



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .
5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .
7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} ab &\equiv 0 \pmod{3^{14}} \\ bc &\equiv 0 \pmod{3^8 \cdot 2^{16}} \\ ac &\equiv 0 \pmod{3^{21} \cdot 2^{38}} \\ abc &\text{ min. ?} \end{aligned}$$

1. Чтобы произведение a, b, c было минимальным,
то сначала рассмотрим это

$$\begin{aligned} \begin{cases} ab = 3^{14} \cdot 2^n \\ bc = 3^8 \cdot 2^{16} \\ ac = 3^{21} \cdot 2^{38} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a = 3^n \cdot 2^m \\ b = 3^{14-n} \cdot 2^{11-m} \\ c = 3^{8-11+n} \cdot 2^{16-11+m} = 3^{n-3} \cdot 2^{5+m} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} n, m \in \mathbb{N} \\ n + 7 + m = 21 \\ m + 5 + m = 38 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n = 14 \\ 2m = 33 \\ n, m \in \mathbb{N} \\ a = 3^n \cdot 2^m \\ b = 3^{14-n} \cdot 2^{11-m} \\ c = 3^{n-3} \cdot 2^{5+m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 7 \\ m = 11,5 \\ n, m \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{не подходит.}$$

2. Пусть $ab = k \cdot 3^{14} \cdot 2^n$, где $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a &= 3^n \cdot 2^m \\ b &= 3^{14-n} \cdot 2^{11-m} \\ c &= 3^{n-3} \cdot 2^{5+m} \end{aligned}$$

Т.к. m получило не целое, то лучше взять такое

число $k \in \mathbb{N}$, чтобы $m \in \mathbb{N} \Rightarrow k = 2^m$ - минимальное возможное
число k , чтобы выполнялось $ab = 3^{14} \cdot 2^n \cdot k \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3^n \cdot 2^m \cdot k \\ b = 3^{14-n} \cdot 2^{11-m} \\ c = 3^{n-3} \cdot 2^{5+m} \\ n, n \in \mathbb{N} \\ \text{минимум} \\ ac = 3^n \cdot 2^m \cdot 3^{n-3} \cdot 2^{5+m} = 3^{2n-2} \cdot 2^{2m+5} = 3^{21} \cdot 2^{38} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n + 7 = 21 \\ 3m + 5 = 38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n = 14 \\ 3m = 33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 7 \\ m = 11 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3^7 \cdot 2^{11} \cdot 2 \\ b = 3^7 \cdot 2^4 \\ c = 3^0 \cdot 2^{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} a \cdot b \cdot c &= 3^7 \cdot 2^{22} \cdot 3^7 \cdot 2^{14} \cdot 2^{16} = \\ &= 3^{14} \cdot 2^{38} \end{aligned} \quad \text{Ответ: } abc = 3^{14} \cdot 2^{38}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2. $\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2}$ (A) $\frac{a}{b} - \text{число/число}$

8/2

$$\begin{cases} a+b \equiv 0 \pmod{m} \\ a^2-2ab+b^2 \equiv 0 \pmod{m} \\ a \not\equiv b \pmod{m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+2ab+b^2-2ab-2ab \equiv 0 \pmod{m} \\ a+b \equiv 0 \pmod{m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b)^2-4ab \equiv 0 \pmod{m} \\ a+b \equiv 0 \pmod{m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4ab \equiv 0 \pmod{m} \\ a+b \equiv 0 \pmod{m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4ab \equiv 0 \pmod{m} \\ a \equiv -b \pmod{m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \cdot (-b) \cdot (-b) \equiv 0 \pmod{m} \\ a \equiv -b \pmod{m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4b^2 \equiv 0 \pmod{m} \\ a \equiv -b \pmod{m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4b^2 \equiv 0 \pmod{m} \\ a \equiv -b \pmod{m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4b^2 \equiv 0 \pmod{m} \\ b^2 \not\equiv 0 \pmod{m} \end{cases}$$

b	1	2	...	$m-1$	m
b^2	1	4	...	$(m-1)^2$	m
$10b^2$	10	40	...	$(m-1) \cdot 10$	0
$-b$	-1	-2	...	$1-m$	0
a	-1	-2	...	$1-m$	0

