



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .
5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x - y = 3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .
7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = \sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$$\left. \begin{aligned} ab &= 3^{14} \cdot 7^{13} \cdot p \\ bc &= 3^{19} \cdot 7^{17} \cdot q \\ ac &= 3^{23} \cdot 7^{12} \cdot r \end{aligned} \right\} \text{но условие, где } p; q; r \text{ — целые положительные числа} \\ p; q; r \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} abc &= \sqrt{a^2 b^2 c^2} = \sqrt{3^{14} \cdot 7^{13} \cdot p \cdot 3^{19} \cdot 7^{17} \cdot q \cdot 3^{23} \cdot 7^{12} \cdot r} = \\ &= \sqrt{3^{56} \cdot 7^{42}} \cdot \sqrt{pqr} = 3^{28} \cdot 7^{21} \sqrt{pqr} \end{aligned}$$

при $p=1; q=1; r=1$ условие выполняется:

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{3^5 \cdot 7^4} \quad ac = \frac{c^2}{3^5 \cdot 7^4} = 3^{23} \cdot 7^{12}$$

$$c = 3^{14} \cdot 7^{23} \quad a = 3^9 \cdot 7^{19} \quad b = \frac{3^{14} \cdot 7^{13}}{a} = 3^5 \cdot 7^6$$

такая ситуация возможна

т.к. $abc = 3^{28} \cdot 7^{21} \sqrt{pqr}$, наименьшее abc достигается при
наименьшем $\sqrt{pqr}$, который, в свою очередь, достигается при
 $p=1, q=1, r=1$; тогда $\sqrt{pqr}=1$, а $abc = 3^{28} \cdot 7^{21}$

Ответ: $3^{28} \cdot 7^{21}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{\frac{a}{b}+1}{b\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2-9\frac{a}{b}+1\right)} \quad a \in \mathbb{N} \quad b \in \mathbb{N}$$

Обозначим $\frac{a}{b} = c$, тогда $\frac{c+1}{b(c^2-9c+1)} = \frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$

Если дробь $\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$ можно сократить на m , значит

дробь $\frac{a^2-9ab+b^2}{a+b}$ так же можно сократить на m

$$\frac{a^2+2ab+b^2-11ab}{a+b} = \frac{a+b-11ab}{a+b} \Rightarrow \frac{11ab}{a+b} - \text{сократимая дробь}$$

т.к. дробь $\frac{a}{b}$ - несократима, $\text{НОД}(a, b) = 1 \Rightarrow$

$$\frac{ab}{a+b} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{ab}{a+b} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \Rightarrow 11 \frac{ab}{a+b} = \frac{11}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} - \text{сократимая дробь} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ наибольшее число, на которое можно сократить данную дробь - 11,
значит наибольшее $m = 11$

Ответ: 11

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 3

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

$$3x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

$$3x^2 - 5x + 6 = 0 \quad D = 25 - 4 \cdot 18 < 0 \Rightarrow \text{выражение положительно при любых } x$$

$$3x^2 + x + 1 \geq 0$$

$$\text{выражение } 3x^2 + x + 1 = 0 \quad D = 1 - 4 \cdot 3 < 0 \Rightarrow \text{аналогично}$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} = 5 - 6x + \sqrt{3x^2 + x + 1} \quad |^2$$

$$3x^2 - 5x + 6 = (5 - 6x)^2 + 2(5 - 6x)\sqrt{3x^2 + x + 1} + 3x^2 + x + 1$$

$$\underline{3x^2 - 5x + 6} - \underline{25 + 60x - 36x^2} - \underline{3x^2 - x - 1} = 2(5 - 6x)\sqrt{3x^2 + x + 1}$$

$$-36x^2 + 54x - 20 = 2(5 - 6x)\sqrt{3x^2 + x + 1}$$

$$-36x^2 + 54x - 20 = -2(18x^2 - 27x + 10)$$

$$18x^2 - 27x + 10 = 0$$

$$x = \frac{27 \pm \sqrt{27^2 - 40 \cdot 18}}{2 \cdot 18} =$$

$$27^2 = 3^6 = 729$$

$$40 \cdot 18 = 720$$

$$\sqrt{729 - 720} = 3$$

$$= \frac{27 \pm 3}{2 \cdot 18}$$

$$x_1 = \frac{27+3}{2 \cdot 18} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

