$$\begin{cases} t \neq \pm 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \arctg(\pm 1) + \pi p, \quad p \in \mathbb{Z} \\ x = \arctg\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k \end{cases}$$

С учетом отсюда: $x = \arctg\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

ответ: $x = \arctg\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} b^2 = ac \text{ (реал. прогр., по ус.)} \\ abc = 2^{150} \cdot 3^{150} \end{cases}$$

тогда $b^3 = abc = 2^{150} \cdot 3^{150}$; $b = 2^{50} \cdot 3^{50}$;
 $ac = 2^{100} \cdot 3^{100} > 0 \Rightarrow \begin{cases} a, c > 0 \\ a, c < 0 \end{cases}$

для каждого $a = 2^x \cdot 3^y$ найдется $c = 2^{7-x} \cdot 3^{7-y}$,
 $0 \leq x \leq 100$ и $0 \leq y \leq 100$
 $0 \leq x \leq 100$ и $0 \leq y \leq 100$.

Значит кол-во возм-х пар (a, c) — кол-во возм-х
значений a . А т.к. $a = 2^x \cdot 3^y$, $0 \leq x \leq 100$

Значит кол-во a — кол-во пар (x, y) ,
 $0 \leq x \leq 100$ и $0 \leq y \leq 100$.

По правому множеству значений — 101^2

Также каждой паре $a, c > 0$ можно составить

пару $(-a, -c)$. Тогда кол-во пар удваивается.

Итого $2 \cdot 101^2 = 20402$ пар (a, c) .

ответ: 20402

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt[0]{3}$$

$$\ln^2 x - (x-1) \ln(2x) + \ln 2 \cdot \ln x \geq 0 \quad \text{1. шаг: } x > 0$$

$$\ln^2 x - (x-1)(\ln 2 + \ln x) + \ln 2 \cdot \ln x \geq 0$$

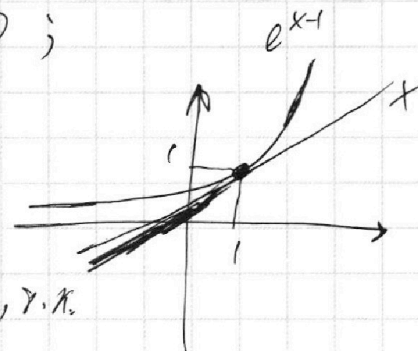
$$\ln^2 x - \underline{x \cdot \ln 2} - \underline{x \cdot \ln x} + \underline{\ln 2} + \underline{\ln x} + \underline{\ln 2 \cdot \ln x} \geq 0.$$

$$\ln x (\ln x - x + 1) + \ln 2 (\ln x - x + 1) \geq 0$$

$$(1) (\ln x - x + 1) (\ln x + \ln 2) \geq 0.$$

2. шаг покажем, что $\ln x - x + 1 \leq 0$;

$$\frac{e^{\ln x} \cdot e^1}{e^x} \leq 1; \quad \underbrace{x}_{f} \leq \underbrace{e^{x-1}}_g$$



в т. (1, 1) f и g касаются, т.к.
производные и значения f и g при $x=1$
равны ($x'=1$; $(e^{x-1})'|_{x=1} = e^{1-1} = 1$)
 $1 = e^{1-1} = 1$

Значит это их единств-ая общ. точка,
т.к. f и g монотонны и сохраняют свою
вогнутость на \mathbb{R} . (следствие 1)

Значит, если $\ln x - x + 1 \leq 0$, то $\ln x + \ln 2 \leq 0$;

$$e^{\ln x} \cdot e^{\ln 2} \leq 1; \quad 2x \leq 1 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}. \quad \text{Из-за 1. шага и}$$

находим ~~точку~~ точку $x=1$ при $\ln x - x + 1$, $x \in (0; \frac{1}{2}] \cup \{1\}$

ответ: $x \in (0; \frac{1}{2}] \cup \{1\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{2} \cdot 4$ (продолжение).