$$\frac{a+b}{10b^2} \equiv \frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} \pmod{m}$$

$$a+b \equiv 10b^2 \pmod{m}$$

$$a \equiv 10b^2 - b \pmod{m}$$

$$a \equiv b(10b - 1) \pmod{m}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{10b^2} \equiv \frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} \pmod{m}$$

$$\Rightarrow \frac{9b+b}{81b^2-22b^2+b^2} = \frac{10b}{10b} = 1$$

$a \notin \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} b &\equiv \frac{m}{10} \pmod{m} \\ b &\equiv \frac{m}{10b} \pmod{m} \\ \Downarrow \\ a + \frac{m}{10b} &\equiv 0 \pmod{m} \\ 10ab + m &\equiv 0 \pmod{m} \\ 10ab &\equiv m \pmod{m} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 4b^2 \equiv 0 \pmod{m} \\ a \equiv -b \pmod{m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4b^2 \equiv m \pmod{m} \\ a+b \equiv 0 \pmod{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} \equiv \frac{a+b}{10b^2} \pmod{m}$$

$$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} \equiv \frac{a+b}{10b^2} \pmod{m}$$

$$a^2-2ab+b^2 = 10b^2$$

$$m \mid a^2-2ab+b^2-10b^2$$

$$m \mid a^2+ab-9b^2-9b^2$$

$$m \mid (a/a+b) - 9b/(a+b) \cdot 0$$

$$m \mid (1a/b) - (a-9b) \cdot 0$$

$$\begin{cases} a = -b \pmod{m} \\ a = 9b \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 10b \equiv 0 \pmod{m} \\ a \equiv -b \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow \frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} \equiv \frac{a+b}{10b^2} \pmod{m}$$

$$a^2-2ab+b^2 \equiv 10b^2 \pmod{m}$$

$$a^2+ab-9ab-9b^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$a(a+b)-9b(a+b) \equiv 0 \pmod{m}$$

$$(a+b)(a-9b) \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{(a+b)(a-9b)} \equiv 0 \pmod{m}$$

$$\frac{1}{a-9b} \equiv 0 \pmod{m}$$

$$\frac{1}{a-9b} \equiv 1 \pmod{m}$$

$$a-9b \equiv 1 \pmod{m}$$

$$a-9b \equiv 1 \pmod{m}$$

$$a-9b \equiv 1 \pmod{m}$$

$$a-9b \equiv 1 \pmod{m}$$

$$\text{Если } m=1, \text{ то } \frac{1}{a-9b} \equiv 1 \pmod{m}$$

$$\text{Если } m=10, \text{ то } \frac{1}{a-9b} \equiv 10 \pmod{10}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)(a-9b)} = \frac{1}{a-9b} \quad \text{и произведение}$$

при $m=a+b$, где b можно сократить на $(a+b)$

$$\underline{\text{Ответ:}} \quad n=a+b$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \sqrt{2x^2+3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x$$

$$\sqrt{2x^2+3x+4 - 1 + 1 - 4x + 4x} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x$$

$$\sqrt{2x^2+x+3+1-4x} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x$$

1) Замена $t = 2x^2+x+3$, $m = 1-4x$
 $t \geq 0$

$$\sqrt{t+m} - \sqrt{t} = m$$

$$\sqrt{t+m} - \sqrt{t} = m \quad | \cdot \sqrt{t+m} + \sqrt{t}$$

Если $m < 0$, то $\sqrt{t+m} - \sqrt{t} < 0$
 Если $m > 0$, то $\sqrt{t+m} - \sqrt{t} > 0$ $\Rightarrow$ можно возводить в квадрат без ошибок.
 Если $m = 0$, то $\sqrt{t} - \sqrt{t} = 0$ $\Rightarrow m = 0$

при $m = 0$, $1-4x = 0$ $x = \frac{1}{4}$, то $\sqrt{2 \cdot \frac{1}{16} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4} - \sqrt{2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 3} = 1-1$
 $1-4x$
 $x = \frac{1}{4}$

