



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 5

✓ 1. [4 балла] Решите уравнение

$$3 \operatorname{tg} 2x + 1 = \operatorname{tg} \left(x + \frac{3\pi}{4} \right).$$

✓ 2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{150}$?

✓ 3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2 x - (x - 1) \ln(2x) + (\ln 2) \ln x \geqslant 0.$$

✓ 4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -4x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC . Лучи DE и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $\frac{CF}{DF} = \frac{1}{2}$.

6. [5 баллов] Числа x , y и z не все равны между собой, и при этом

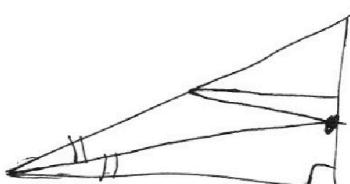
$$x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 + \frac{7}{z^3} = z^3 + \frac{7}{x^3}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения xyz .

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{5}$, $AD = DC = \sqrt{2}$, $AC = 2$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2 + \sqrt{5}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB , SBC и ребра SD .





- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\# k \in \mathbb{Z}$$

$$3 \operatorname{tg}^2 x + 1 = \operatorname{tg}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right); \quad \text{N}^{\circ} 1.$$

$$\text{множества: } \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \\ x + \frac{3\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + n\pi \end{cases}$$

$$3. \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 1 = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1}$$

$$\# t = \operatorname{tg} x$$

$$\frac{6t}{1-t^2} - \frac{t-1}{t+1} + 1 = \frac{6t - (t-1)(1-t) + 1-t^2}{1-t^2} = 0$$

$$\frac{6t + t^2 - 2t + 1 + 1 - t^2}{1-t^2} = 0; \quad \frac{4t + 2}{1-t^2} = 0$$

$$\frac{2t+1}{1-t^2} = 0$$

$$\begin{cases} t \neq \pm 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \arctg(\pm 1) + n\pi, & t \neq \pm 1 \\ x = \arctg\left(-\frac{1}{2}\right) + n\pi \end{cases}$$

$$\text{С учетом мноз: } x = \arctg\left(-\frac{1}{2}\right) + n\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\underline{\text{ответ: }} x = \arctg\left(-\frac{1}{2}\right) + n\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} b^2 = ac \text{ (станд. кратр., но гр.)} \\ abc = 2^{150} \cdot 3^{150} \end{array} \right.$$

$$abc = 2^{150} \cdot 3^{150}$$

$$\Rightarrow b^3 = abc = 2^{150} \cdot 3^{150}; \quad b = 2^{50} \cdot 3^{50};$$

$$\text{тогда } ac = 2^{100} \cdot 3^{100} > 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0, c > 0 \\ a, c < 0 \end{cases}$$

$$\text{ДЛЖНО } a = 2^x \cdot 3^y \text{ КАКИЕ } c: c = 2^z \cdot 3^w; \\ 0 \leq x \leq 100 \quad a \leq 2 \leq 100 \\ 0 \leq y \leq 100 \quad 0 \leq z \leq 100.$$

Значит кол-во возможных пар (a, c) - кол-во возможных

значений a . А т.к. $a = 2^x \cdot 3^y$, $0 \leq x \leq 100$

$$\text{знач } 0 \leq y \leq 100$$

то кол-во a - кол-во пар (x, y) .

но таблица значений таких $- 101^2$

Также каждая пара $a, c > 0$ может сформировать пару $(-a, -c)$. Тогда кол-во пар удваивается.
Итого $2 \cdot 101^2 = 20402$ пар (a, c) .

Ответ: 20402

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N^o 3.

$$\ln^2 x - (x-1) \ln(2x) + \ln 2 \cdot \ln x \geq 0 \quad | \text{ при } x > 0$$

$$\ln^2 x - (x-1)(\ln 2 + \ln x) + \ln 2 \cdot \ln x \geq 0$$

$$\underline{\ln^2 x} - \underline{x \ln 2} - \underline{x \cdot \ln x} + \underline{\ln 2} + \underline{\ln x} + \underline{\ln 2 \cdot \ln x} \geq 0.$$

