



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 7



- + 1. [4 балла] Решите уравнение

$$5 \operatorname{tg} 2x - 1 = \operatorname{tg} \left( x - \frac{3\pi}{4} \right).$$

- 3 2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел  $(a; b; c)$  таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение  $abc$  равно  $2^{90} \cdot 19^{90}$ ?

- + 3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2(x+3) - (x+2) \ln(3x+9) + (\ln 3) \ln(x+3) \geq 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции  $y = \frac{x^3}{4} + ax$ . Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой  $y = \frac{2x}{5}$ , а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра  $a$  и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника  $ABC$  описана окружность  $\Omega$ . Точки  $D$  и  $E$  – середины сторон  $AC$  и  $AB$  соответственно,  $CF$  – биссектриса треугольника  $ABC$ . Лучи  $DE$  и  $CF$  пересекаются в точке  $G$ , принадлежащей  $\Omega$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что  $\frac{CF}{DF} = \frac{2}{\pi}$ .

- + 6. [5 баллов] Числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{6}{y^3} = y^3 + \frac{6}{z^3} = z^3 + \frac{6}{x^3}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения  $xyz$ .

- 5 7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит четырёхугольник  $ABCD$ , в котором  $AB = BC = 5$ ,  $AD = DC = \sqrt{10}$ ,  $AC = 2\sqrt{5}$ . Ребро  $SD$  – высота пирамиды. Известно, что  $SA + SB = 5 + 2\sqrt{5}$ . Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней  $ABCD$ ,  $SAB$ ,  $SBC$  и ребра  $SD$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1. \operatorname{tg} 2x - 1 = \operatorname{tg} \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{tg} \left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sin \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)}{\cos \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\sin x \cos \frac{3\pi}{4} - \cos x \sin \frac{3\pi}{4}}{\cos x \cos \frac{3\pi}{4} + \sin x \sin \frac{3\pi}{4}}$$

$$= \frac{-\sin x - \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{-\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x - 1} = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x}$$

$$\frac{10\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} - 1 = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x}$$

$$\frac{10\operatorname{tg} x - 1 + \operatorname{tg}^2 x - (\operatorname{tg} x + 1)^2}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 0$$

$$\frac{10\operatorname{tg} x - 4}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$$

$$x = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$1 - \operatorname{tg}^2 x \neq 0 \rightarrow \text{правда при найденном } x$$

$$\text{Ответ: } x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

Заметим, что  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$  — это корни,  $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$  — тоже корни.

Поэтому далее будем полагать  $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

$$\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2. Заметим, что если

$$a = \frac{b}{9}$$

$$b = 6$$

$$c = 6q$$

то  $abc = b^3 = 2^{90} \cdot 19^{90}$

$$b = 2^{30} \cdot 19^{30}$$

Значит,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  должны быть оба отриц или оба положитель.

$$a = \frac{b^2}{c} = \frac{2^{60} \cdot 19^{60}}{c}, \text{ тогда } 2^{60} \cdot 19^{60} : c, \text{ т.е. } c = 2^k \cdot 19^l$$

$$0 \leq k \leq 60$$

$$0 \leq l \leq 60$$

(если  $c > 0$ )

Тогда вариантов  $(61 \cdot 2)$

Если  $c < 0$ , то вариантов столько же

Тогда ответ:  $2 \cdot 61^2 = 2 \cdot 3721 = 7442$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3.  $\ln^2(x+3) - (x+2) \ln(3x+9) + (\ln 3) \ln(x+3) \geq 0$ ,  $t = x+3$ ,  $t > 0$ , т.е.  $x > -3$

$$\ln^2 t - (t-1)(\ln 3 + \ln t) + (\ln 3) \ln t \geq 0$$

~~$$\ln^2 t - (\ln 3)t + t \ln t + \ln 3 + \ln t + (\ln 3) \ln t \geq 0$$~~

~~$$\ln t (\ln t + \ln 3) - (\ln t + \ln 3)(t-1) \geq 0$$~~

$$(\ln t + \ln 3)(\ln t - t + 1) \geq 0$$

$$\ln(3t)(\ln t - t + 1) \geq 0$$

По методу рационализации  $\ln(3t)$  можно заменить на  $(3t-1)$ ,  
т.к.  $e > 1$ , и знак будет таким же  
 $(3t-1)(\ln t - t + 1) \geq 0$

~~$$\ln t - t + 1 \geq 0$$~~

~~$$\ln t + \ln e \geq t$$~~

~~$$\ln(et) \geq \ln e^t$$~~

~~$$et \geq e^t$$~~

~~$$t \geq e^{t-1}$$~~

$$\ln t - t + 1 \geq 0$$

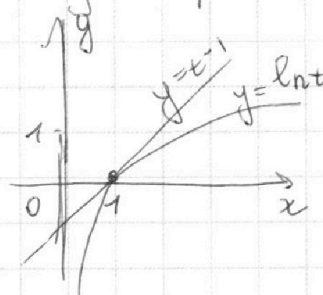
$$\ln t \geq t - 1$$

$$\ln t = t - 1$$

Замечим, что  $t = 1$  — корень.

