



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x , y , z удовлетворяют равенствам

$$5x - y = 3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA , AB , BC в точках D , E , F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = \sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1



2



3



4



5



6



7



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$ab : 3^{14} 7^{13}$$

$$bc : 3^{19} 7^{12}$$

$$ac : 3^{23} 7^{12}$$

$\Downarrow$

$$ab \cdot bc \cdot ac : 3^{14+19+23} \cdot 7^{13+12+12}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 3^{56} \cdot 7^{36}$$

$$\sqrt{a^2 b^2 c^2} : \sqrt{3^{56} \cdot 7^{36}}$$

$$abc : 3^{28} \cdot 7^{36}$$

Т.е. наименьшее возможное значение выражения $abc = 3^{28} 7^{36}$

Ответ: $3^{28} 7^{36}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b \in \mathbb{N}$

$\frac{a}{b}$ - несокр.

$$\frac{a+b}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{\cancel{m}A}{\cancel{m}B} = \frac{m\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m}\right)}{m\left(\frac{a^2}{m} - \frac{2ab}{m} + \frac{b^2}{m}\right)} =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} = 5-6x, \quad | \cdot (\sqrt{3x^2-5x+6} + \sqrt{3x^2+x+1})$$

$$\textcircled{23}: \begin{cases} 3x^2-5x+6 \geq 0 \\ 3x^2+x+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$D_1 = 25 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = 25 - 72 = -47 < 0$$

корней нет. Т.к. всегда верно.
 $3x^2-5x+6 > 0$

$$D_2 = 1 - 4 \cdot 3 = -11 < 0 \text{ корней нет.}$$

Т.к. всегда верно $3x^2+x+1 > 0$.

$$x \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} (3x^2-5x+6) - (3x^2+x+1) &= (5-6x)(\sqrt{3x^2-5x+6} + \sqrt{3x^2+x+1}) \\ -6x+5 &= (5-6x)(\sqrt{3x^2-5x+6} + \sqrt{3x^2+x+1}) \\ 1 &= \sqrt{3x^2-5x+6} + \sqrt{3x^2+x+1} \end{aligned}$$

Вернемся к исходному уравнению!

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2-5x+6} + \sqrt{3x^2+x+1} = 1 \\ \sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} = 5-6x. \end{cases} \quad \textcircled{+}$$

$$2\sqrt{3x^2-5x+6} = 6-6x$$

$$\sqrt{3x^2-5x+6} = 3-3x$$

$$\sqrt{3x^2-5x+6} = 3-3x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 3x^2 - 5x + 6 = (3 - 3x)^2 \\ 3 - 3x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ 3x^2 - 5x + 6 = 9x^2 - 18x + 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ 6x^2 - 13x + 3 = 0. \end{cases}$$

$$D = 169 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = 169 - 72 = 97.$$

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{97}}{6}.$$

$$\frac{13 - \sqrt{97}}{6} \quad \vee \quad /$$

$$13 - \sqrt{97} \vee 6.$$

$$\cancel{59} \vee 7 \vee \sqrt{97}$$

$$49 < \sqrt{97}.$$

$$\frac{13 - \sqrt{97}}{6} < 1.$$

$$x \in \left\{ \frac{13 - \sqrt{97}}{6} \right\}$$

$$\underline{\text{Ответ:}} \quad \frac{13 - \sqrt{97}}{6}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

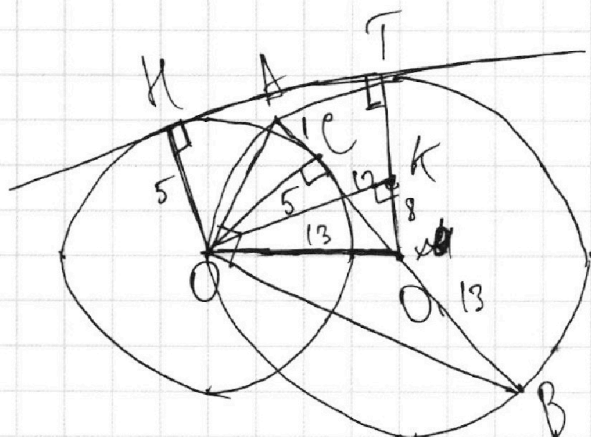
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Т.к. AB - диаметр, то O_1A и O_1B - радиусы

$$O_1 A = O_1 B = \frac{AB}{2} = \frac{AC+CB}{2} = \frac{1+25}{2} = 13$$

$$O, C = 13 - 1 = 12$$

2 $\angle AOB = 90^\circ$ как центр на диаметра.