Также при $OC = OD$, $ABCD$ - квадрат.

$$OD = \frac{OR}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{a-4}}{\frac{1}{\sqrt{17}}} = \sqrt{17(a-4)}$$

$$\# \operatorname{tg} \alpha = 4; \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}} = 4; \sin^2 \alpha = 16 - 16 \sin^2 \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}, \text{ т.к. } \alpha - \text{острый.}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$OC = \frac{OR}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{a+\frac{1}{4}}}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = \frac{1}{4} \sqrt{17(a+\frac{1}{4})}$$

$$OD = OC \Leftrightarrow \sqrt{17(a-4)} = \frac{1}{4} \sqrt{17(a+\frac{1}{4})}$$

$$17(a-4) = \frac{1}{16} \cdot 17(a+\frac{1}{4}); (a-4) \cdot 16 = a + \frac{1}{4};$$

$$15 \cdot a = 64 + \frac{1}{4} = \frac{257}{4}; \quad a = \frac{257}{60}$$

$$OD = \sqrt{17 \cdot \frac{17}{60}} = \frac{17}{\sqrt{60}}$$

$$BD = \frac{34}{\sqrt{60}}; \quad AB = \frac{BD}{\sqrt{2}} = \frac{34}{\sqrt{120}}$$

$$S_{ABCD} = AB^2 = \frac{34^2}{120} = \frac{17^2}{30} = \frac{289}{30}$$

Ответ: $a = \frac{257}{60}$; площадь - $\frac{289}{30}$

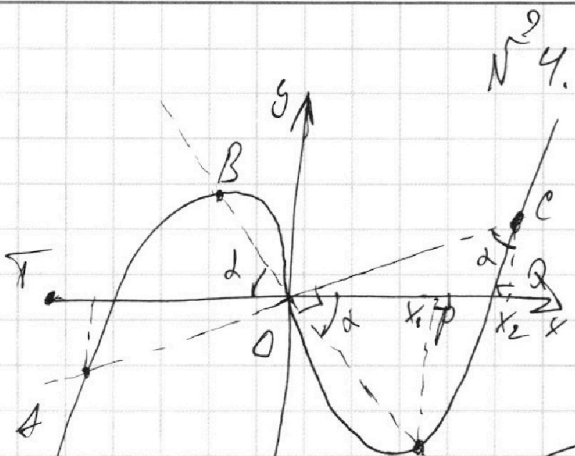
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$m: x^3 - ax = y$ | A, B, C, D -
 вершины
 искомого
 квадрата
 с центром в O .
 $p: y = -4x$
 $q: y = \frac{1}{4}x$
 $m \cap p = \{B, O, D\}$

т.к. $AO \perp BO$ (диаг. квадрата),

то $q \cap m = \{A, O, C\}$.

$p \perp q$, т.к. коэф-ты наклона этих прямых дают в произведении -1

$BO = DO$ и $AO = CO$, т.к. $y = x^3 - ax$ - нечетная; симметрична относительно центра координат

$$y(-x) = -y(x) \Leftrightarrow (-x)^3 - a(-x) = -x^3 + ax = -(x^3 - ax)$$

$$\text{Пр}_{Ox} D = P; \text{Пр}_{Ox} C = Q; T \in O_x \text{ (см. рис.)}$$

$$\angle BOT = \alpha; \text{tg} \alpha = 4 \text{ (коэф. наклона } y = -4x \text{)}$$

$$\text{OP: } x^3 - ax = -4x; \quad x = \pm \sqrt{a-4}$$

положит. абсцисса пересечения m и p

$$OP = \sqrt{a-4} > 0.$$

$$\text{OQ: } x^3 - ax = \frac{1}{4}x; \quad x = \pm \sqrt{a + \frac{1}{4}}$$

положит. абсцисса пересечения

$$OQ = \sqrt{a + \frac{1}{4}}$$

$$\angle POD = \alpha \text{ (верт. с } \angle BOT \text{)}; \angle OCQ = 90^\circ - \angle COQ = \angle POD \text{ (т.к. } \angle COQ = \angle COD = 90^\circ \text{)}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Вопрос (1) $\frac{b}{l}$ подготовил в (2);