$$x_2 = \frac{27-3}{2 \cdot 18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow -36x^2 + 54x - 20 = -2 \cdot 18 \left(x - \frac{5}{6}\right) \left(x - \frac{2}{3}\right)$$

$$-2 \cdot 18 \left(x - \frac{5}{6}\right) \left(x - \frac{2}{3}\right) = 2(5 - 6x)\sqrt{3x^2 + x + 1}$$

$$3(5 - 6x) \left(x - \frac{2}{3}\right) = (5 - 6x)\sqrt{3x^2 + x + 1} \quad | : (5 - 6x), \text{ либо } x = \frac{5}{6}, \text{ либо:}$$

$$(3x - 2) = \sqrt{3x^2 + x + 1}, \quad 3x - 2 \geq 0 \quad x \geq \frac{2}{3} \quad |^2$$

$$(3x - 2)^2 = 3x^2 + x + 1$$

$$9x^2 - 12x + 4 = 3x^2 + x + 1$$

$$6x^2 - 13x + 3 = 0$$

$$D = 169 - 4 \cdot 18 = 97$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{97}}{12} \quad x_1 = \frac{13 + \sqrt{97}}{2} > \frac{2}{3} \Rightarrow \text{удовл.}$$

$$x_2 = \frac{13 - \sqrt{97}}{2} \approx \frac{13 - 10}{2} = \frac{3}{2} < \frac{2}{3} \Rightarrow \text{не удовлетворяет}$$

$$\frac{13 - 9}{12} = \frac{1}{3} > x_2$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{5}{6}; \frac{13 + \sqrt{97}}{12} \right\}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

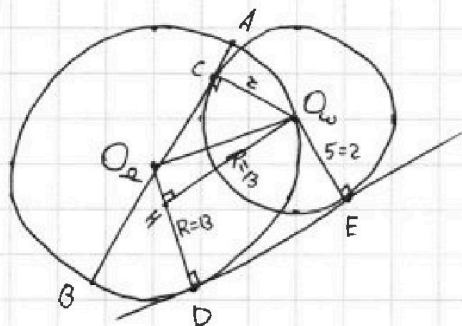
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.



Центры окружностей Ω и ω —
 O_Ω и O_ω соответственно

По условию $AC=1$; $BC=25 \Rightarrow$
 $AC+BC=1+25=26$ — диаметр $\Omega \Rightarrow$
 $R=13$ — радиус Ω

Точки касания общей касательной к окружностям Ω и ω —
 D и E соответственно

Тогда $O_\Omega D = O_\Omega O_\omega = 13$

(AB) — касательная к $\omega \Rightarrow O_\omega C \perp AB$; $O_\omega C = r$ — радиус O_ω

$$O_\Omega C = R - AC = 12$$

Рассмотрим $\triangle O_\omega O_\Omega C$: прямоугольный; $O_\omega C = r$
 $O_\Omega O_\omega = 13 = R$
 $O_\Omega C = 12$

$$\Rightarrow \text{по т. Пифагора } r = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 = O_\omega E$$

$O_\Omega D \perp (ED)$; $O_\omega E \perp (ED) \Rightarrow O_\Omega D \parallel O_\omega E \Rightarrow EO_\omega O_\Omega D$ — трапеция

$$\Rightarrow [ED] = h$$

Проведем $O_\omega H \parallel ED$ $H \in O_\Omega D$ — высота трапеции

$$\text{по т. Пифагора для } \triangle O_\Omega H O_\omega: O_\omega H = \sqrt{O_\Omega O_\omega^2 - O_\Omega H^2} =$$

$$= \sqrt{R^2 - (R-r)^2} = \sqrt{13^2 - (13-5)^2} = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{169 - 64} = \sqrt{105} = ED$$

— общая касательная к окружностям

Ответ: $\sqrt{105}$



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 5.

no
yca.