$$(\ln t)' = \frac{1}{t} = 1 \text{ в } t = 1$$

С другой стороны, тангенс  
касательной  $y = t - 1$  — это  $1$  (угол  $45^\circ$ )  
т.е.  $y = t - 1$  касается  $y = \ln t$   
в  $1$ , а значит других корней  
нет; т.к.  $y = t - 1$  растет быстрее.



Тогда при  $t > 1$   $\ln t < t - 1$ ;  
 $t < 1$   $\ln t < t - 1$   
 $t = 1$   $\ln t = t - 1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3 (продолжение)

отрезок выбранный $t$	$(-\infty, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}, 1)$	1	<del><math>\frac{1}{3}</math></del>	$(1, +\infty)$
$3t-1$	-	0	+	+	<del><math>\neq 0</math></del>	+
$\ln t + 1$	-	-	-	0	HA	-
Итого	+	0	-	0		-

$$3t-1=0$$
$$t=\frac{1}{3}$$

Значит, нужно  $t \in (-\infty, \frac{1}{3}] \cup \{1\}$

$$x+3 \leq \frac{1}{3}$$
$$x \leq -\frac{8}{3}$$

$$x+3=1$$
$$x=-2$$

Но по ОДЗ  $x+3 > 0$   
 $x > -3$

Ответ:  $(-3, -\frac{8}{3}] \cup \{-2\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

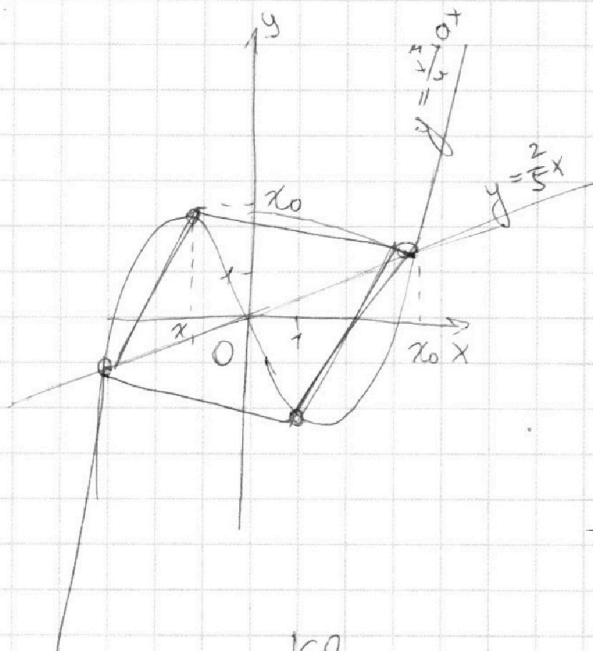
1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4.



Пусть координата по  $x$  верхней левой вершины равна  $x_0$ .

Тогда:

$$\frac{2}{5}x_0 = \frac{x_0^2}{4} + ax_0$$

$$x_0 \left( \frac{x_0^2}{4} + a - \frac{2}{5} \right) = 0$$

$x_0 = 0$   
невозможно,  
т.к. квадрат —  
не точка

$$\frac{x_0^2}{4} + a - \frac{2}{5} = 0$$

$$4a = \frac{8}{5} - x_0^2$$

Тогда  $x_0^2 = \frac{8}{5} - 4a$

Квадрат — фигура симметричная, поэтому если  $x_1$  — координата верхней правой вершины,

то 
$$\frac{x_1^2}{4} + ax_1 = x_0$$

И более того, уравнение этой диагонали:

$$y = -\frac{5}{2}x$$

Тогда  $-\frac{5}{2}x_1 = x_0 \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{5}x_0$

Подставим:

$$\frac{\left(-\frac{2}{5}x_0\right)^2}{4} + a\left(-\frac{2}{5}x_0\right) = x_0$$

$$-\frac{8}{125} \frac{x_0^3}{4} \Rightarrow a \frac{2}{5} x_0 = x_0$$

$$\frac{2}{5}a = -x_0 \left( 1 + \frac{2x_0^2}{125} \right)$$

Подставим  $x_0^2 = \frac{8}{5} - 4a$

$$\frac{2}{5}a = -x_0 \left( 1 + \frac{2}{125} \left( \frac{8}{5} - 4a \right) \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4 (продолжение)

$$-\frac{2}{125}x_0^3 + a\left(-\frac{2}{5}x_0\right) = x_0$$

$$-\frac{2}{5}a = \frac{2}{125}x_0^2 = \frac{2}{125}\left(\frac{8}{5} - 4a\right)$$