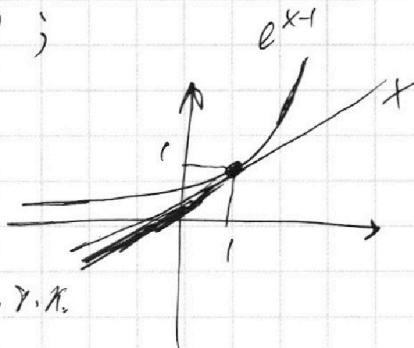
$$\ln x(\ln x - x + 1) + \ln 2(\ln x - x + 1) \geq 0$$

$$(\ln x - x + 1)(\ln x + \ln 2) \geq 0.$$

Доказательство, что $\ln x - x + 1 \leq 0$;

$$\frac{e^{\ln x} \cdot e^1}{e^x} \leq 1 ; \quad (\because e^{x>0})$$

$$\begin{array}{c} x \leq e^{x-1} \\ f \quad g \end{array}$$



В т. $(1,1)$ функции f и g касаются, т.к.

производные в точке f и g при $x=1$

$$\text{равны } (x'=1 ; (e^{x-1})' \Big|_{x=1} = e^{1-1} = 1)$$

$$1 = e^{1-1} = 1$$

Значит $\ln x \leq x$ для любого x .

т.к. f и g монотонны и симметричны

свойствами на \mathbb{R} .

(вывод)

Значит, если $\ln x - x + 1 \leq 0$, то $\ln x + \ln 2 \leq 0$;

$$\frac{e^{\ln x} \cdot e^{\ln 2}}{e^x} \leq 1 ; \quad 2x \leq 1 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}. \quad \text{из-за того, что}$$

функция ~~две~~ $y=x$ при $x=1$ имеет производную 1 , $x \in (0; \frac{1}{2}] \cup \{1\}$

ответ: $x \in (0; \frac{1}{2}] \cup \{1\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{4}$ (уродование).

Также мы $OC = OD$, $ABCD$ - квадрат.

$$OP = OD = \frac{OD}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{a-4}}{\frac{1}{\sqrt{17}}} = \sqrt{17(a-4)}$$

$\sin \alpha = 4$; $\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}} = 4$; $\sin^2 \alpha = 16 - 16 \cdot 5/17$

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}, \text{ т.к. } \alpha - \text{ острый.} \\ \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases}$$

$$OC = \frac{OQ}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{a+\frac{1}{4}}}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = \frac{1}{4} \sqrt{17(a+\frac{1}{4})}$$

$$OD = OC \Leftrightarrow \sqrt{17(a-4)} = \frac{1}{4} \sqrt{17(a+\frac{1}{4})}$$

$$17(a-4) = \frac{1}{16} \cdot 17(a+\frac{1}{4}); (a-4) \cdot 16 = a + \frac{1}{4};$$

$$15a = 64 + \frac{1}{4} = \frac{257}{4}; \quad a = \frac{257}{60}$$

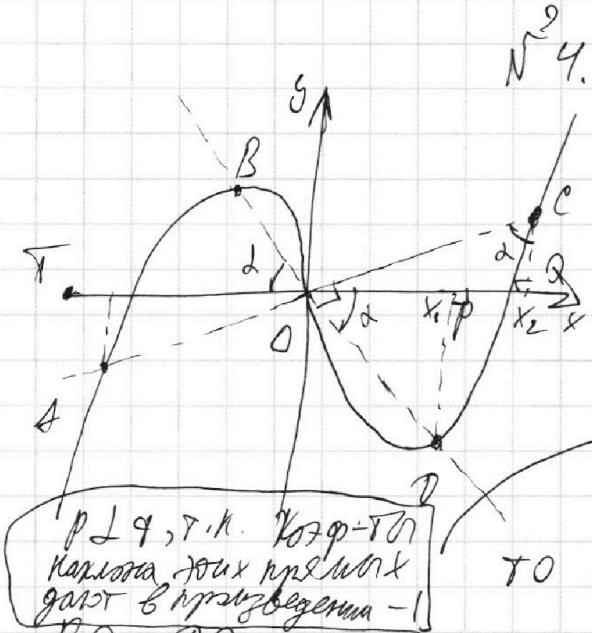
$$OD = \sqrt{17 \cdot \frac{17}{60}} = \frac{17}{\sqrt{60}}$$

$$BD = \frac{34}{\sqrt{60}}; \quad AB = \frac{BD}{\sqrt{2}} = \frac{34}{\sqrt{120}}$$

$$S_{ABCD} = AB^2 = \frac{34^2}{120} = \frac{17^2}{30} = \frac{289}{30}$$

$$\underline{\text{Ответ: } a = \frac{257}{60}; \text{ площадь} - \frac{289}{30}}$$