$$\begin{cases} 5x - y = 3z & (1) \\ \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} & | \cdot xyz \\ 8yz + xz = 15xy & (2) \end{cases}$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{(5x-y)(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{3z(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = z \cdot \frac{3(5x+y) - z}{y^2 + 3z^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{uz (2): } z = \frac{15xy}{8y+x} \\ \text{uy (1): } z = \frac{5x-y}{3} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{45xy}{8y+x} = 5x-y \\ 45xy = (5x-y)(8y+x) \end{array}$$

$$45xy = 40xy + 5x^2 - 8y^2 - xy$$

$$5x^2 - 8y^2 - 6xy = 0$$

$$3y^2 + 6ky - 5x^2 = 0$$

$$Q = 9x^2 + 40x^2 = (7x)^2$$

$$y = \frac{-3x \pm 7x}{8}$$

$$y_1 = -\frac{5}{4}x \quad y_2 = \frac{x}{2}$$

npzu $y_1: z_1 = \frac{5x-y}{3} = \frac{5x + \frac{5}{4}x}{3} =$

$$= \frac{25}{12} x = z_1$$

hpu y_2 : $\boxed{z_2 = \frac{5x - \frac{x}{2}}{3} = 1.5x}$

Подставим найденные значения
для x, y, z в нужное выражение:

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{25x^2 - \left(-\frac{5}{4}x\right)^2 - \left(\frac{25}{12}x\right)^2}{\left(-\frac{5}{4}x\right)^2 + 3\left(\frac{25}{12}x\right)^2} = \frac{25}{12} \cdot \frac{3\left(5 + \left(-\frac{5}{4}\right)\right) - \frac{25}{12}}{\left(-\frac{5}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{25}{12}\right)^2} =$$

$$= \frac{25}{12} \cdot \frac{\frac{45-25}{4} - \frac{25}{12}}{\frac{25}{16} + 3 \cdot \frac{625}{144}} = \frac{25}{12} \cdot \frac{20/3}{25/12 \cdot 7} = \frac{20}{21}$$

$$\frac{1.5x \cdot (3(5+y_2)x - 1.5x)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 3(1.5x)^2} = \frac{1.5(16.5 - 1.5)}{\frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{9}{4}} =$$

$$= \frac{22,5}{7} > \frac{20}{21} \rightarrow \frac{20}{21} - \text{наим. знач.}$$

Auben: $\frac{20}{21}$

 ~~$\frac{1}{6} \times \frac{25}{100} = \frac{25}{600}$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

✎

	$S, \text{ км}$	$v, \text{ км/ч}$	$t, \text{ ч}$
Мотоцикл.	S	v_m	x
Велосипед.	S	v_b	$x+1$

Также по условию:

$$v_b \cdot x + 49 = v_m (x+1)$$

$$(v_b + 7)(y + 0.6) = (v_m + 7)y = S$$

S — расстояние между А и В; v_m — скорость мотоциклиста в I спуске, v_b — скорость велосипедиста в I спуске, x — время, затраченное мотоциклистом на путь в I спуске; y — время, затраченное велосипедистом на путь во II спуске

Согласно условию составим систему уравнений:

$$\begin{cases} (1) & v_m \cdot x = v_b \cdot (x+1) = S \\ (2) & v_b \cdot x + 49 = v_m (x+1) \\ (3) & (v_b + 7)(y + 0.6) = (v_m + 7)y = S \end{cases}$$

$$(2) - (1): 49 - v_b = v_m$$

$$\begin{aligned} (v_m + 7)y &= v_m \cdot x \\ (56 - v_b)y &= (49 - v_b)x \\ \frac{x}{y} &= \frac{56 - v_b}{49 - v_b} \end{aligned}$$

$$(v_b + 7)(y + 0.6) = v_b y + 0.6 v_b + 7y + 4.2 = (v_m + 7)y = v_m y + 7y$$

$$(v_m - v_b)y = 0.6(v_b + 7)$$

$$(v_m - v_b)x = (49 - v_m) = v_b$$

$$\frac{y}{x} = \frac{0.6(v_b + 7)}{v_b} = \frac{49 - v_b}{56 - v_b}$$

$$0.6(v_b + 7)(56 - v_b) = (49 - v_b)v_b$$

$$-0.6v_b^2 + 0.6 \cdot 49v_b + 0.6 \cdot 7 \cdot 56 = 49v_b - v_b^2 \Rightarrow 0.4v_b^2 - 0.4 \cdot 49v_b + 0.6 \cdot 7 \cdot 56 = 0$$

$$0 = 49^2 - 21 \cdot 56 \cdot 2 = 7^2$$

$$2v_b^2 - 2 \cdot 49v_b + 3 \cdot 7 \cdot 56 = 0$$

$$v_b = \frac{49 \pm 7}{2} \quad v_{b1} = 21 \text{ км/ч}$$

$$v_{b2} = 28 \text{ км/ч}$$

т.к. по условию $v_m > v_b$ (из-за того, что мотоциклист приезжает быстрее) и $v_m = 49 - v_b$, то