2 $\angle AOB = 90^\circ$ как центр на диаметра.
Тогда в $\triangle AOB$ OD — мед., т.к. $OD = AO = OB$.

3. $\angle O C Q = 90^\circ$, т.к. AC — кас.

В $\triangle OCA$ по с. Пифагора:

$$OC = \sqrt{OD^2 - CD^2} = \sqrt{169 - 144} = 5.$$

и Отметим т. касание Н и Т.

$OH = OA = OC = 5$. как радиус

$O_1 T = O O_1 = 13$, как радиусы

5. Pythagorin Bürosy OK

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

6. $OMTK$ - прямоугольник по теор.
 $KT = OK$

$$OM = TK = 5.$$

$$O_1K = O_1T - TK = 13 - 5 = 8.$$

2 По т. Пифагора для $\triangle OO_1K$:

$$OK^2 + O_1K^2 = OO_1^2$$

$$OK^2 = \sqrt{OO_1^2 - O_1K^2}$$

$$OK = \sqrt{169 - 64} = \sqrt{105}$$

8. По н.б. $KT = OK = \sqrt{105}$

Ответ: $\sqrt{105}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$5x - y = 3z$$

$$\frac{x}{y} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}, \quad x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$$

$$\begin{cases} 5xz - y + 3z \\ \frac{8yz + xz - 15yx}{xyz} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15xy - 8yz - xz = 0 \\ x = \frac{y + 3z}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3y + 8z) \cdot y - 8yz - \frac{y + 3z}{5} \cdot z = 0 \\ x = \frac{y + 3z}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y^2 + yz - \frac{yz}{5} + \frac{3z^2}{5} = 0, \quad / \cdot 5 \\ x = \frac{y + 3z}{5} \end{cases}$$

$$15y^2 - 3z^2 - 4zy - 15y^2 = 0$$

$$D = 16y^2 + 180y^2 = 196y^2$$

$$z_1 = \frac{4y + 14y}{6} = 3y$$

$$z_2 = \frac{4y - 14y}{6} = -\frac{5}{3}y$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x_1 = \frac{y+2y}{5} = 2y$$
$$x_2 = \frac{y-5y}{5} = -\frac{4}{5}y.$$

При $x=2y$, $z=3y$:

$$\frac{25 \cdot 4y^2 - y^2 - 9y^2}{y^2 + 3 \cdot 9y^2} = \frac{90y^2}{28y^2} = \frac{45}{14}.$$

При $x=-\frac{4}{5}y$, $z=-\frac{5}{3}y$:

$$\frac{25 - \frac{16}{25}y^2 - y^2 - \frac{25}{9}y^2}{y^2 + 3 \cdot \frac{25}{9}y^2} = \frac{15 \cdot 9 - 25}{9} \cdot \frac{y^2}{\frac{28}{3}y^2} =$$
$$= \frac{135 - 25}{9} \cdot \frac{3}{28} = \frac{110}{28 \cdot 3} = \frac{55}{42}.$$

$$\frac{45}{14} \cup \frac{55}{42}$$

$$\frac{135}{42} > \frac{55}{42}$$

$\Rightarrow \frac{45}{14} > \frac{55}{42}$ Т.е. найм $\frac{55}{42}$

Ответ: $\frac{55}{42}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Обозначим за S_{AB} - расстояние между А и В, x км/ч - скорость велосипедиста, а y км/ч - скорость мотоциклиста.