Если $m \neq 0$, то $(\sqrt{t+m} - \sqrt{t})^2 = m^2$ $\Rightarrow \sqrt{t+m} = \sqrt{t} + m$

$$t+m - 2\sqrt{t(t+m)} + t = m^2$$

$$-m^2 + 2t + m - 2\sqrt{t(t+m)} = 0$$

$$-m^2 + 2t + m = 2\sqrt{t(t+m)}$$

Обратная замена

$$-(1-4x)^2 + 2(2x^2+x+3) + 1-4x = 2\sqrt{(2x^2+x+3)(2x^2+x+3+1-4x)}$$

$$-1+8x-16x^2+4x^2+2x+6+1-4x = 2\sqrt{4x^4+x^3+9+4x^3+12x^2+6x+2x^3+4x^2}$$

$$= 2\sqrt{4x^4+x^3+9+4x^3+12x^2+6x+2x^3+4x^2}$$

$$-10x^2+6x-6 = 2\sqrt{4x^4-4x^3+11x^2-9x+12}$$

$$-6x^2+3x+3 = 2\sqrt{4x^4-4x^3+11x^2-9x+12}$$

Ответ: $x = \frac{1}{4}$

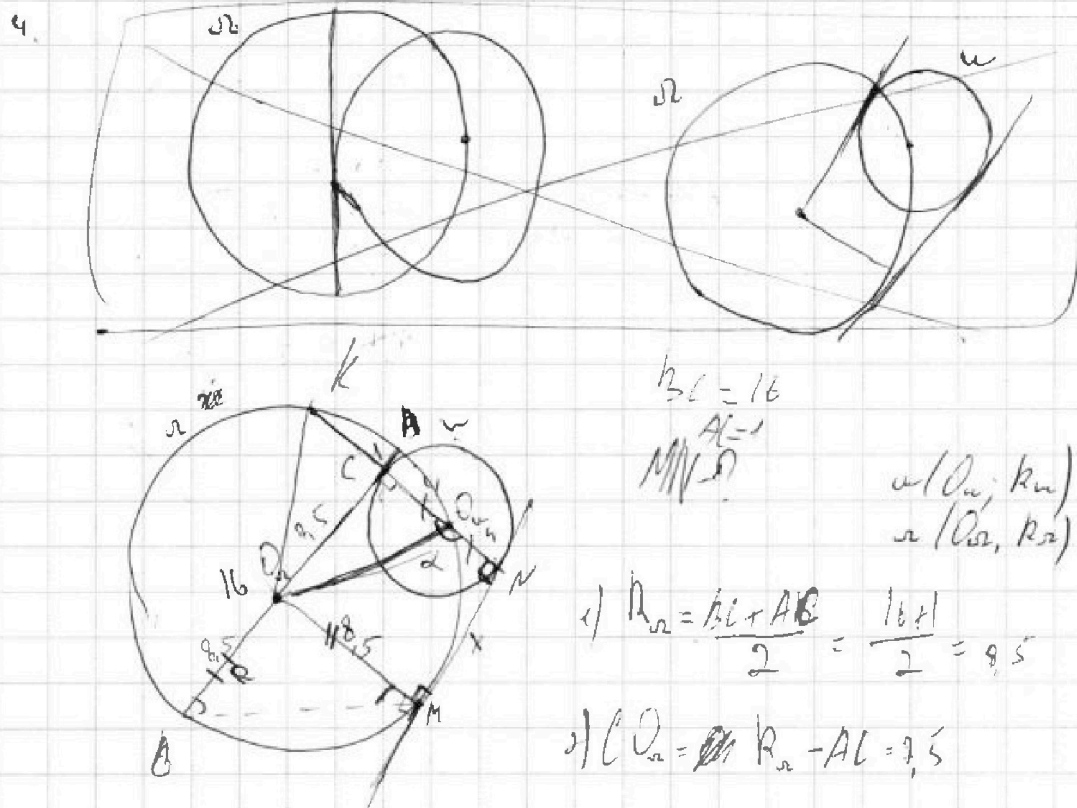
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$KL = 16$$

$$AL = 1$$

$$MN \perp \Omega$$

$$\omega(O_\omega, R_\omega)$$

$$\Omega(O_\Omega, R_\Omega)$$

$$1) R_\Omega = \frac{KL + AB}{2} = \frac{16 + 1}{2} = 8,5$$

$$2) CO_\Omega = R_\Omega - AL = 7,5$$

2) AB касательна к Ω и Ω (по условию) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow O_\Omega \perp AB$ (по свойству касательной)