$$-\frac{2}{5}a = \frac{16}{5^4} - \frac{8}{125}a$$

$$-\frac{42}{125}a = \frac{16}{5^4}$$

$$a = \frac{16}{5^4} \frac{5^3}{(-42)} = -\frac{8}{105}$$

Найдем  $x_0$ :

$$x_0 = \sqrt{\frac{8}{5} - 4a} = \sqrt{\frac{8}{5} + \frac{32}{105}} = \sqrt{\frac{200}{105}} \\ = \sqrt{\frac{40}{21}}$$

$$\text{А значит } x_1 = -\frac{2}{5}x_0 = -\frac{2}{5}\sqrt{\frac{40}{21}} = -\frac{4}{5}\sqrt{\frac{400}{21}} \\ = -\sqrt{\frac{32}{105}}$$

Значит, теперь мы можем найти  $\frac{1}{2}$  диаметра.

$$\frac{1}{2}d = \sqrt{\frac{32}{205} + \frac{40}{21}} = \sqrt{\frac{32+200}{105}} = \sqrt{\frac{232}{105}}$$

А площадь — это половина произведения диаметров.

$$S = \frac{1}{2}d^2 = \frac{1}{2}4\frac{232}{105} = \frac{464}{105}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{8}{105}, \frac{464}{105}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

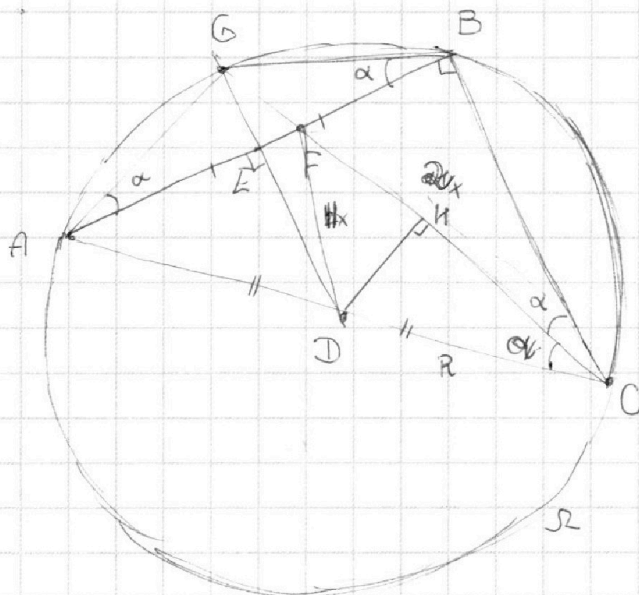
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



5.



Дано:  
 $AE = EB$   
 $AD = DC$   
 $CF$  — биссектриса  
 $GE \perp \Omega$   
 $CF/DF = 2/1$   
 Найти:  
 $\angle A, \angle B, \angle C$

Решение:

Т.к.  $GE \perp \Omega$ , то  $\angle GCB = \angle GAB = \angle ACG = \angle ABG$ , но  $CF$  — биссектриса, тогда  $\angle GAB = \angle GBA \Rightarrow \triangle AGB$  — равнобедренный

Тогда  $GE \perp AB$  (т.к.  $GE$  — медиана)  $\Rightarrow AB \perp BC$ , т.к.  $BC \parallel DE$  (как средняя линия) Тогда  $\angle B = 90^\circ$

Заметим, что  $AC$  — диаметр, т.к.  $\angle B = 90^\circ$  и опирается на него

Тогда посмотрим на  $\triangle DHC$ , где  $DH \perp BC$  и  $H \in BC$ .

$DC$  — диаметр окружности, описанной вокруг этого треугольника.

$$\frac{DH}{\sin \alpha} = \frac{DC}{2} = \frac{HC}{\sin(90^\circ - \alpha)}$$

"  $\cos \alpha$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$T \text{ or } \alpha$   $\frac{DI}{\sin \alpha} = \frac{DC}{2} = \frac{AC}{\cos \alpha}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$6. \quad x^3 + \frac{6}{y^3} = y^3 + \frac{6}{z^3} = z^3 + \frac{6}{x^3}$$

$$x^3 + \frac{6}{y^3} = y^3 + \frac{6}{z^3}$$

$$x^3 - y^3 = 6 \left( \frac{1}{z^3} - \frac{1}{y^3} \right) = 6 \left( \frac{y^3 - z^3}{y^3 z^3} \right)$$

$$y^3 + \frac{6}{z^3} = z^3 + \frac{6}{x^3}$$

$$y^3 - z^3 = 6 \left( \frac{1}{x^3} - \frac{1}{z^3} \right) = 6 \left( \frac{z^3 - x^3}{z^3 x^3} \right) \text{ по аналогии}$$