$$\cos \frac{\delta}{2} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{\sin^2(\alpha + \frac{\delta}{2})}{\sin^2 \alpha} - 3}{\sin(\alpha + \frac{\delta}{2})};$$

$$\cos \frac{\delta}{2} = \frac{\frac{\sin \alpha}{(\sin^2(\alpha + \frac{\delta}{2}) - 12 \cdot \sin^2 \alpha)} \cdot \frac{1}{4 \cdot \sin^2 \alpha}}{\sin(\alpha + \frac{\delta}{2})}$$

$$\cos \frac{\delta}{2} = \frac{\sin \alpha}{\frac{\sin^2(\alpha + \frac{\delta}{2}) - 12 \cdot \sin^2 \alpha}{4 \sin \alpha \cdot \sin(\alpha + \frac{\delta}{2})}}$$

$$4 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \frac{\delta}{2} \cdot \sin(\alpha + \frac{\delta}{2}) = \sin^2(\alpha + \frac{\delta}{2}) - 12 \cdot \sin^2 \alpha.$$

$$\cos \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{l} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{b}{l}\right)^{-1}$$

$$\cos \frac{\delta}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin^2(\alpha + \frac{\delta}{2})}{\sin^2 \alpha} - 3 \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \frac{\delta}{2})};$$

$$4 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \frac{\delta}{2} \cdot \sin(\alpha + \frac{\delta}{2}) \equiv \sin^2(\alpha + \frac{\delta}{2}) - 12 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$2 \cdot (\sin(\alpha - \frac{\delta}{2}) + \sin(\alpha + \frac{\delta}{2})) \cdot \sin(\alpha + \frac{\delta}{2}) =$$

$$= 2 \cdot \sin^2(\alpha + \frac{\delta}{2}) + 2 \cdot \sin(\alpha + \frac{\delta}{2}) \cdot \sin(\alpha - \frac{\delta}{2}) \equiv$$

$$\equiv \sin^2(\alpha + \frac{\delta}{2}) - 12 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2(\alpha + \frac{\delta}{2}) + \frac{\cos 2\alpha}{1 - \sin^2 \alpha} - \cos \delta = -12 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2(\alpha + \frac{\delta}{2}) + 1 - \cos \delta = -10 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\begin{aligned} \alpha + \frac{\delta}{2} &= 90^\circ \\ \alpha &= 90^\circ - \frac{\delta}{2} \\ \alpha + \frac{\delta}{2} &= 90^\circ - \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin^2\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) + 1 - \cos \alpha = -10 \cos^2 \alpha$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} + 1 - 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 1 = -10 \left(2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1\right)^2$$

$$t = \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$t + 1 - 2t + 1 = -10(2t - 1)^2 = -10(4t^2 - 4t + 1) =$$
$$= 40t^2 - 40t + 10$$

$$40t^2 - 41t + 12 = 0;$$

$$D = 41^2 - 4 \cdot 40 \cdot 12 = 1681 - 1920 < 0.$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin^2\left(\alpha + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2 \alpha} - 3 \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin\left(\alpha + \frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$4 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \sin^3\left(\alpha + \frac{\alpha}{2}\right) - 3 \cdot 4 \cdot \sin^3 \alpha$$

$$4 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \cos^3 \frac{\alpha}{2} - 12 \cdot \cos^3 \alpha$$
$$t = \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$4 \cdot t^2 (2t^2 - 1)^2 = (2t^2 - 1)^3 - 12 \cdot t^3 - 12(2t^2 - 1)^3$$

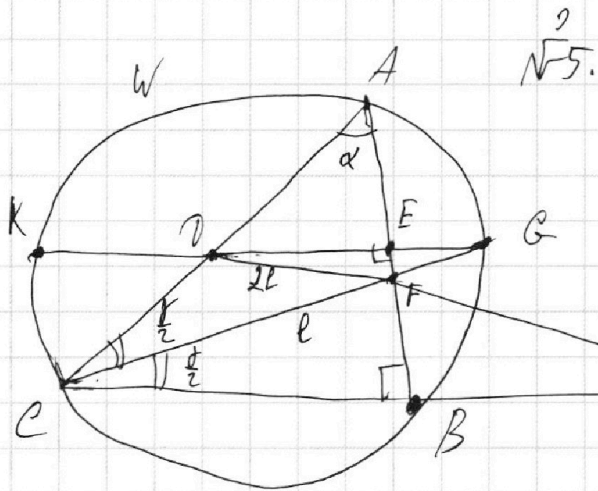
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AC = 2b$
 $\angle A = \alpha, \angle B = \beta$
 $LC = l$
 $AG = GA = l$ (биссек.)