$$v_m = 28 \text{ км/ч} \Rightarrow x = \frac{49 - v_m}{v_m - v_b} = 3(\text{ч}) \Rightarrow S = 3 \cdot 28 \text{ км} = 84 \text{ км} \quad \text{Ответ: } 84 \text{ км}$$

$$v_b = 21 \text{ км/ч}$$

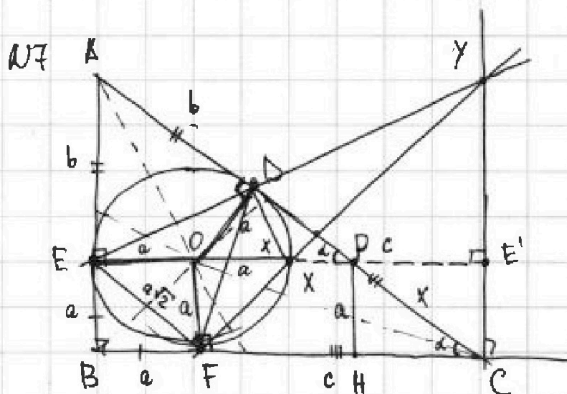
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Центр вписанной окружности O — пересечение биссектрис $\triangle ABC$;
по свойству $AE = AD$; $DC = CF$; $FB = BE$

$$AD : DC = b : c = AE : FC$$

$$b = AD = AE$$

$$EX = \sqrt{2} \cdot XY$$

$$a = EB = BF = R - \text{радиус окружности}$$

$$c = FC = DC$$

(т.к. $\square EBF$ — квадрат)

по т. Пифагора для $\triangle ABC$: $(a+b)^2 + (a+c)^2 = (b+c)^2$
 $2a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac = b^2 + 2bc + c^2$
 $a^2 + ab + ac = bc \Rightarrow a(a+b+c) = bc$

~~Далее можно рассмотреть по-другому, но это не нужно, так как задача решена~~

~~Решение~~ $EO \parallel BF$ — проведём $[EO]$ за точку O до пересечения с (CY)
 $(EO) \cap (CY) = E'$, $\angle E' = 90^\circ$; $EE' \cap CD = P$; проведём $PH \perp FC$ $H \in FC$
 Тогда $\triangle POD = \triangle PHC$ (по признаку равенства прямоугол. тр.)
 $OD = PH = a$ $\angle PCH = \angle DPO$ $\angle D = \angle H = 90^\circ$

Обозначим за x гипотенузу этих треугольников: $x = PO = PC$

Тогда $x + x \cos \alpha = c \Rightarrow$
 $a = x \sin \alpha$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin \alpha} + \frac{a}{\cos \alpha} = c \Rightarrow \frac{a}{\sin \alpha} + \frac{a}{\cos \alpha} = c$$

$$(a+b) = (b+c) \sin \alpha; \frac{a+b}{a+c} = \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a(a+b)}{(b+c)} + \frac{a(a+c)}{a+b} = c = \frac{a(a+b)^2 + (a+c)(b+c)}{(a+b)(b+c)}$$

$$+ ac + bc + c^2) \cdot \frac{1}{(a+b)(b+c)} = \frac{a}{(a+b)(b+c)} (a^2 + 3ab + ac + bc + b^2 + c^2) = c$$

$$a^3 + 3a^2b + a^2c + a^2b + ab^2 + ac^2 = cab + cb^2 + ac^2 + bc^2$$

$$a+b=c \text{ и } a$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7 (продолжение)

$X \in EE'$ по условию $\rightarrow \triangle EFX - \text{р/б}$; $\text{прям. угл.} \Rightarrow EX = 2a - \text{диаметр}$

$$XE' = a + c - 2a = c - a$$

$$\triangle EFX \sim \triangle XYE' \Rightarrow XE' = E'Y = c - a = b$$

$$XY = \sqrt{2}b - \text{по т. Пифагора для } \triangle XYE'$$

$$EX = 2a = \sqrt{2}XY - \text{по укл.}$$

$$\sqrt{2}XY = \sqrt{2}b \cdot \sqrt{2} = 2b = 2a \Rightarrow a = b$$

$$c = a + b$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{b}{c} = \frac{a}{a+a} = \frac{1}{2}$$