$$x^3 - y^3 = 36 \frac{z^3 - x^3}{x^3 y^3 z^6}$$

$$x^3 + \frac{6}{y^3} = z^3 + \frac{6}{x^3}$$

$$z^3 - x^3 = 6 \left( \frac{1}{y^3} - \frac{1}{x^3} \right) = 6 \frac{x^3 - y^3}{x^3 y^3}$$

$$x^3 - y^3 = 216 \frac{x^3 - y^3}{x^6 y^6 z^6}$$

$$(x^3 - y^3) \left( 1 - \frac{216}{x^6 y^6 z^6} \right) = 0$$

$$x^3 - y^3 = 0 \quad \text{или} \quad 1 - \frac{216}{x^6 y^6 z^6} = 0$$

$$x^3 = y^3 \\ x = y \text{ — невозможно по уи.}$$

$$x^6 y^6 z^6 = 216$$

$$(xyz)^2 = 6$$

$$xyz = \sqrt{6} \quad \text{или} \quad xyz = -\sqrt{6} //$$

Ответ:  $-\sqrt{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

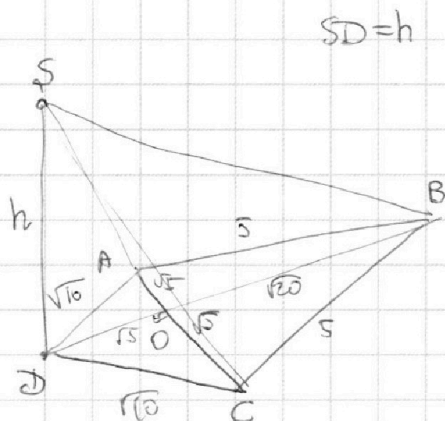
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



7.



$$SD = h$$

ABCD — ромб.

Поэтому в центре симметрии  $AO = OC \Rightarrow$

$$BO \perp AC$$

$$\text{Тогда } BO = \sqrt{25 - 5} = \sqrt{20}$$

$$DO = \sqrt{10 - 5} = \sqrt{5}$$

$$SA = \sqrt{40 + h^2}$$

$$(\sqrt{5} + \sqrt{20})^2 = (\sqrt{5} \cdot 3)^2 = 45$$

$$SB = \sqrt{45 + h^2}$$

$$SA + SB = 5 + 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{10 + h^2} + \sqrt{45 + h^2} = 5 + 2\sqrt{5}$$

$$45 + h^2 = (5 + 2\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{10 + h^2}(5 + 2\sqrt{5}) + 10 + h^2$$

$$35 = 25 + 20\sqrt{5} + 20 - 2\sqrt{10 + h^2}(5 + 2\sqrt{5})$$

$$2\sqrt{10 + h^2}(5 + 2\sqrt{5}) = 10 + 20\sqrt{5}$$

$$4(10 + h^2)(25 + 20\sqrt{5} + 20) = 100$$

$$+ 400\sqrt{5} + 2000 + 2000$$

$$(40 + h^2)(25 + 20\sqrt{5} + 20) = 2100 + 400\sqrt{5}$$

$$h^2 = \frac{2100 + 400\sqrt{5} - 40}{45 + 20\sqrt{5}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Тогда площадь основания:

$$S = \frac{1}{2} (\sqrt{20} + \sqrt{5}) \cdot 2\sqrt{5} = 10 + 5 = 15$$

$$2h = \sqrt{\frac{2(100 + 400\sqrt{5})}{4S + 20\sqrt{5}}} - \sqrt{20} = \sqrt{20 - 40}$$