т.к. $DE \parallel BC$ (ср. линия),
 $\angle K = \angle C = \beta$
 $KC = BG = l$

$T = DF \cap BC$; по т. о. Биссектрисы: $\frac{AF}{BF} = \frac{AC}{BC}$

по т. Менелая для $\triangle ABC$ и секущей DF :

$$\frac{\frac{CD}{AD} \cdot \frac{AF}{BF} \cdot \frac{BT}{CT}}{1 \cdot \frac{AC}{BC}} = 1; \quad \frac{AC}{BC} = \frac{CT}{BT} = 1 + \frac{BC}{BT}$$

(середина к хорде).

O — центр окруж. W . $OE \cap W = G \Rightarrow O \in DE, DE \perp AB \Rightarrow$
 $\Rightarrow BC \perp AB$, т.к. $DE \parallel BC$. $\angle ABC = 90^\circ$

т.к. $\triangle ABC$ — прямоугольный, то O — серед. $AC \Rightarrow O = F$.

$CF = l; DF = 2l; \frac{l}{\sin \alpha} = \frac{2b}{\sin(\alpha + \frac{\alpha}{2})}$ (т. синусов $\triangle ACF$).

$$(1) \frac{\sin(\alpha + \frac{\alpha}{2})}{\sin \alpha} = \frac{2b}{l}; \quad \frac{\sin(\frac{\alpha}{2} + 45^\circ)}{\sin \alpha} = \frac{2b}{l}$$

т. косинусов $\triangle CDF$:

$$(2) \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{b^2 + l^2 - 4l^2}{2bl} = \frac{(\frac{b}{l})^2 - 3}{2 \cdot \frac{b}{l}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6.

по первому среднему: $x, y, z \geq \frac{3}{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3}}$
сп. гарм. сп. гарм.

$$xyz \geq \frac{21}{\frac{7}{x^3} + \frac{7}{y^3} + \frac{7}{z^3}}$$

$$\begin{cases} \frac{7}{y^3} = z^3 - x^3 + \frac{7}{x^3} \\ \frac{7}{z^3} = z^3 - y^3 + \frac{7}{x^3} \\ \frac{7}{x^3} = \frac{7}{x^3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{8}{y^3} - \frac{1}{z^3} &= \\ &= \left(x + \frac{2}{y}\right) \left(x^2 + \frac{2x}{y^2} + \frac{4}{y^2}\right) \end{aligned}$$

$$x^3 - \frac{7}{x^3} = z^3 - \frac{7}{y^3}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{21}{x^3} + 2z^3 - x^3 - y^3 = \frac{7}{x^3} - x^3 + \frac{14}{x^3} + 2z^3 - y^3 = \\ &= \frac{7}{y^3} - z^3 + \frac{14}{x^3} + 2z^3 - y^3 = \\ &= \end{aligned}$$