$$\begin{cases} \frac{S}{x} = \frac{S}{y} + 1 \\ y \cdot \frac{S}{x} - x - \frac{S}{y} = 49 \end{cases}$$

$$\frac{S}{x+2} = \frac{S}{y+2} + \frac{3}{5}$$

$$\frac{S \cdot y - S \cdot x}{xy} = 1$$

$$\frac{S^2 - Sx^2}{xy} = 49$$

$$\frac{S(y+2) - S(x+2)}{(x+2)(y+2)} = \frac{3}{5}$$

$$S \cdot y - S \cdot x = \dots \quad \begin{cases} S(y-x) = xy \quad (*) \\ \frac{S(y-x)(y+x)}{S(y-x)} = 49 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{S(y-x)(y+x)}{S(y-x)} = 49 \\ \frac{S(y+2) - S(x+2)}{(x+2)(y+2)} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x = 49 - y \\ S \cdot (y - 49 + y) = (49 - y) \cdot y \\ \text{или } 5 \cdot (49 - y) \cdot y = 3(49 - y + 2)(y + 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 49 - y \\ S = \frac{-y^2 + 49y}{2y - 49} \\ 5 \cdot (49y - y^2) = 3(56 - y)(y + 2) \quad (1) \end{cases}$$

$$(1): 245y - 5y^2 = 3(56y - y^2 - 2y + 392)$$

$$245y - 5y^2 = \cancel{168y - 3y} - 3y^2 + 14y + 1176$$

$$2y^2 - 98y + 1176 = 0$$

$$y^2 - 49y + 588 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (7^2)^2 - (2^2 \cdot 4 \cdot 3) \cdot 4 = 7^4 - 2^4 \cdot 3 = \\ &= 7^2(49 - 16 \cdot 3) = 7^2(49 - 48) = 7^2 \\ y_1 &= \frac{49 + 7}{2} = \frac{56}{2} = 28 \\ y_2 &= \frac{49 - 7}{2} = \frac{42}{2} = 21 \end{aligned}$$

$$x_1 = 49 - 28 = 21$$

$x_2 = 49 - 21 = 28$, но мощность будет
величинистой, т.е. $y > x$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y = 28 \\ x = 21 \end{cases}$$

Реш. Подставим в (*)

$$S \cdot (28 - 21) = 28 \cdot 21$$

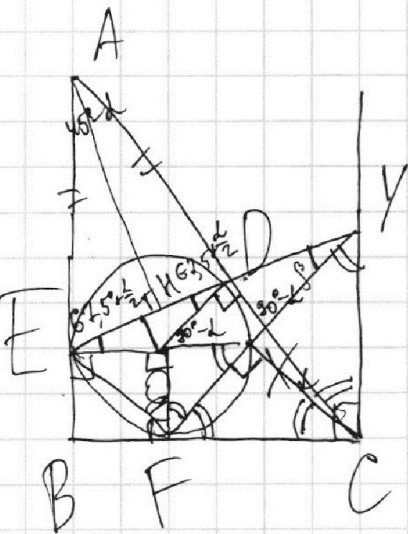
$$S = \frac{28 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3}{4} = 7 \cdot 12 = 84 \text{ км}$$

Т.е. расстояние между А и В 84 км

Ответ: 84 км

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1. EX - диаметр $\Rightarrow ED = OX = R$

$$R = \frac{\sqrt{2}XY}{2} = \frac{XY}{\sqrt{2}}$$

$$XY = \sqrt{2}R$$

2. По Т. Пифагора для $\triangle FOX$:

$$FX = \sqrt{OF^2 + OX^2} = \sqrt{2R^2} = \sqrt{2}R$$

$\Downarrow$

$$FX = XY$$

3. В $\triangle FYC$ - прямоугольн CX - медиана $\Rightarrow$
 $CX = FX = XY = \sqrt{2}R \Rightarrow \triangle FXC$ - р/б.

$$\angle FCE = \angle XCF = 45^\circ \text{ т.к.}$$

$$\angle OFX = \angle OFC = 45^\circ, \text{ как прямоугольн р/б.}$$

$$\angle XFC = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ, \text{ как смежные}$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\angle XCF = \angle XFC = 45^\circ$, как угол при осн.
р/б Δ .

$$\angle FXC = 180^\circ - \angle XCF - \angle XFC = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ \text{ по т. о сумме углов } \Delta.$$



CX — высота и мед.