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4.

$$m: x^3 - \alpha x = y \quad | \begin{array}{l} A, B, C, D \\ \text{вершина} \\ \text{искомое} \end{array}$$

$$p: y = -gx \quad | \begin{array}{l} \text{вертикаль} \\ \text{искомое} \end{array}$$

$$q: y = \frac{1}{4}x \quad | \begin{array}{l} \text{известна} \\ \text{искомое} \end{array}$$

$$m \cap p = \{B, D, D\}.$$

Т.к. $AO \perp BO$ (ям. квадрата),

$$\text{то } q \cap m = \{A, D, C\}.$$

$P \perp q$, т.к. коэф.-ты
какого-либо прямых
дают в произведении -1 .

$BO = DO$ и $AO = CO$, т.к.
симметрия относительно оси x (коэф.-ты)

$$y(-x) = -g(x) \Leftrightarrow (-x)^3 - \alpha(-x) = -x^3 + \alpha x = -(x^3 + \alpha x)$$

$\text{Пр}_{Ox} D = P$; $\text{Пр}_{Ox} C = Q$; $TE O_x$ (см. рис.).

$\angle BOT = \alpha$; $\operatorname{tg} \alpha = 4$ (из-за параллельности $g = -gx$).

$$OP: x^3 - \alpha x = -4x; \quad x = \pm \sqrt{a-4}$$

последнее обусловлено $\operatorname{tg} \alpha > 0$.
пересечение m и p

$$OQ: x^3 - \alpha x = \frac{1}{4}x; \quad x = \pm \sqrt{a+\frac{1}{4}}$$

посл. обусловлено
пересечения.

$$OQ = \sqrt{a+\frac{1}{4}}$$

$\angle POD = \alpha$ (верт. с $\angle BOT$); $\angle OCD = 90^\circ - \angle COQ =$

$$= \angle POD \quad (\text{т.к. } \text{угол } \angle COD = 90^\circ)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{5}$.

Было (1) $\frac{6}{\ell}$ подготовлено (2)

$$\cancel{\cos \frac{\delta}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin^2(\alpha + \frac{\delta}{2})}{\sin^2 \alpha} - 3};$$

$$\cancel{\cos \frac{\delta}{2} = \frac{(\sin^2(\alpha + \frac{\delta}{2}) - 12 \cdot \sin^2 \alpha) \cdot \frac{1}{4 \cdot \sin^2 \alpha}}{\sin(\alpha + \frac{\delta}{2})}}$$

$$\cancel{\cos \frac{\delta}{2} = \frac{\sin^2(\alpha + \frac{\delta}{2}) - 12 \cdot \sin^2 \alpha}{4 \cdot \sin \alpha \cdot \sin(\alpha + \frac{\delta}{2})}}$$

$$4 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \frac{\delta}{2} \cdot \sin(\alpha + \frac{\delta}{2}) = \sin^2(\alpha + \frac{\delta}{2}) - 12 \cdot \sin^2 \alpha.$$

$$\cos \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{\ell} - \frac{3}{2} \cdot \left| \frac{6}{\ell} \right|^{-1}$$

$$\cos \frac{\delta}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin^2(\alpha + \frac{\delta}{2})}{\sin^2 \alpha} - 3 \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \frac{\delta}{2})};$$

$$\cancel{4 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \frac{\delta}{2} \cdot \sin(\alpha + \frac{\delta}{2}) = \sin^2(\alpha + \frac{\delta}{2}) - 12 \cdot \sin^2 \alpha}$$

$$\cancel{2 \cdot (\sin(\alpha - \frac{\delta}{2}) + \sin(\alpha + \frac{\delta}{2})) \cdot \sin(\alpha + \frac{\delta}{2}) =}$$