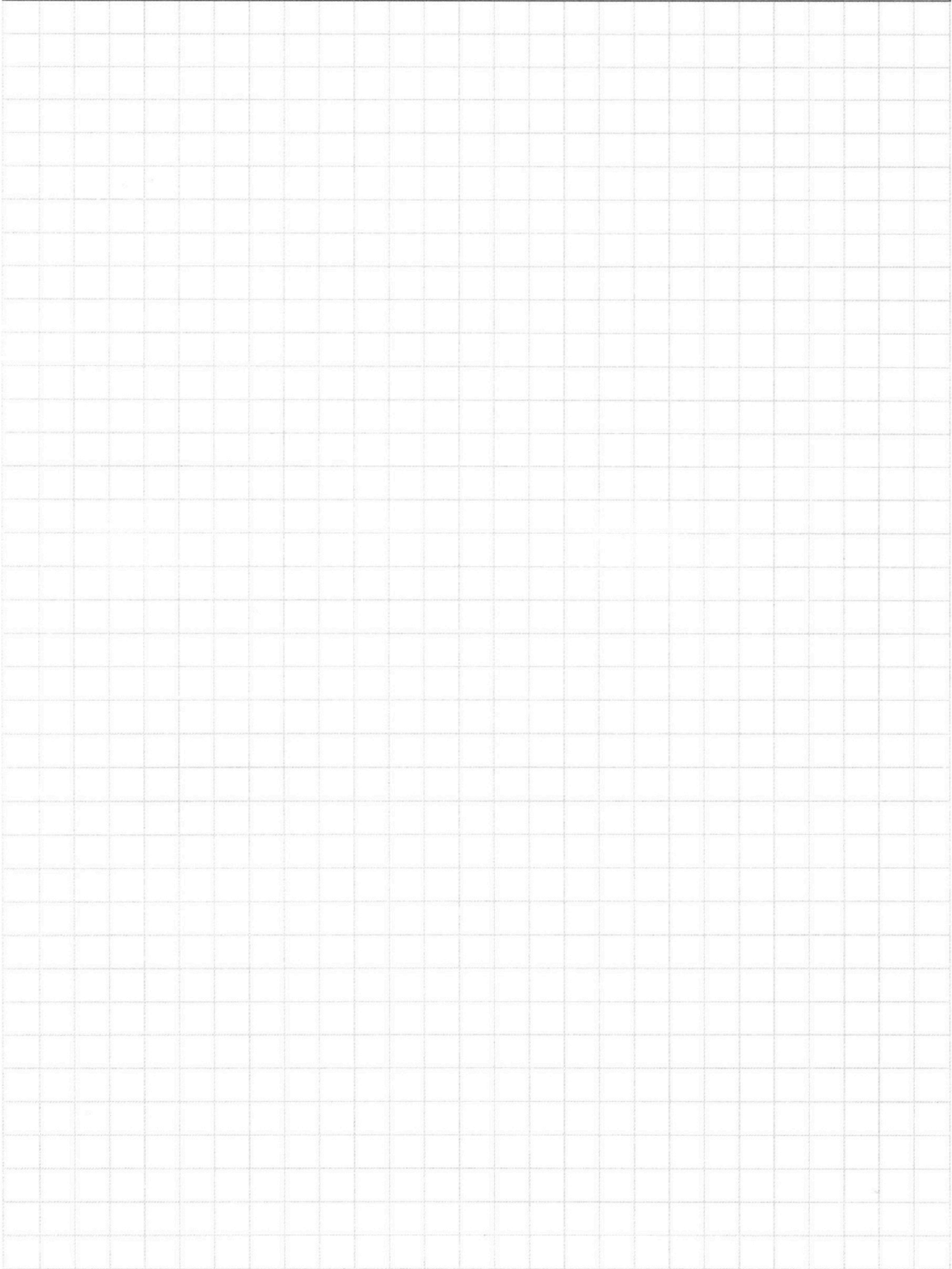


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

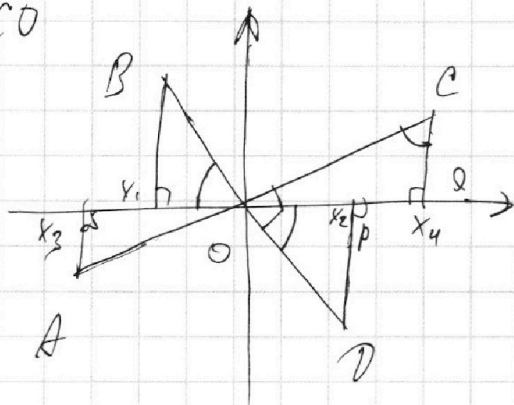
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$DO = CO$$