Значит ΔFYC — р/б с осн CFY

и по т. Пифагора в ΔFXC :

$$FC = \sqrt{FX^2 + XC^2} = \sqrt{2R^2 + 2R^2} = 2R$$



$$FC = CY = 2R$$

5. $FC = DC = 2R$ как кас. провод. из одной точки.

6. $\Delta EOF'$ — р/б прямоугол $\angle OEF = \angle OFE = 45^\circ$.



$$\angle EFY = 90^\circ.$$

$$EF = \sqrt{2R^2} = \sqrt{2}R.$$

7. По т. Пифагора для ΔEFY :

$$EY = \sqrt{EF^2 + FY^2} = \sqrt{2R^2 + 8R^2} = \sqrt{10}R$$

8. По т. о сен!

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$EY \cdot DY = FY \cdot XY$$

$$DY = \frac{FY \cdot XY}{EY}$$

$$DY = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} R^2}{\sqrt{10} R} = \frac{4}{\sqrt{10}} R = \frac{4\sqrt{10}}{10} R = \frac{2\sqrt{10}}{5} R$$

$$ED = EY - DY = \left(\sqrt{10} - \frac{2\sqrt{10}}{5} \right) R = \frac{5\sqrt{10} - 2\sqrt{10}}{5} R = \frac{3\sqrt{10}}{5} R$$

9. В $\triangle AED$ п/с $(AE=AD)$ - проведем высоту $у$ и биссектрису $АН$.

10. По т. кос для $\triangle AED$:

~~$$AD^2 = AE^2 + ED^2 - 2 \cdot AE \cdot ED \cdot \cos \angle AED$$~~

~~$$AD^2 = AD^2 + ED^2 - 2 \cdot AE \cdot ED \cdot \frac{ED}{2AE}$$~~

10. Проведем высоту $у$ и $у$ п/с $\triangle AED$.

11. $\triangle OTD \sim AED$ по 2 углам

$$\frac{AD}{R} = \frac{ED}{2OT} \Rightarrow AD = \frac{ED R}{2OT} = \frac{2\sqrt{10} R^2}{2 \cdot \frac{90}{100} R} = \frac{5\sqrt{10}}{10} R$$

По т. Пифагора $OT = \sqrt{R^2 - \frac{90}{100} R^2} = \frac{5\sqrt{10}}{10} R$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

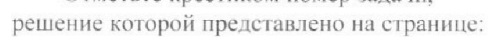
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AD = \frac{ED \cdot R}{2 \cdot OT} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \cdot R \approx \frac{10}{\sqrt{10}} = 3R.$$

12. Те $AD : DC = 3R : 2R = \frac{3R}{2R} = 3:2$

Ответ: 3:2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Велосипедиста позже
моториста - 6

$$\sqrt{169-144} = 5.$$

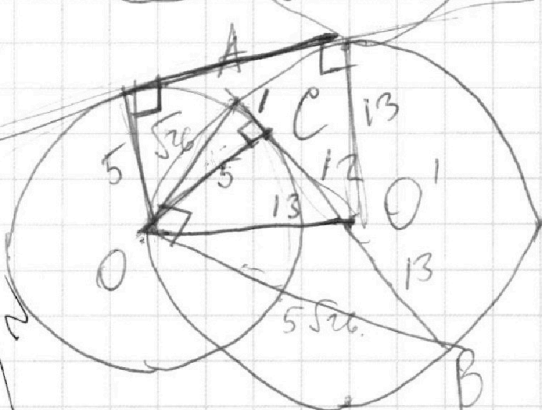
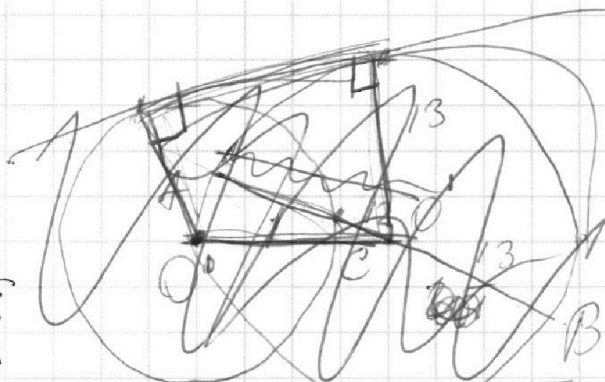
$$25+1 = \sqrt{26} =$$