$$\cancel{2 \cdot \sin^2(\alpha + \frac{\delta}{2}) + 2 \cdot \sin(\alpha + \frac{\delta}{2}) \cdot \sin(\alpha - \frac{\delta}{2}) \equiv}$$

$$\cancel{\equiv \sin^2(\alpha + \frac{\delta}{2}) - 12 \cdot \sin^2 \alpha}$$

$$\cancel{\sin^2(\alpha + \frac{\delta}{2}) + \frac{\cos 2\delta}{1 - 2 \sin^2 \alpha} - \cos \delta \equiv -12 \cdot \sin^2 \alpha}$$

$$\sin^2(\alpha + \frac{\delta}{2}) + 1 - \cos \delta \equiv -10 \cdot \sin^2 \alpha \quad \begin{aligned} \alpha + \delta &\equiv 90^\circ \\ \alpha + \frac{\delta}{2} &\equiv 90^\circ - \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin^2\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) + 1 - \cos f = -10 \cos^2 f$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} + 1 - 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 1 = -10(2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1)^2$$

$$f = \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\cancel{f + 1 - 2f + 1} = -10(2f - 1)^2 = -10(4f^2 - 4f + 1) = \\ = -40f^2 + 40f - 10$$

$$40f^2 - 40f + 10 = 0;$$

$$\Delta = 41^2 - 4 \cdot 40 \cdot 10 = 1681 - 1920 < 0.$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin^2(\alpha + \frac{\alpha}{2})}{\sin^2 \alpha} - 3 \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \frac{\alpha}{2})}$$

$$4 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin(\alpha + \frac{\alpha}{2}) \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \sin^3(\alpha + \frac{\alpha}{2}) - 3 \cdot 4 \cdot \sin^3 \alpha$$

$$4 \cdot \cos^2 f \cdot \sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2}) \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \cos^3 \frac{\alpha}{2} - 12 \cdot \cos^3 f$$
$$f = \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$4 \cdot f^2 (2f^2 - 1)^2 = (2f^2 - 1)^3 - 12 \cdot (2f^2 - 1)^3$$



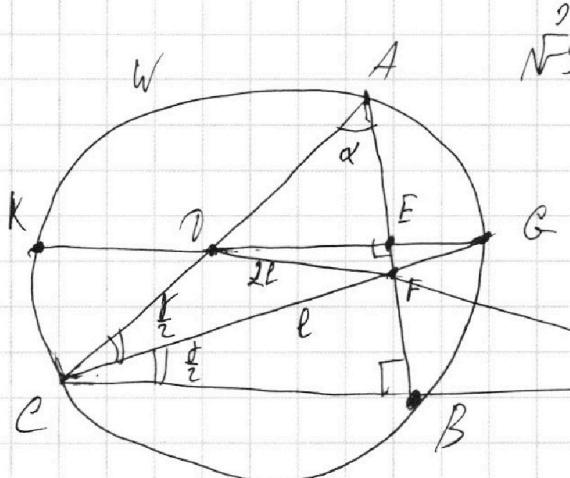
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N^o 5.

$$AC = 2\delta$$

$$\overline{DE} \cap W = G, \angle A = \alpha, \angle B = \beta \\ \angle C = \gamma$$

$$\overline{BG} = \overline{GA} = \gamma \text{ (одинак.)}$$

т.к. $DE \parallel BC$ (ср. углы),
 $\overline{AO} \angle \overline{KC} = \overline{BG} = \gamma$.

$$T = \overline{DF} \cap \overline{BC}; \text{ по т. о биссект.} : \frac{AF}{BF} = \frac{AC}{BC}$$

по т. Менелая для $\triangle ABC$ и сечущий DF :

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{BT}}{\overline{CT}} = 1; \quad \frac{AC}{BC} = \frac{CT}{BT} = 1 + \frac{BC}{BT}$$

$$\frac{AC}{BC}.$$

(сокр к корне).

O-центр окружности W. $OE \cap W = G \Rightarrow OE \perp DE, DE \perp AB \Rightarrow$

$\Rightarrow BC \perp AB$, т.к. $DE \parallel BC$. $\angle ABC = 90^\circ$.