$$\operatorname{tg} \alpha = 4$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = 16$$

$$\sin^2 \alpha = 16 - 16 \sin^2 \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$DO = CO$$

$$17(a-4) = \frac{1}{16} \cdot 17(a + \frac{1}{4}); \quad 16a - 64 = a + \frac{1}{4}$$

$$DO = \sqrt{17 \left(\frac{257}{60} - 4 \right)}$$

$$15a = 64 + \frac{1}{4} = \frac{257}{4}$$

$$a = \frac{257}{60}$$

$$\frac{34^2}{4} = \left(\frac{34}{2} \right)^2$$

$$\geq \sqrt{17 \cdot \frac{17}{60}} = \frac{17}{\sqrt{60}}; \quad BO = \frac{39}{\sqrt{60}}; \quad AB = \frac{BO}{\sqrt{2}} = \frac{39}{\sqrt{120}} = 17^2$$

$$AB^2 = \frac{39^2}{120}$$

$$1) \quad x^3 - ax = -9x$$

$$x^2 - a + 9 = 0$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{a-9}$$

$$2) \quad x^3 - ax = \frac{1}{4}x$$

$$x^2 = a + \frac{1}{4}$$

$$x_{3,4} = \pm \sqrt{a + \frac{1}{4}}$$

$$DO = \frac{OP}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{a-9}}{\frac{1}{\sqrt{17}}} = \sqrt{17(a-9)}$$

$$CO = \frac{OQ}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{a + \frac{1}{4}}}{\frac{1}{\sqrt{17}}} = \sqrt{17(a + \frac{1}{4})}$$

$$CO = \frac{OQ}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{a + \frac{1}{4}}}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = \frac{1}{4} \sqrt{17(a + \frac{1}{4})}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 + \frac{7}{z^3} = z^3 + \frac{7}{x^3}$$

~~$x^3 + \frac{7}{y^3}$~~

$$(\cdot kgz)^3 = m$$

ср. кв \geq ср. арифм \geq
 \geq ср. геом \geq ср. гарм.

$$x^3 \cdot m + 7x^3 z^3 = y^3 \cdot m + 7x^3 y^3 = z^3 \cdot m + 7y^3 z^3$$

$$m + 7z^3 = y^6 z^3 + 7y^3$$

$$y^3 z^3 (x^3 - y^3) = 7(y^3 z^3)$$

$$xyz \geq \frac{3 \cdot 7}{\frac{7}{x^3} + \frac{7}{y^3} + \frac{7}{z^3}} ; \quad \frac{7}{x^3} + \frac{7}{y^3} + \frac{7}{z^3} \leq$$

$$\frac{7}{y^3} = z^3 - x^3 + \frac{7}{x^3}$$

$$\frac{7}{z^3} = z^3 - y^3 + \frac{7}{y^3}$$

$$y^3 + \frac{7}{z^3} = z^3 + \frac{7}{x^3}; \quad z^6 + z^3 \left(\frac{7}{x^3} - y^3 \right) - 7 = 0$$

$$D = \frac{49}{x^6} - 14 \frac{z^3}{x^3} + y^6 + 28 \geq 0$$

$$D' = 196 \cdot y^6 - 4 \cdot 49 (y^6 + 28) =$$
$$= -4 \cdot 49 \cdot 28$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} b^2 = ac \\ abc = 2^{150} \cdot 3^{150} \end{cases}, a, b, c \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} a, c > 0 \\ a, c < 0 \end{cases}$$

$$b^3 = abc = 2^{150} \cdot 3^{150}$$

$$b = 2^{50} \cdot 3^{50}$$

$$a \cdot c = 2^{100} \cdot 3^{100}$$

$$! a = 2^x \cdot 3^y, 0 \leq x < 100, 0 \leq y < 100$$

$$101^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 + 1$$

$$\geq 10000 + 200 + 1$$

$$\geq 10201$$

$$\rightarrow 20402$$

с учетом стр. Вар. 6

$$2 \cdot 101^2$$

$$\ln^2 x - (x-1) \cdot \ln(2x) + \ln 2 \cdot \ln x \geq 0$$

$$\ln^2 x - \underbrace{x \cdot \ln 2x}_{\ln} + \ln 2x + \ln 2 \cdot \ln x \geq 0$$