Ответ: 1:2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

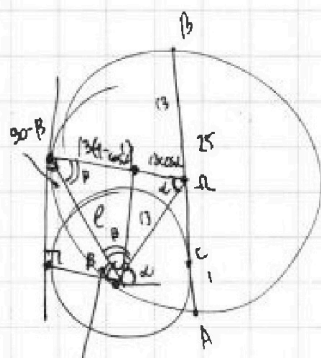
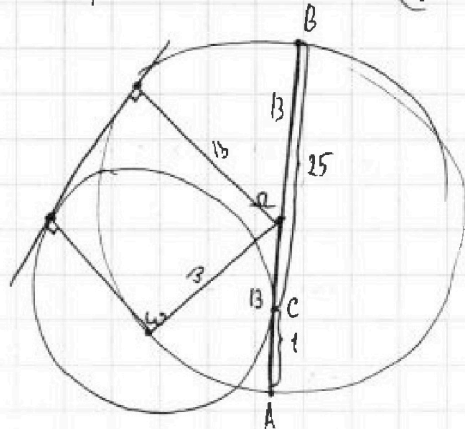
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N2

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{\frac{a}{b}+1}{b\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2-9\left(\frac{a}{b}\right)+1\right)} = \frac{\frac{a}{b}+1}{\quad}$$

N4

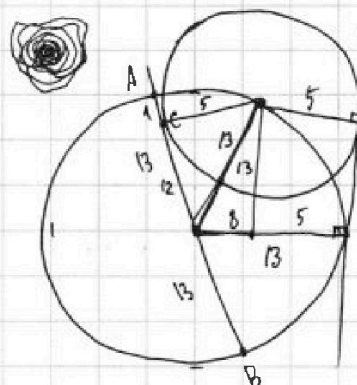


180-b-1

$$90^\circ + 180^\circ - b - d = 90^\circ$$

$$270 - 2\beta - d = 90$$

$$2b + d = 180 \checkmark$$



$13 \cdot \sin \alpha$

$$\sqrt{169 + 64} =$$

$$13(1 - \cos \alpha) \cdot \sin \beta = \sin \alpha$$

$$(1 - \cos \alpha) \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha$$

$$(1 - \cos \angle) \cdot \cos \frac{\angle}{2} = \sin \angle$$

$$2 \cdot 13^2 - 2 \cos d \cdot 13^2 = \ell^2$$

$$l = 13 \sqrt{2(1 - \cos \alpha)}$$

$$\beta = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$l \cdot \sin \beta = l \sin(90 - \frac{\alpha}{2}) = l \cos \frac{\alpha}{2} = 13 \cdot \sin \alpha$$

$$13\sqrt{2(1-\cos \alpha)} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = 13 \cdot \sin \alpha$$

$$2(1 - \cos \alpha) \cdot \left(\cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

~~Ques 2~~ $\cos 2d = \cos^2 d - \sin^2 d = 2\cos^2 d - 1$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos \alpha + 1}{2}$$

$$2 \cancel{(1 - \cos \theta)} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) = \cancel{(1 - \cos \theta)} (1 + \cos \theta)$$

$$1 + \cos L = 1 + \cos L$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2+9ab+b^2} = \frac{c+1}{b(c^2-9c+1)}$$

$$c+1 = b \cdot 9$$

$$\frac{9a^2}{2} - 9ab + \frac{9b^2}{2} = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}a - \frac{3}{\sqrt{2}}b\right)^2 =$$

$$a^2 - 9ab + b^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}(a-b)\right)^2 = 4.5a^2 - 9ab + 4.5b^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 - 11ab = (a+b)^2 - 11ab$$

$$\frac{a^2 - 9ab + b^2}{a+b} = \frac{a+b}{b} = \frac{1}{b} + \frac{a}{b}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