т.к. $\triangle ABC$ - прямой, то О-цент. $AC \Rightarrow \gamma = 0$.

$$OF = l; DF = 2l; \frac{l}{\sin \alpha} = \frac{2\delta}{\sin(\alpha + \frac{\beta}{2})} \text{ (т. синусов } \triangle ACF\text{).}$$

$$(1) \frac{\sin(\alpha + \frac{\beta}{2})}{\sin \alpha} = \frac{2\delta}{l}; \quad \frac{\sin(\frac{\alpha}{2} + 45^\circ)}{\sin \alpha} = \frac{2\delta}{l}.$$

$$\text{т. косинусов } \triangle ODF: \cos \frac{\beta}{2} = \frac{\delta^2 + l^2 - 4l^2}{2\delta l} = \frac{(\frac{\delta}{l})^2 - 3}{2 \cdot \frac{\delta}{l}}$$

(2)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6.

по методу средних: $xyz \geq \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3}}$

ср. Гарн.

$$xyz \geq \frac{21}{x^3 + y^3 + z^3}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{y^3} = z^3 - x^3 + \frac{1}{x^3} \\ \frac{1}{z^3} = z^3 - y^3 + \frac{1}{y^3} \\ \frac{1}{x^3} = x^3 - z^3 + \frac{1}{z^3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{8}{y^3} - \frac{1}{y^3} &= \\ = \left(x + \frac{2}{y} \right) \left(x^2 + \frac{2x}{y^2} + \frac{4}{y^2} \right) & \end{aligned}$$

$$x^3 - \frac{1}{x^3} \geq z^3 - \frac{1}{z^3}$$

$$S = \frac{21}{x^3} + 2z^3 - x^3 - y^3 = \frac{7}{x^3} - x^3 + \frac{14}{x^3} + 2z^3 - y^3 =$$

$$\geq \frac{7}{y^3} - y^3 + \frac{14}{x^3} + 2z^3 - y^3 =$$

=



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

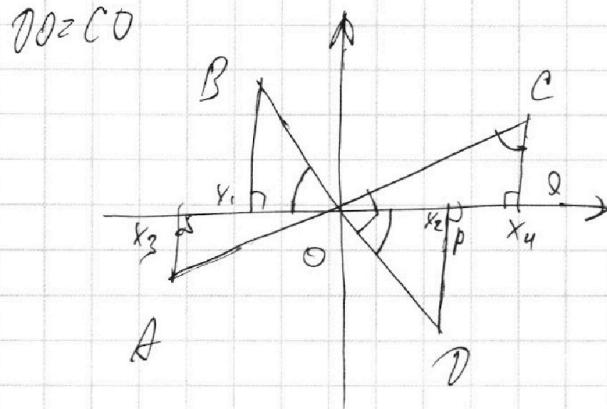
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$tg \alpha = \frac{d}{x_3}$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = 16$$

$$\sin^2 \alpha = 16 - 16 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{d}{\sqrt{17}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$DO = CO$$

$$17(\alpha - 4) = \frac{1}{16} \cdot 17\left(\alpha + \frac{1}{4}\right); 16\alpha - 64 = \alpha + \frac{1}{4}$$

$$DO = \sqrt{17\left(\frac{257}{60} - 4\right)} =$$

$$= \sqrt{17 \cdot \frac{17}{60}} = \frac{17}{\sqrt{60}}; BO = \frac{39}{\sqrt{60}}; AB = \frac{BQ}{\sqrt{2}} = \frac{39}{\sqrt{120}} = \frac{39}{\sqrt{120}} = 17^2$$

$$AB^2 = \frac{39^2}{120}$$

$$1) x^3 - \alpha x = -9x$$

$$x^2 - \alpha + 9 = 0$$

$$x_1 = \pm \sqrt{\alpha - 9}$$

$$2) x^3 - \alpha x = \frac{1}{4}x$$

$$x^2 = \alpha + \frac{1}{4}$$

$$x_2 = \pm \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}}$$

$$DO = \frac{OP}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{\alpha - 9}}{\frac{1}{\sqrt{17}}} = \sqrt{17(\alpha - 9)}$$