$$26^2 = 0.26 + 1^2.$$

$$\lambda = \sqrt{26(26-1)} = \sqrt{26 \cdot 25} = 5\sqrt{26}.$$

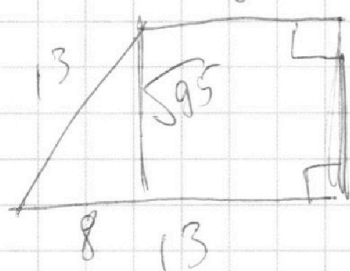
$$\frac{135^\circ + \alpha}{2} = 67.5 + \frac{\alpha}{2}.$$

$$\frac{180^\circ - 45^\circ + \alpha}{2} =$$



90°
45°
1/2

$$20 + 25 \cdot 26 = 26 \cdot 26$$



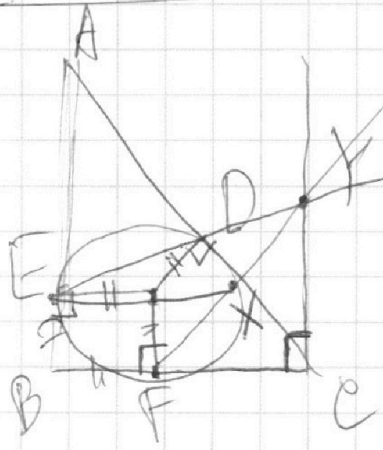
$$\sqrt{169-64} = \sqrt{95}$$

1A

$$175 = 85 \cdot 11$$

$$175 = 85 \cdot 11$$

$$175 = 85 \cdot 11$$



$$EX = \sqrt{2} \cdot Y$$

$$DY \cdot EY = XY \cdot FY$$

$$\angle = 90^\circ$$

$$90^\circ + 190^\circ = 180^\circ - \angle$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab = 3^{14} 7^{13}$$

$$bc = 3^{19} 7^{17}$$

$$ac = 3^{21} 7^{19}$$

$$c = 3^{10} 7^{20}$$

$$b = 3^{10} 7^{21}$$

$$a = 3^{15} 7^{24}$$

$$a = 3^{14} 7^{25}$$

$$a = 3^{14} 7^{26}$$

$$a = 3^{14} 7^{27}$$

$$a = 3^{14} 7^{28}$$

$$a = 3^{14} 7^{29}$$

$$a = 3^{14} 7^{30}$$

$$a = 3^{14} 7^{31}$$

$$a = 3^{14} 7^{32}$$

$$a = 3^{14} 7^{33}$$

$$a = 3^{14} 7^{34}$$

$$a = 3^{14} 7^{35}$$

$$a = 3^{14} 7^{36}$$

$$a = 3^{14} 7^{37}$$

$$a = 3^{14} 7^{38}$$

$$a = 3^{14} 7^{39}$$

$$a = 3^{14} 7^{40}$$

$$x - y = 3z$$

$$x + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$15xy - xz - 8yz = 0$$

$$15xy = xz + 8yz$$

$$(3y + 9z)y = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\right)z + 8yz$$