3) O_Ω . MN — касательная к ω , Ω

4) Аналогично п. 2. $MM' \perp O_\Omega K$, $MM' \perp O_\Omega N$

5) Внешний $\angle K$ + $\angle C$ продолжением отрезка $O_\Omega C$ по пересечению с Ω в Γ . K

6) O_Ω . $O_\Omega K$ и $O_\Omega N$ — радиусы Ω $\Rightarrow O_\Omega K = O_\Omega N$ (по отл. отл.)

7) $O_\Omega K = O_\Omega N$ (из п. 6) $\Rightarrow \triangle OKO_\Omega$ — $\triangle ONO_\Omega$

8) $\triangle OKO_\Omega$ — $\triangle ONO_\Omega$ (из п. 7)

$O_\Omega C \perp AC$ (из п. 2) $\Rightarrow O_\Omega C$ — высота, медиана и биссектриса $\triangle OKO_\Omega$ (по свойству $\triangle OKO_\Omega$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 9) KL = CO_\Omega$ (т.к. $O_\Omega C$ — медиана)

10) $KL \cdot CA = KL \cdot CO_\Omega$ (по свойству касательной хорды)

$$16 \cdot 1 = CO_\Omega^2 \Rightarrow CO_\Omega = 4 \Rightarrow R_\Omega = 4$$

11) MN — касательная к ω , Ω — касательная к Ω $\Rightarrow MN$ — касательная к Ω (по свойству касательной)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

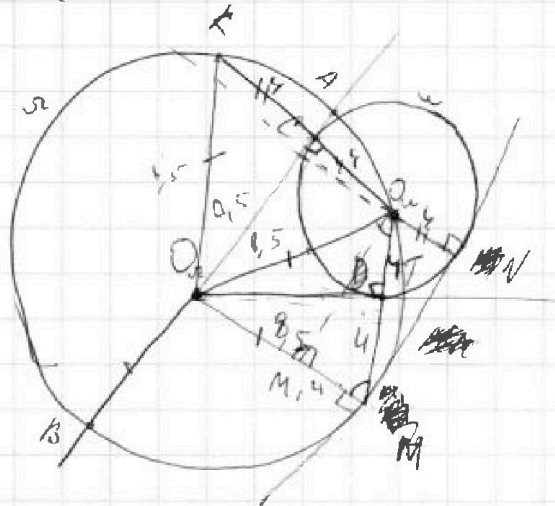
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AM^2 =$



$\frac{64}{68}$

1) Проведем из O_1 касательную к ω в точку T

2) $O_1 T \perp AM$ и $\Rightarrow$

$\Rightarrow O_1 T = 4$

3) $O_1 T \perp O_1 M$ по свойству касательной

4) $O_1 M_1 = 4$ аналогично п. 3-4

5) $MM_1 = \sqrt{O_1 M_1^2 + O_1 M^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13} = 4\sqrt{3}$

1) $O_1 M_1 = NM$ - перпендикуляр AM на AM

1) $O_1 M_1 \perp AM$ (п. 1) $O_1 M_1 \parallel NM$

2) $O_1 M_1 \parallel NM$ (п. 1, 11)
 $O_1 N \parallel O_1 M$ (по свойству двух прямых перпендикулярных к третьей) $\Rightarrow$

$\Rightarrow O_1 M M_1$ - изр. прямая $\Rightarrow O_1 M_1 = NM$ (по свойству, по опр.)
 $O_1 N = M_1 M$ и касательная

3) $O_1 M_1 = O_1 M - M_1 M = 8,5 - 4 = 4,5$

4) $MM_1 \parallel O_1 M_1$ (п. 1, 11)
 $MM_1 \perp O_1 M$ (по свойству касательной) $\Rightarrow$

$\Rightarrow O_1 M_1 \perp O_1 M$ (по свойству двух прямых перпендикулярных к третьей)

5) по 1. Вспомогат.