~~$$CO = \frac{CQ}{\cos \alpha} = \frac{6Q}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{\alpha + \frac{1}{4}}}{\frac{1}{\sqrt{17}}} =$$~~

$$= \sqrt{17(\alpha + \frac{1}{4})}$$

$$CO = \frac{QO}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{\alpha + \frac{1}{4}}}{\frac{d}{\sqrt{17}}} = \frac{1}{d} \sqrt{17(\alpha + \frac{1}{4})}$$

$$15\alpha = 64 + \frac{1}{4} = \frac{257}{4}$$

$$\alpha = \frac{257}{60}$$

$$\frac{39^2}{4} = \left(\frac{39}{2}\right)^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 + \frac{7}{z^3} = z^3 + \frac{7}{x^3} \quad (x^3 + \frac{7}{y^3})^3 = m$$

~~x^3 + 7/y^3~~

ср. кв. \geq ср. грауз,

\geq ср. реал \geq ср. гориз.

$$x^3 \cdot m + 7x^3 z^3 = y^3 \cdot m + 7x^3 y^3 = z^3 \cdot m + 7y^3 z^3$$

$$m + 7z^3 = y^6 z^3 + 7y^3$$

$$y^3 z^3 / (x^3 - y^3) = 7 / (y^3 z^3)$$

$$xy^2 \geq \underbrace{\left(\frac{7}{x^3} + \frac{7}{y^3} + \frac{7}{z^3} \right)}_{\text{max}} ; \quad \frac{7}{x^3} + \frac{7}{y^3} + \frac{7}{z^3} \leq$$

$$\cancel{xy^2} = \frac{7}{y^3} = z^3 - x^3 + \frac{7}{x^3}$$

$$\frac{7}{z^3} = z^3 - y^3 + \frac{7}{y^3}$$

$$y^3 + \frac{7}{z^3} = z^3 + \frac{7}{x^3} ; \quad z^6 + z^3 / \left(\frac{7}{x^3} - y^3 \right) - 7 = 0$$

$$\vartheta = \frac{49}{x^6} - 14 \frac{y^3}{x^3} + y^6 + 28 \geq 0$$

$$\vartheta' = 196 \cdot y^6 - 4 \cdot 49(y^6 + 28) = \\ = -9 \cdot 49 \cdot 28$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} b^2 = ac \\ abc = 2^{150} \cdot 3^{150} \end{cases} \quad , \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} a, c > 0 \\ a, c < 0 \end{cases}$$

$$b^3 = abc = 2^{150} \cdot 3^{150}$$

$$b = 2^{50} \cdot 3^{50}$$

$$a \cdot c = 2^{100} \cdot 3^{100} \quad , \quad ! a = 2^x \cdot 3^y, \quad 0 \leq x \leq 100, \quad 0 \leq y \leq 100$$

$$101^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 + 1 =$$

$$= 10000 + 200 + 1 =$$

$$= 10201$$

$$\rightarrow 20402$$

$$101^2 = 10000 + 200 + 1 =$$

Суммой отр. корн.

$$2 \cdot 101^2$$

$$\ln^2 x - (x-1) \cdot \ln(2x) + m_2 \cdot \ln x \geq 0$$

$$10g_2 x = \frac{\ln x}{m_2}$$

$$\ln^2 x - x \cdot \ln 2 + m_2 x + m_2 \cdot \ln x \geq 0$$

$$\ln^2 x - x \cdot \ln 2 + m_2 x + m_2 \cdot \ln x \geq 0$$

$$\ln^2 x - x$$

$$\ln x / (\ln x + m_2) \geq x \cdot \ln 2 - m_2 x = x \cdot \ln 2 + x \cdot \ln x - m_2 \cdot \ln x$$

$$\ln^2 x - (x-1)(\ln x + m_2) + m_2 \cdot \ln x \geq 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3 \operatorname{tg} 2x + 1 = \operatorname{tg}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \rightarrow \cancel{37} \quad 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k; x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$$
$$x + \frac{3\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k; x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2 \sin x \cos x}{1 - 2 \sin^2 x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - 2 \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} ; \operatorname{tg}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 + \operatorname{tg} x}$$

$$\frac{6 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} - \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} + 1 = 0 \quad * \operatorname{tg} x \neq x$$

$$\frac{6t - (t-1)^2 + 1-t^2}{1-t^2} = 0 \quad x_0$$

$$6t - t^2 + 2t - t + 1 - t^2 = -2t^2 + 8t = -2(t^2 - 4t) = 0$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ t = \pm 2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{array}{l} x = \pi k \\ x = \arctg(2) + \pi k \end{array}$$

$$x = \arctg(-2) + \pi k.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= 2 \cdot \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \frac{\beta}{2} = \sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)$$

$$\left(\sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \right) \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) = \sin^2\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) - 3 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$-2 \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) = + 6 \cdot \sin^2 \alpha.$$