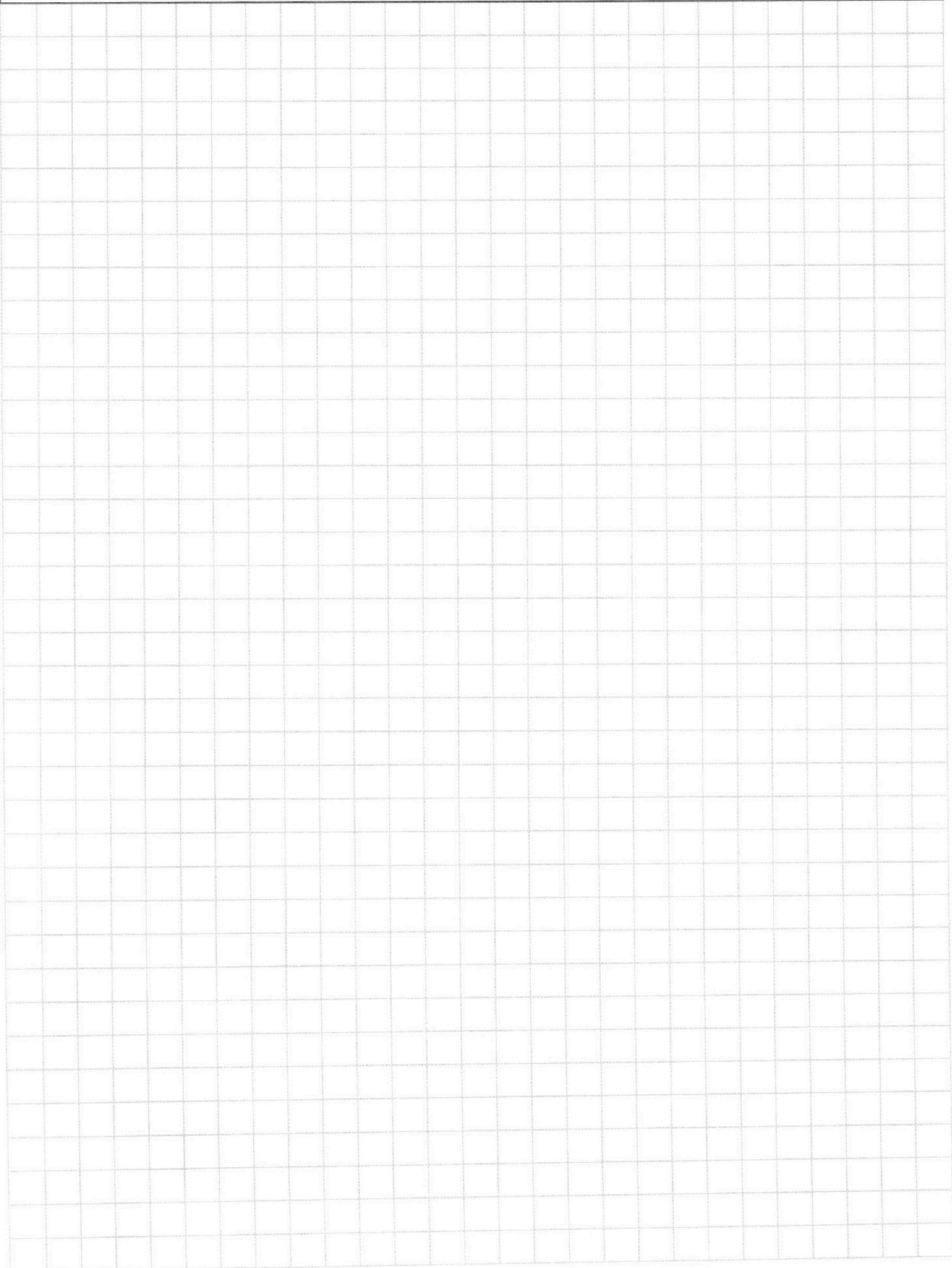
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

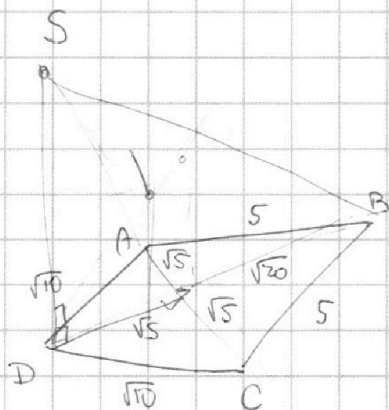
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(\sqrt{5} + 2\sqrt{5})^2 = (\sqrt{5} + 2\sqrt{5})^2 + 20\sqrt{5}$$

$$SA + SB = 5 + 2\sqrt{5}$$



$$SA = \sqrt{10+h^2}$$

$$SB = \sqrt{45+h^2}$$

$$\sqrt{10+h^2} + \sqrt{45+h^2} = 5 + 2\sqrt{5}$$

$$\cos X = 0$$

$$X = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\text{tg } \pi$$

$$-1 = \text{tg} \left( -\frac{3\pi}{4} \right)$$

$$-1 = \left( \frac{2\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$\frac{2 \cdot 61}{61} = \frac{61}{61}$$

$$\frac{3721}{7442}$$

$$45+h^2 = (5+2\sqrt{5})^2 - 10+h^2$$

$$(25 + 20\sqrt{5} + 20)$$

$$45+h^2 = -2(5+2\sqrt{5})\sqrt{10+h^2} + 10+h^2$$

$$5 -$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

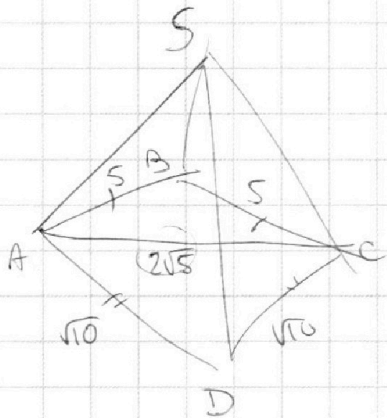
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^3 + \frac{6}{y^3} = y^3 + \frac{6}{z^3} = z^3 + \frac{6}{x^3}$$