МФТИ

Ben.	S	σ	$\frac{t}{x+1}$
mat.		σ_m	x

NGV

(2) - (1) :

$$\begin{cases} U_B(x+1) = U_M x = S & \text{--- ? 1)} \\ U_B x + 49 = U_M(x+1) & \text{(2)} \\ (U_B + 7)(y + 0.6) = (U_M + 7)y & \text{(3) = S} \end{cases}$$

$$(u_B + 7)(y + 96) = (56 - u_B)y = (49 - u_B)x = u_B(x + 1) \quad \begin{matrix} u_B = 21 \\ u_M = 28 \end{matrix}$$

$$y = \frac{49 - v_a}{56 - v_b} \times x$$

$$(U_M - U_D)X = 49 - U_M$$

$$7x = 49 - 28 = 21$$

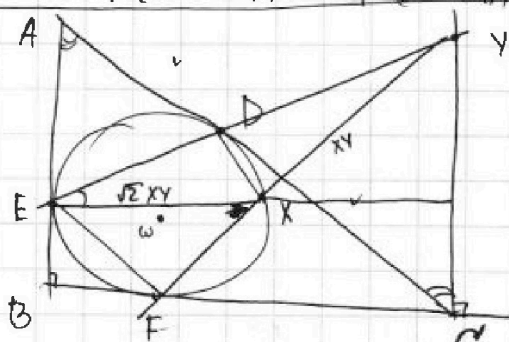
$$(U_B + 7) \left(\frac{49 - U_B}{56 - U_B} x + 0,6 \right) = U_B (x + 1)$$

$$x=3 \quad S = 28.3 = \underline{84 \text{ km}}$$

$$(U_B + 7)(49 - U_B)x + 96(56 - U_B) = U_B(x+1)(56 - U_B)$$

$$a+b=c$$

N7



Т. косинусов ΔEYX :

$$2(x+4)^2 + (x+4)^2$$

$$2(xy)^2 + (xy)^2 + 2\cos\alpha \cdot \sqrt{2} (xy)^2 = Ey^2$$

$$(a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2}xy)^2$$

$$\cancel{y^2} + \cancel{2}a^2 = \cancel{2}xy^2$$

$xy = \sqrt{2}a$

N5

$$5x - y = 3z \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$8yz + xz = 15xy$$

$$z = \frac{15xy}{8y+x}$$

$$5x - y = \frac{45xy}{8y + x}$$

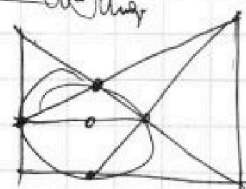
$$(5x - y)(8y + x) = 45xy$$

$$40xy + 5x^2 - 8y^2 - xy$$

$$5x^2 - 8y^2 - 6xy = 8$$

$$8y^2 + 6xy - 5x^2 = 0$$

$$y = \frac{-3x \pm \sqrt{9x^2 + 40x^2}}{8}$$



$$(a+b)(b+c) =$$

$$= ab + b^2 + ac + bc$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{4^2 + 3^2} =$$

$$= \frac{25x^2 - y^2 - \frac{y^2 + 3z^2}{(8y+x)^2}}{y^2 + 3z^2}$$

$$y^2 + 3\left(\frac{15xy}{8y+x}\right)^2$$

$$= \frac{(25x^2 - y^2)(8y+x)^2 - (15xy)^2}{y^2(8y+x)^2 + 3 \cdot (15xy)^2}$$

$$\frac{ac}{b+c} + \frac{a(a+c)}{c} = c = \frac{a}{1} \left(\frac{c^2 + a + c}{(b+c)c} \right) = c = \frac{-3x \pm 7x}{8}$$

$$a(c^2 + a + c) = c^2(b + c)$$

$$ac^2 + a^2 + ac = c^2b + c^3$$

$$\begin{cases} y_1 = x/2 \\ y_2 = \frac{5}{4}x \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(5x-y)^2(8y+x)^2 = 15(xy)^2 =$$

$$= \frac{(5x-y)(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{3z(5x+y) - z^2}{(5x)^2 - 6yz} =$$

$$y^2 + 3z^2 = (y+3z)^2 - 6yz$$

$$= \frac{3(5x+y) - z}{z(5x)^2 - 6yz} = z \frac{15x + 3y - z}{25x^2 - 6yz} =$$

при y_1 :

$$\frac{25x^2 - (\frac{x}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2}{(\frac{x}{2})^2 + 3(3x)^2} =$$

$$= \frac{100x^2 - x^2 - 9x^2}{x^2 + 27x^2} = \frac{90x^2}{28x^2} = \frac{90}{28} = \frac{45}{14}$$

при y_2 :

$$\frac{25x^2 - (\frac{5x}{4})^2 - (\frac{75}{44})^2}{(\frac{5x}{4})^2 + 3(\frac{75}{44})^2} = \frac{400 - 25 - (\frac{75}{11})^2}{25 + 3 \cdot (\frac{75}{11})^2} = \frac{400 - 25 - 49}{25 + 3 \cdot 49} = \frac{326}{172} \approx 2$$