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= -2 \cdot \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\cos 2\alpha - \cos \beta = 6 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$2 \cdot \cos^2 \alpha - 1 - \cos \beta = 6 - 6 \cdot \cos^2 \alpha$$

$$8 \cdot \cos^2 \alpha = \cos \beta + 7.$$

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = -2 \cdot \sin \sin$$

$$1600 + 80 + 1$$

$$48 \cdot 4 = 96, 2 = 192$$

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

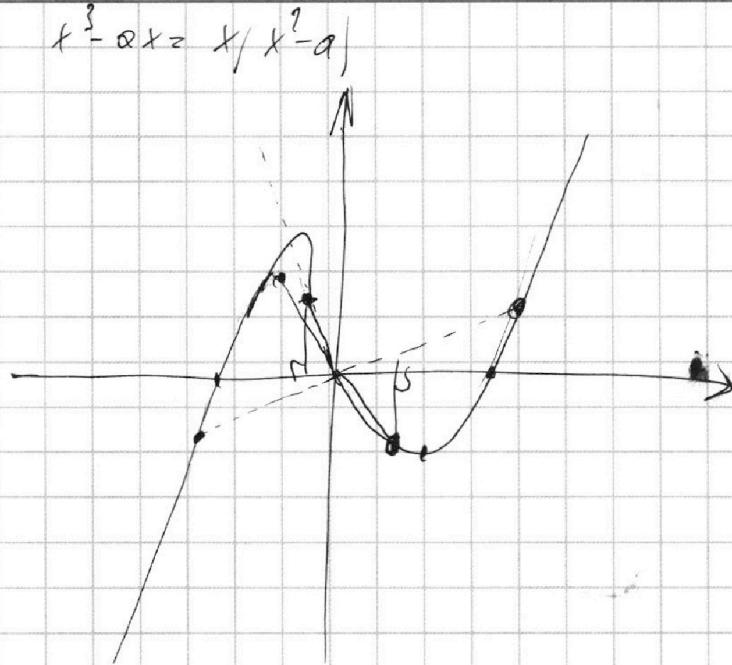
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^3 - ax = 4x$$

$$x^3 - ax + 4x = 0$$

$$x(x^2 - a + 4) = 0$$

$$x^2 = 4 - a > 0$$

$$x = \pm \sqrt{4-a}$$

$$x = \pm \sqrt{a-4}$$

$$a > 4$$

$$x^3 - ax = \frac{1}{4}x$$

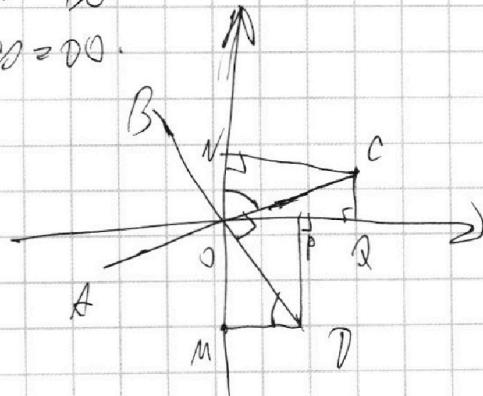
$$x(x^2 - a - \frac{1}{4}) = 0$$

$$x = \pm \sqrt{a + \frac{1}{4}}$$

$$\sqrt{a + \frac{1}{4}} + \sqrt{a - 4} = \sqrt{a - 4} + \sqrt{a + \frac{1}{4}}$$

$$AO = BO$$

$$CO = DO$$



$$\operatorname{tg} \beta = 4; \operatorname{tg} \alpha = 4$$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 4; x^2 = \frac{16}{17}(1-x^2)$$

$$17x^2 = 16; x = \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\sin \alpha$$

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = 4$$

$$1-x^2 = 16x^2; x = \frac{1}{\sqrt{17}} = \cos \alpha$$

$$CO = \frac{ON}{\cos \alpha} = 2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