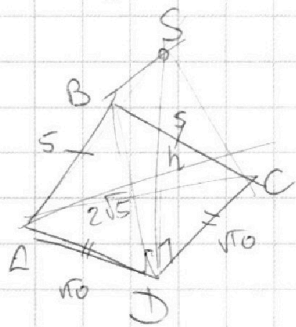
$$xyz \rightarrow \min$$



$$x^3 - y^3 = 6 \left( \frac{1}{z^3} - \frac{1}{y^3} \right)$$

$$= 36 \left( \frac{\frac{1}{x^3} - \frac{1}{z^3}}{z^3 y^3} \right)$$

$$\sqrt{10 + h^2} + \sqrt{45 + h^2} = 5 + \sqrt{10}$$



$$z^3 - y^3 = 6 \left( \frac{1}{z^3} - \frac{1}{x^3} \right)$$

$$(\sqrt{5 + 10})^2 = 25 + 2 \cdot 10 = 45$$

$$x^3 - y^3 = 36 \left( \frac{z^3 - x^3}{x^3 z^6 y^3} \right)$$

$$x^2 z^2 y^2 = 6$$

$$SA + SB = 5 + 2\sqrt{5}$$

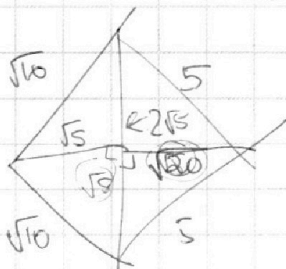
$$z^3 - x^3 = \frac{6}{y^3} - \frac{6}{x^3}$$

$$2\sqrt{5} = 5$$

$$10 = 5 +$$

$$(x^3 - y^3) \left( 1 - \frac{216}{x^6 z^6 y^6} \right)$$

$$216 \frac{(x^3 - y^3)}{x^3 y^3}$$



$$x^3 - y^3 = 216$$

$$\frac{(x^3 - y^3)}{x^6 z^6 y^6}$$



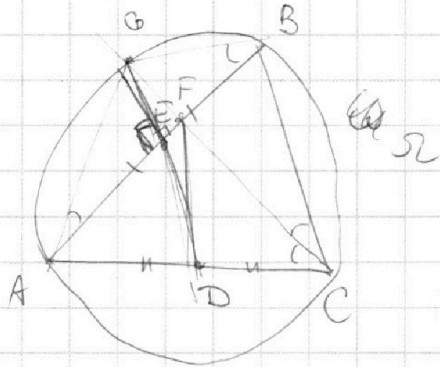
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

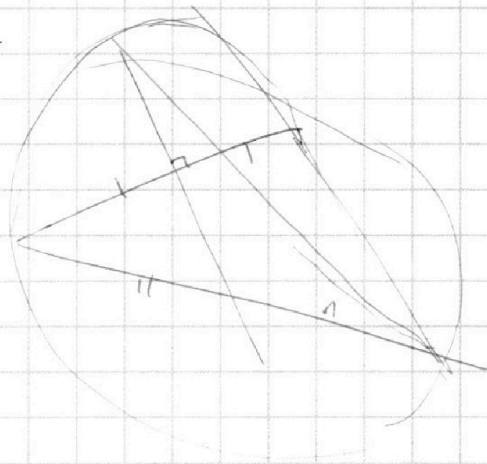
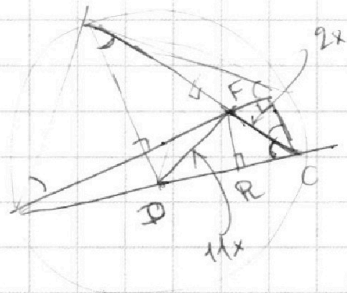
- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



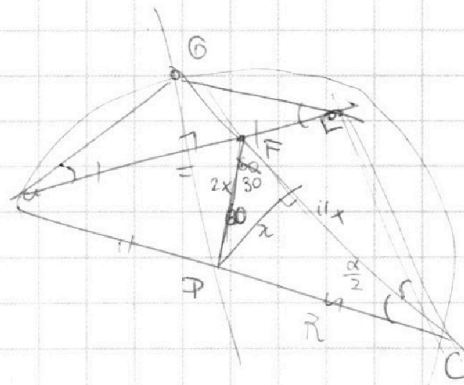
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CF}{DF} = \frac{2}{11}$$



$$\frac{CF}{DF} = \frac{DC}{DC}$$



$$\frac{2x}{\sin \frac{x}{2}} = 2R$$

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{x}{11x - \frac{5}{2}x}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 + \frac{6}{y^3} = y^3 + \frac{6}{z^3} = z^3 + \frac{6}{x^3} \quad (xyz)^3$$