$$3y^2 + 9zy = \frac{4z}{5} + \frac{3z^2}{5} + 8yz$$

$$3y^2 + 9zy - \frac{4z}{5} - \frac{3z^2}{5} - 8yz = 0$$

$$3y^2 + yz - \frac{4z}{5} - \frac{3z^2}{5} = 0$$

$$15y^2 + yz - 3z^2 = 0$$

$$D = 16z^2 + 180z^2 = 196z^2$$

$$y_1 = \frac{-4z + 14z}{30} = \frac{1}{3}z$$

$$y_2 = \frac{-4z - 14z}{30} = -\frac{4}{5}z$$

$$y = \frac{1}{3}z$$

$$y = -\frac{4}{5}z$$

$$y = \frac{1}{3}z$$

$$y = -\frac{4}{5}z$$

$$y = \frac{1}{3}z$$

$$y = -\frac{4}{5}z$$

$$y = \frac{1}{3}z$$

$$y = -\frac{4}{5}z$$

$$y = \frac{1}{3}z$$

$$y = -\frac{4}{5}z$$

$$5x = y + 3z$$

$$x = \frac{y + 3z}{5}$$

$$x = \frac{y + 3z}{5}$$

$$x = \frac{y + 3z}{5}$$

$$x = \frac{y + 3z}{5}$$

$$x = \frac{y + 3z}{5}$$

$$x = \frac{y + 3z}{5}$$

$$x = \frac{y + 3z}{5}$$

$$x = \frac{y + 3z}{5}$$

$$x = \frac{y + 3z}{5}$$

$$x = \frac{y + 3z}{5}$$

$$x = \frac{y + 3z}{5}$$

$$x = \frac{y + 3z}{5}$$

$$x = \frac{y + 3z}{5}$$

$$x = \frac{y + 3z}{5}$$

$$x = \frac{y + 3z}{5}$$

$$x = \frac{y + 3z}{5}$$

$$x = \frac{y + 3z}{5}$$

$$x = \frac{y + 3z}{5}$$

$$x = \frac{y + 3z}{5}$$

$$x = \frac{y + 3z}{5}$$

$$x = \frac{y + 3z}{5}$$

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

14.

15.

16.

17.

18.

19.

20.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{5+u}(1-u) = \sqrt{5} + u\sqrt{u}$$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x - 1 &= (5-6x)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x - 1}) \\ -6x + 5 &= (5-6x)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x - 1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{5+u} + \sqrt{5} &= 1 \quad \sqrt{5} = 1/R \\ \sqrt{5+u} - \sqrt{5} &= \frac{1}{\sqrt{5+u}} \\ 2\sqrt{5} &= 1-u \\ 1-u &\geq 0 \quad u \leq 1 \\ u &\leq 1 \end{aligned}$$

$$4(3x^2 + x - 1) = (6x - 5)^2 - 2(5 - 6x) + 1$$

$$12x^2 + 4x + 4 = 36x^2 - 60x + 25 - 10 + 12x + 1$$

$$24x^2 - 52x + 2 = 0$$

$$6x^2 - 13x + 3 = 0$$

$$D = 169 - 18 \cdot 4 = 169 - 72 = 97$$

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{97}}{6}$$

$$\frac{13 + \sqrt{97}}{6}$$

$$= \frac{169 + 26\sqrt{97} + 97}{36}$$

$$= \frac{266 + 26\sqrt{97}}{12} = \frac{133 + 13\sqrt{97}}{6}$$

$$= \frac{68 + 18\sqrt{97}}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical work on grid paper, showing a system of equations and various algebraic manipulations. The work is heavily crossed out with a large 'X'.

Initial equations and manipulations:

$$\frac{S}{x} = \frac{S}{y} + 1$$

$$\frac{S}{x+2} = \frac{S}{y+2} + \frac{3}{5}$$

$$\frac{S_y - S_x}{xy} = \frac{1}{xy}$$

$$S_y - S_x = xy$$

$$\frac{S_y}{x} - \frac{S_x}{y} = 49$$

$$\frac{S_y^2}{x^2} - \frac{S_x^2}{y^2} = 49$$

$$S_y + 25 - S_x - 25 = 0$$

$$(x+2)(y+2) = 24$$

$$21(x+y+2) = 24$$

$$2(3x+3y+21) = 2xy$$

$$xy(x+y) = 49 - 49x$$

$$x^2y + xy^2 = 49y - 49x$$

$$y(x-2)(x+2) = -x(y^2+49)$$

Other visible work includes:

$$\frac{36}{60} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{S}{x+2} = \frac{S}{y+2} + \frac{3}{5}$$

$$\frac{S_y - S_x}{xy} = \frac{1}{xy}$$

$$\frac{S_y}{x} - \frac{S_x}{y} = 49$$

$$\frac{S_y^2}{x^2} - \frac{S_x^2}{y^2} = 49$$

$$S_y + 25 - S_x - 25 = 0$$

$$(x+2)(y+2) = 24$$

$$21(x+y+2) = 24$$

$$2(3x+3y+21) = 2xy$$

$$xy(x+y) = 49 - 49x$$

$$x^2y + xy^2 = 49y - 49x$$

$$y(x-2)(x+2) = -x(y^2+49)$$