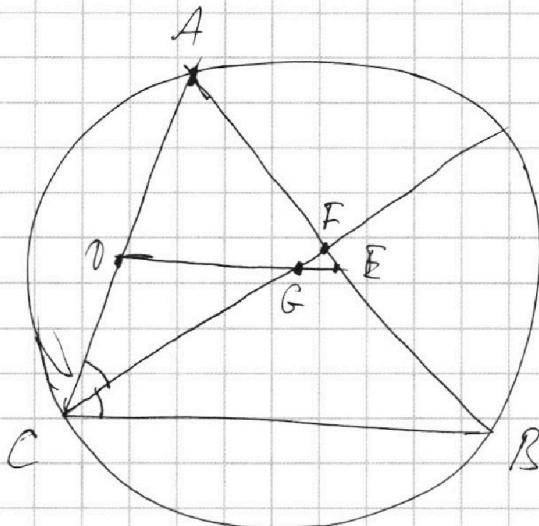
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle AFB = \alpha \quad AK \parallel CG$$

$$\frac{CF}{DF} = \frac{1}{2}$$

$$AK = 2\pi - 3f - 2d$$

$$2B = f + 2\pi - 3f - 2d = 2\pi - 2f - 2d$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{f^2 + d^2 - 4t^2}{2dt}$$

$$= \frac{f^2 - 3t^2}{2dt} = \frac{\frac{f^2}{d} - 3}{\frac{dt}{d}}$$

$$\frac{l}{\sin d} = \frac{2f}{\sin(d + \frac{\alpha}{2})} \neq \frac{\sin(d + \frac{\alpha}{2})}{\sin d} = 2 \frac{f}{l}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cdot \frac{\sin(d + \frac{\alpha}{2})}{\sin d} = \frac{\sin^2(d + \frac{\alpha}{2})}{\sin^2 d} - 3$$

$$2 \cdot \sin d \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin(d + \frac{\alpha}{2}) = \sin^2(d + \frac{\alpha}{2}) - 3 \cdot \sin^2 d$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\ln^2 x - (x-1)(\ln x + \ln 2) + \ln 2 \cdot \ln x \geq 0; \forall x \geq \ln x.$$

$$\cancel{x^2} (x-1)(\ln x + \ln 2)$$

$$\underline{\frac{\ln^2 x}{\ln 2} - (x-1) \cdot \ln(2 \cdot x)} + \ln x \geq 0$$

$$\underline{\underline{x^{\ln x} + x^{\ln 2}}}$$

~~х50~~

$$\ln^2 x - x \ln 2 x + \ln 2 x + \ln 2 \cdot \ln x \geq 0$$

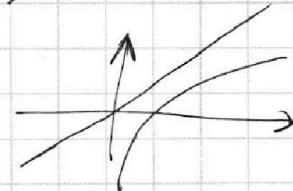
$$\underline{\underline{\ln^2 x}} - \underline{\underline{x \cdot \ln 2}} - \underline{\underline{x \cdot \ln x}} + \underline{\underline{\ln 2}} + \underline{\underline{\ln x}} + \underline{\underline{\ln 2 \cdot \ln x}} \geq 0$$

$$\ln x (\ln x - x + 1) + \ln 2 (\ln x - x + 1) \geq 0$$

$$(\ln x - x + 1) \cancel{+} (\ln x + \ln 2) \geq 0$$

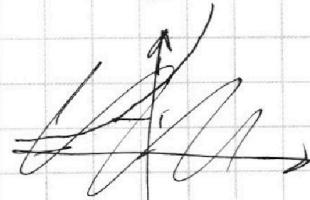
I. $\ln x - x + 1 \geq 0$

$$\ln x + \ln 2 \geq 0 \Rightarrow e^{\ln x} \cdot e^{\ln 2} \geq 1; x \cdot 2 \geq 1, x \geq \frac{1}{2}$$



$$\frac{x \cdot e}{e^x} \geq 1; x \cdot e \geq e^x; x \geq e^{x-1}$$

$$1 \geq e^{-1} \approx 0.367$$



$$x \in (-\infty; \frac{1}{2}]$$

$$x \in [0; \frac{1}{2}] \quad x = \frac{1}{2}.$$