$$x \frac{6}{y^3} + \frac{6}{z^3} = y^3$$

$$x^3 + \frac{6}{y^3} - y^3 - \frac{6}{z^3} = 0$$

$$y^3 + \frac{6}{z^3} - z^3 + \frac{6}{x^3} = 0$$

$$x^3 - y^3 = 6 \left( \frac{1}{z^3} - \frac{1}{y^3} \right)$$

$$(x^3 - y^3) + 6 \left( \frac{1}{y^3} - \frac{1}{z^3} \right) = 0$$

$$\checkmark (y^3 - z^3) + 6 \left( \frac{1}{z^3} - \frac{1}{x^3} \right) = 0$$

$xyz \rightarrow \min$   
 $1/2/3/6/2$   
 $\varphi$

$$\frac{z^3 - y^3}{z^3 y^3} = 6 \left( \frac{1}{z^3} - \frac{1}{x^3} \right)$$

$$6 \frac{6 \left( \frac{1}{z^3} - \frac{1}{x^3} \right)}{z^3 y^3} + x^3 - y^3 = 0$$

$$\frac{36}{z^6 y^3} - \frac{36}{x^3 y^3 z^3} + x^3 - y^3 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1    2    3    4    5    6    7  
                 

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{8x^3}{125} + a\left(-\frac{2}{5}x^0\right) = x^0$$

$$-\frac{2}{5}a = \frac{2}{125}$$

$$\begin{array}{r} 2^1 \\ 1 \quad 3 \\ \hline 16 \quad 3 \\ 1 \quad 32 \end{array}$$

$$\frac{40}{21}$$

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}d\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1.  $5 \operatorname{tg} 2x - 1 = \operatorname{tg} \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$  Заметим, что  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$  - корень

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \quad 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$

$$\operatorname{tg} \left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sin \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)}{\cos \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\sin x \cos \frac{3\pi}{4} - \cos x \sin \frac{3\pi}{4}}{\cos x \cos \frac{3\pi}{4} + \sin x \sin \frac{3\pi}{4}}$$

$\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

сокращаем, т.е.  $\cos x = 0$  при  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,

$$= \frac{-\sin x - \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{-\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x - 1} = -\frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1} = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x}$$

$$5 \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} - 1 = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x}$$

$$\frac{10 \operatorname{tg} x - 1 + \operatorname{tg}^2 x - (\operatorname{tg} x + 1)^2}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 0$$

$$\frac{10 \operatorname{tg} x - 1 + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 1}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 0$$

~~$$\frac{10 \operatorname{tg} x - 1}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 0$$~~

$$\frac{10 \operatorname{tg} x - 4}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 0$$

$$\begin{cases} 10 \operatorname{tg} x - 4 = 0 \\ 1 - \operatorname{tg}^2 x \neq 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

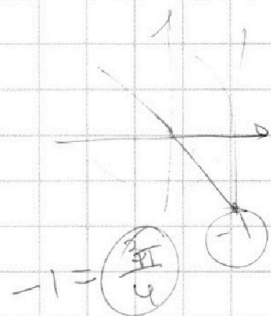
$$x = \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{5}\right) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x \neq 1$$

$$x \neq \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$\operatorname{tg} x \neq -1$$

$$x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k$$



$$\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 2\pi k$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

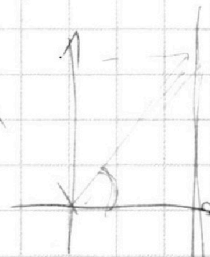


$$5 \operatorname{tg} 2x = 1 = \operatorname{tg}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$5 \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 5 \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \quad \cos^2 x = 5 \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$5 \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} - 1 = \operatorname{tg}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\frac{10 \operatorname{tg} x - 1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\operatorname{tg}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$



$$\frac{\sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\sin x \cos \frac{3\pi}{4} - \cos x \sin \frac{3\pi}{4}}{\cos x \cos \frac{3\pi}{4} + \sin x \sin \frac{3\pi}{4}}$$

$$-(\operatorname{tg} x + 1) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x}$$

$$\frac{-(\operatorname{tg} x + 1)}{\operatorname{tg} x - 1} (1 - \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} x)$$

$\cos x$

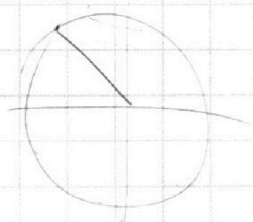
$$\frac{-\sin x - \cos x}{\sin x - \cos x} \cos x$$

$$10 \operatorname{tg} x - 1 - (1 + \operatorname{tg} x)^2$$

$$\cos \frac{\pi}{3} \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{-\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x - 1}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{4} =$$