$$\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

$$\ln^2 x - x \cdot \ln 2 - x \cdot \ln x + \ln 2 + \ln x + \ln 2 \cdot \ln x$$

$$\ln^2 x - x$$

$$\ln x (\ln x + \ln 2) \geq x \cdot \ln 2x - \ln 2x = x \cdot \ln 2 + x \cdot \ln x - \ln 2 + \ln x$$

$$\ln^2 x - (x-1)(\ln x + \ln 2) + \ln 2 \cdot \ln x \geq 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3 \operatorname{tg} 2x + 1 = \operatorname{tg} \left(x + \frac{3\pi}{4} \right) \quad ; \quad \text{отсюда} \quad 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k; x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$$

$$x + \frac{3\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k; x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{1 - 2 \sin^2 x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - 2 \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \quad ; \quad \operatorname{tg} \left(x + \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x}$$

$$\frac{6 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} - \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} + 1 = 0 \quad * \operatorname{tg} x = x$$

$$\frac{6t - (t-1)^2}{1-t^2} = 0 \quad \xrightarrow{\times 0}$$

$$6t - t^2 + 2t - 1 + 1 - t^2 = -2t^2 + 8t = -2(t^2 - 4) = 0$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ t = \pm 2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{aligned} x &= \pi k \\ x &= \arctg(2) + \pi k \\ x &= \arctg(-2) + \pi k. \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= 2 \cdot \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$2 \cdot \sin d \cdot \cos \frac{d}{2} = \sin\left(d - \frac{d}{2}\right) + \sin\left(d + \frac{d}{2}\right)$$

$$\left(\sin\left(d - \frac{d}{2}\right) + \sin\left(d + \frac{d}{2}\right)\right) \cdot \sin\left(d + \frac{d}{2}\right) = \sin^2\left(d + \frac{d}{2}\right) - 3 \cdot \sin^2 d$$

$$-2 \cdot \sin\left(d - \frac{d}{2}\right) \cdot \sin\left(d + \frac{d}{2}\right) = + 6 \cdot \sin^2 d$$

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= -2 \cdot \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos 2d - \cos \gamma = 6 \cdot \sin^2 d$$

$$2 \cdot \cos^2 d - 1 - \cos \gamma = 6 - 6 \cdot \cos^2 d$$

$$8 \cdot \cos^2 d = \cos \gamma + 7$$

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = -2 \cdot \sin \sin$$

$$1600 + 80 + 1$$

$$48 \cdot 4 = 96 \cdot 2 = 192$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

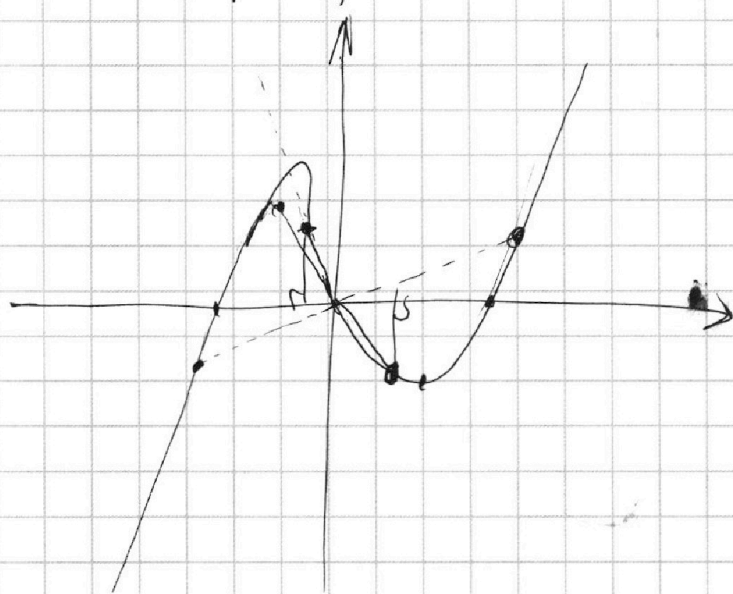
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 - ax = x(x^2 - a)$$