$$O_1 M_1 = \sqrt{O_1 O^2 - O_1 M^2} = \sqrt{R^2 - O_1 M^2} =$$

$$= \sqrt{8,5^2 - 4,5^2} = \sqrt{(8,5-4,5)(8,5+4,5)} = \sqrt{4 \cdot 13} = 2\sqrt{13} \quad (\text{по п. 12})$$

$$\underline{O_1 M_1 = NM = 2\sqrt{13}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

x, y, z — действительные числа, $x, y, z \neq 0$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 + 2z^2}{x^2 + 6y^2} \quad (A)$$

$$3x + 2y = z$$

$$\frac{3x}{x+y} = \frac{z}{z} \Rightarrow z = \frac{2x}{\frac{3}{x+y} - 1} = \frac{2xy}{3y+x}$$

$$3x + 2y = \frac{2xy}{3y+x}$$

$$3x(3y+x) + 2y(3y+x) - 2xy = 0$$

$$3y + x \neq 0$$

$$3xy + 3x^2 + 6y^2 + 2xy + 2xy - 2xy = 0$$

$$x^2 + 3y^2 + 3xy = 0$$

$$x^2 + xy + 2xy + 2y^2 = 0$$

$$x(x+y) + 2y(x+y) = 0$$

$$(x+y)(x+2y) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = -2y \\ x \neq -3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \quad (A) \\ x = -2y \quad (B) \end{cases}$$

$$(A) \quad z = \frac{2 \cdot (-y)}{3y - y} = \frac{-2y^2}{2y} = -y$$

$$(B) \quad z = \frac{2(1-2y) \cdot y}{3y - 2y} = \frac{-4y^2}{y} = -4y$$

1) (A) $\rightarrow$ (A)

$$\frac{3(-y)^2 - 4y^2 - (-y)^2}{x(-y)^2 + 6y^2} = \frac{3y^2 - 4y^2 - y^2}{y^2 + 6y^2} = \frac{-2y^2}{7y^2} = -\frac{2}{7}$$

2) (B) $\rightarrow$ (B)

$$\frac{3(-2y)^2 - 4y^2 - (-4y)^2}{x(-2y)^2 + 6y^2} = \frac{3 \cdot 4y^2 - 4y^2 - 16y^2}{4y^2 + 6y^2} = \frac{-4y^2}{10y^2} = -\frac{2}{5}$$

3) $\frac{2}{7}$ и $-\frac{2}{5}$ (A) max $\frac{2}{7}$

Ответ: $\frac{2}{7}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$48-y$$

$$f_1 x + f_2 y = f_1 y$$

$$f_1 (x-y) + f_2 x = 0$$

$$f_1 x = \frac{f_2 y}{x-y}$$

$$f_1 = \frac{f_2 y}{y-x}$$

$$f_1 = \frac{2(48-y)}{y-48+y}$$

$$f_1 = \frac{96-2y}{2y-48}$$

$$f_1 = \frac{2(48-y)}{2(y-24)}$$

$$\frac{2(48-y)}{2(y-24)} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{(48-y)y}{(y-24)(y+6)(54-y)} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{-2y(48-y)}{(y+6)(54-y)} = \frac{5}{4} = 0$$

$$\frac{-8y(48-y) - 5(y+6)(54-y)}{(y+6)(54-y)} = 0$$

$$-384y + 8y^2 - 5(y^2 + 6y + 54y + 324) = 0$$

$$-384y + 8y^2 + 5y^2 - 48y - 324 \cdot 5 = 0$$

$$13y^2 - 624y - 1620 = 0$$

$$D = 389376 + 52 \cdot 1620 = 389376 + 84240 = 473616$$

$$y = \frac{624 \pm \sqrt{473616}}{26} = \frac{624 \pm 688}{26}$$

$$y = \frac{312 \pm 8\sqrt{13156}}{13} = \frac{312 \pm 6\sqrt{3289}}{13}$$

$$y = \frac{312 + 6\sqrt{3289}}{13}$$

$$f_1 = \left(\frac{48-y}{y-24} \right) \cdot \frac{312 + 6\sqrt{3289}}{13}$$

$$f_1 = \frac{48-y}{y-24} \cdot \frac{312 + 6\sqrt{3289}}{13}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 24 \\ \hline 192 \\ 96 \\ \hline 1152 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 24 \\ \hline 192 \\ 96 \\ \hline 1152 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 24 \\ \hline 192 \\ 96 \\ \hline 1152 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 473616 \\ \div 26 \\ \hline 18216 \\ \times 26 \\ \hline 473616 \end{array}$$