$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c$

$a \neq 9$

$$b = aq$$

$$c = aq^2 = bq$$

$$a = \frac{b}{q}$$

$$c = qb$$

$$abc = 2^{90} \cdot 19^{90}$$

$$a \cdot aq \cdot aq^2$$

$$a^3 q^3 = 2^{90} \cdot 19^{90}$$

$$b = \frac{a^3}{q^3} = 2^{30} \cdot 19^{30}$$

$$ac = 2^{60} \cdot 19^{60}$$

$- - +$   
 $- + -$   
 $+ + -$

$$b = 2^{30} \cdot 19^{30}$$

$$c \sim \sqrt{b}$$

$$\frac{b^2}{c} = a$$

$$c = \sqrt{2^{30} \cdot 19^{30}}$$

$$\frac{b^2}{c} = 2^2 \cdot 19^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\ln^2(x+3) - (x+2)\ln(3x+9) + (\ln 3)\ln(x+3) \geq 0 \quad t = x+3$$

$$t-1 = x+2$$

$$\ln^2 t - (x+2)(\ln 3 + \ln t) + (\ln 3)\ln t \geq 0$$

$$\ln^2 t - (t-1)(\ln 3 + \ln t) + \ln 3 \ln t \geq 0$$

$$\ln^2 t - (\ln 3)t + \ln 3 - \ln t + t + \ln t + \ln 3 \ln t \geq 0$$

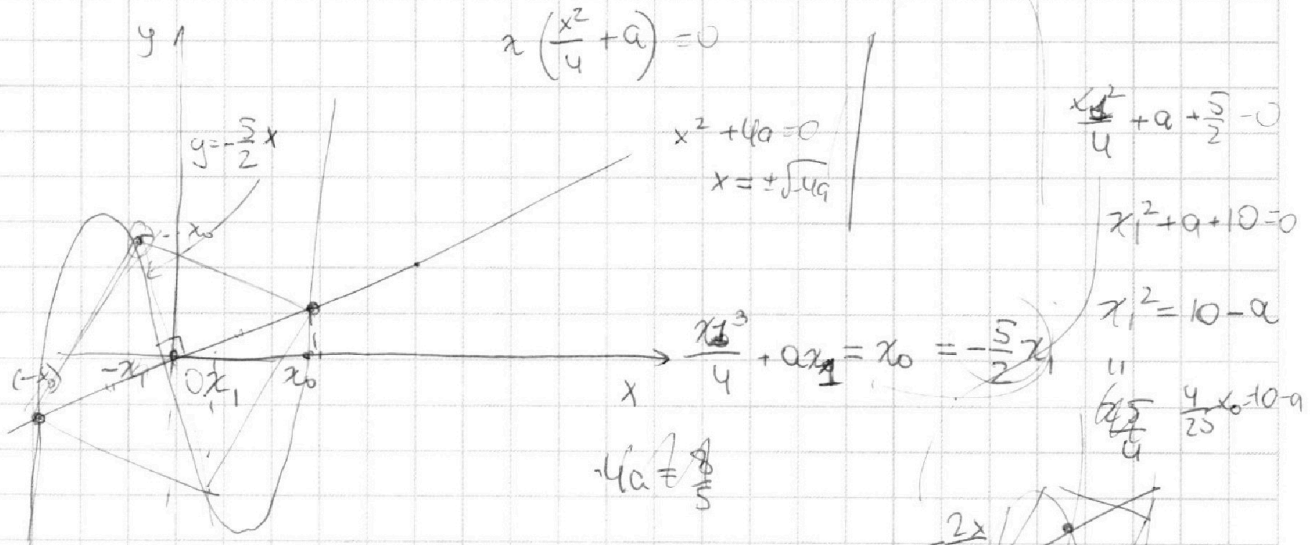
$$\ln t + \ln e \geq t \quad -t(\ln 3 + \ln t) - (\ln 3 + \ln t) + \ln t(\ln t + \ln 3)$$

$$\ln(3t) \quad 3t > 1 \quad \oplus$$

$$e^t \geq e^t \quad 3t = 1 \quad 0$$

$$3t - 1 \quad \ominus$$

$$\ln^2(t+1) - \ln 3t - \ln(t+1) \cdot t + (\ln 3)\ln(t+1) \geq 0$$



$$\frac{(-x_0)^3}{4} + a(-x_0) = \frac{2}{5}(-x_0)$$

$$\frac{x_0^3}{4} + ax_0 = \frac{2}{5}x_0$$

$$x_0 \left( \frac{x_0^2}{4} + a - \frac{2}{5} \right) = 0$$

$$x_0^2 = \frac{8}{5} - 4a$$

$$4a = \frac{8}{5} - x_0^2$$

$$y = \frac{2x}{5}$$

$$y = \frac{x^3}{4} + ax$$