$$x^3 - ax = -4x$$

$$x^3 - ax + 4x = 0$$

$$x(x^2 - a + 4) = 0$$

$$x^2 - a + 4 > 0$$

$$x = \pm \sqrt{4 - a}$$

$$x = \pm \sqrt{a - 4}$$

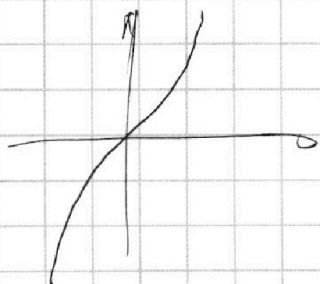
$$a > 4$$

$$x^3 - ax = \frac{1}{4}x$$

$$x(x^2 - a - \frac{1}{4}) = 0$$

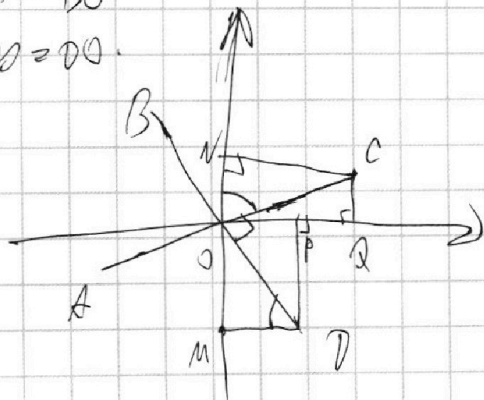
$$x = \pm \sqrt{a + \frac{1}{4}}$$

$$\sqrt{a + \frac{1}{4}} + \sqrt{a - 4} = \sqrt{a - 4} + \sqrt{a + \frac{1}{4}}$$



$$AO = BO$$

$$CO = DO$$



$$\operatorname{tg} \Delta = 4; \operatorname{tg} d = 4$$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 4; x^2 = \frac{16}{17}(1-x^2)$$

$$17x^2 = 16; x = \frac{4}{\sqrt{17}} \stackrel{\sin d}{\sim}$$

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = 4$$

$$1-x^2 = 16x^2; x = \frac{1}{\sqrt{17}} = \cos d$$

$$CO = \frac{ON}{\cos d} = 2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\ln^2 x - (x-1)(\ln x + \ln 2) + \ln 2 \cdot \ln x \geq 0; \quad \forall x \geq \ln x.$$

~~$$\ln^2 x - (x-1)(\ln x + \ln 2)$$~~

$$\frac{\ln^2 x}{\ln 2} - (x-1) \cdot \ln(2 \cdot x) + \ln x \geq 0$$

$$\frac{x^{\ln x} + x^{\ln 2}}{\ln 2}$$

~~≥ 0~~

$$\ln^2 x - x \cdot \ln 2 x + \ln 2 x + \ln 2 \cdot \ln x \geq 0$$

$$\ln^2 x - \underline{x \cdot \ln 2} - \underline{x \cdot \ln x} + \underline{\ln 2} + \underline{\ln x} + \underline{\ln 2 \cdot \ln x} \geq 0$$

$$\ln x (\ln x - x + 1) + \ln 2 (\ln x - x + 1) \geq 0$$

$$(\ln x - x + 1) \cdot (\ln x + \ln 2) \geq 0$$

I. $\ln x - x + 1 \geq 0$

$$\ln x + \ln 2 \geq 0 \Rightarrow e^{\ln x} \cdot e^{\ln 2} \geq 1; \quad x \cdot 2 \geq 1, \quad x \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{x \cdot e}{e^x} \geq 1; \quad x \cdot e \geq e^x; \quad x \geq e^{x-1}$$

$$1 \geq e^{1-x} = 1$$

$$x \in (-\infty; +\frac{1}{2}]$$

$$x \in (0; +\frac{1}{2}] \quad x \geq \frac{1}{2}$$