✓ 5

при y_1 :

$$\frac{15x \cdot \frac{x}{2}}{8 \cdot \frac{x}{2} + x} = \frac{7.5x^2}{5x} = 1.5x = z$$

при y_2 :

$$\frac{15x \cdot \frac{5}{4}x}{8 \cdot \frac{5}{4}x + x} = \frac{75/4 \cdot x}{10x + x} = \frac{75}{44}x$$

$$\frac{75}{4} \approx 7 \frac{3}{4} \\ 400 - 25 - 49 = 326 \\ 25 + 3 \cdot 49 = 172 \\ \frac{326}{172} \approx 2$$

N4

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 11ab}$$

$$\frac{a+b}{(a-b)^2 - 7ab}$$

$$a+b = m \cdot q \\ a^2 - 9ab + b^2 = m \cdot p$$

$$\frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{a^2}{b} - 9a + b} = \frac{\frac{a}{b} + 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{9a}{b} + 1} \cdot b =$$

$$\frac{9a}{b} = 4.5 \cdot 2 \cdot \frac{a}{b} \\ 4.5 \cdot 4.5 \\ a^2 - 9ab + b^2 = \\ = a^2 - 9ab + 20.25b^2 - 19.25b^2$$

$$\frac{22}{4.5} = 8.25 \\ \frac{45}{4.5} = 10 \\ \frac{22.5}{24.25}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab = 3^{14} \cdot 7^{13} \cdot p$$

$$bc = 3^{19} \cdot 7^{17} \cdot q$$

$$ac = 3^{23} \cdot 7^{12} \cdot r$$

$$p \cdot q \cdot r = 1$$

$$ab = 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$bc = 3^{19} \cdot 7^{17}$$

$$ac = 3^{23} \cdot 7^{12}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{3^5 \cdot 7^4}$$

$$c = 3^5 \cdot 7^4 a$$

$$b = \frac{3^{14} \cdot 7^{13}}{a}$$

$$a^2 \cdot 3^5 \cdot 7^4 = 3^{23} \cdot 7^{12}$$

$$a = \sqrt{3^{18} \cdot 7^{38}} = 3^9 \cdot 7^{19}$$

$$c = 3^{14} \cdot 7^{23}$$

$$b = \frac{3^5}{7^6} \quad abc = \frac{3^9 \cdot 7^{19} \cdot 3^{14} \cdot 7^{23} \cdot 3^5}{7^6} = 3^{28} \cdot 7^{36}$$

N1 ✓

1 16
3
5
6

$$U_M = 49 - U_B$$

$$U_B y + 0.6 U_B + 7 + 4.2 = U_M y + 7$$

$$(U_M - U_B) y = 0.6 (U_B + 7)$$

$$(U_M - U_B) x = 49 - U_M = U_B$$

$$\frac{y}{x} = \frac{0.6 (U_B + 7)}{U_B}$$

$$y = \frac{0.6 \cdot U_B + 7}{U_B} \cdot x = \frac{49 - U_B}{56 - U_B} x$$

$$0.6 (U_B + 7) (56 - U_B) = (49 - U_B) U_B$$

$$56 U_B - U_B^2 + 7 \cdot 56 - 7 U_B =$$

$$= -U_B^2 + 49 U_B + 7 \cdot 56$$

$$-0.6 U_B^2 + 0.6 \cdot 49 U_B + 0.6 \cdot 7 \cdot 56 = 49 U_B - U_B^2$$

$$0.4 U_B^2 - 0.4 \cdot 49 U_B + 0.6 \cdot 7 \cdot 56 = 0$$

$$4 U_B^2 - 2 \cdot 49 U_B + 21 \cdot 56 = 0$$

$$0 = 49^2 - 21 \cdot 56 \cdot 2 = 7^2$$

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 - 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 2 =$$

$$= 7^2 (7 \cdot 7 - 3 \cdot 8 \cdot 2) = 7^2$$

$$U_B = \frac{49 \pm 7}{2} \Rightarrow U_{B1} = 28$$

$$U_{B2} = 21$$

$$U_{M1} = 49 - 28 = 21$$

$$U_{M2} = 49 - 21 = 28 \quad \text{т.к. } U_M > U_B$$