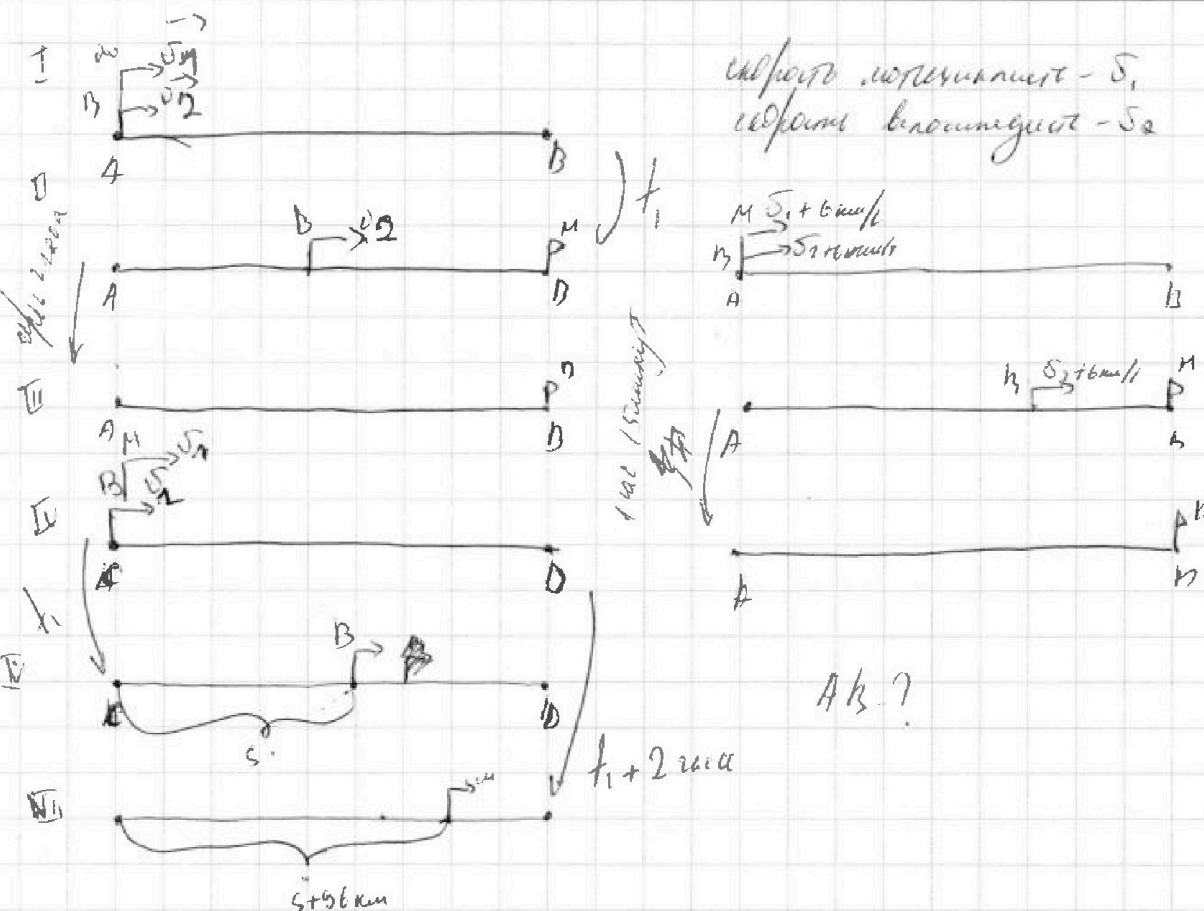
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть x - скорость велосипедиста, y - скорость мотоцикла
 t_1 - время, за которое мотоциклист преодолел $A \rightarrow B$

Скорость	Время	Расстояние
x	$t_1 + 2$	$(t_1 + 2)x$
y	t_1	$t_1 y$
x	t_1	$t_1 x$
y	$t_1 + 2$	$(t_1 + 2)y$
$x + 6$	$\frac{t_1 y}{x + 6}$	$t_1 y$
$x + 6$	$\frac{t_1 y}{x + 6}$	$t_1 y$

на 6 км меньше

1) $(t_1 + 2)x = t_1 y$ - для AB $\Rightarrow (t_1 + 2)x = t_1 y$
 $t_1 y - AB$

2) $(t_1 + 2)y - t_1 x$ - разница в расстоянии от A до B
всего, если время t_1 , а скорость $(t_1 + 2)y$
 $(t_1 + 2)y - t_1 x = 96 \text{ км}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) $\left(\frac{t_1 y}{y+6} - \frac{t_1 y}{x+6}\right)$ - разность во времени, потраченной на АБ,
если они оба увеличили скорость на $\frac{1}{6}$
 $\frac{t_1 y}{y+6} - \frac{t_1 y}{x+6} = 1 \frac{15}{60}$

4) t_2 и $t_3 \div 3$ составим систему уравнений

$$\begin{cases} (1.12)x = t_1 y \\ (1.12)y - t_1 x = 56 \\ \frac{t_1 y}{y+6} - \frac{t_1 y}{x+6} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 x - t_1 y = -24 \\ t_1 y - t_1 x + 2y = 56 \\ \frac{t_1 y}{y+6} - \frac{t_1 y}{x+6} = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t_1 y - t_1 x = 24 \\ t_1 y - t_1 x = 56 - 2y \\ \frac{t_1 y}{y+6} - \frac{t_1 y}{x+6} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 56 - 2y \\ \frac{t_1 y}{y+6} - \frac{t_1 y}{x+6} = \frac{5}{4} \\ (1.12)x = t_1 y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 28 - y \\ \frac{t_1 y}{y+6} - \frac{t_1 y}{28-y+6} = \frac{5}{4} \\ (1.12)x = t_1 y \end{cases} \text{ II}$$

б.1) заменим АБ

$$\begin{aligned} \frac{t_1 y}{y+6} - \frac{t_1 y}{28-y+6} &= \frac{5}{4} \\ t_1 y \left(\frac{28-y-6}{(y+6)(28-y)} \right) &= \frac{5}{4} \\ t_1 y \left(\frac{22-y}{(y+6)(28-y)} \right) &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

б.2) заменим Б АБ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x = 48 - y \\ (t_1 + 2)x = t_1 y \\ t_1 y \left(\frac{5(y+6)/(54-y)}{y} \right) = \frac{5}{4} \left(2y \left(\frac{48-y}{y-10} \right) \right) \end{cases}$$

~~если~~

если $y = 0$, то $0 = \frac{5}{4}$ - неверно $\rightarrow y = 0$ не корень

если $48 - 2y = 0$, то $y = 24$

$x = 24$ - не удов. усл., т.к.

вспомогат. и исходные
данные с разными
единицами.

$$\begin{cases} x = 48 - y \\ t_1 = \frac{5(y+6)/(54-y)}{4y(48-2y)} \\ y \neq -6 \\ y \neq 54 \\ (t_1 + 2)x = t_1 y \end{cases}$$

$$\left(\frac{5(y+6)/(54-y)}{4y(48-2y)} + 2 \right) (48-y) = \frac{5(y+6)/(54-y)}{4y(48-2y)}$$

$$\frac{5(y+6)/(54-y)/(48-y)}{4y(48-2y)} + 2(48-y) = \frac{5(y+6)/(54-y)}{4y(48-2y)} = 0$$

$$\frac{5(y+6)/(54-y)}{4(48-2y)} \left(\frac{48-y}{y} - 1 \right) + 2(48-y) = 0$$

$$\frac{5(y+6)/(54-y)(48-y)}{4(48-2y)y} + 2(48-y) = 0$$

$$\frac{5(y+6)(54-y) + 2 \cdot 4y(48-y)}{4y} = 0 \quad | \cdot 4y$$

$$5(54y - y^2 + 324 - 6y) + 8y(48-y) = 0$$

$$5(-y^2 + 48y + 324) + 384y - 8y^2 = 0$$

$$-5y^2 + 240y + 1620 + 384y - 8y^2 = 0$$

$$-13y^2 + 624y + 1620 = 0$$

$$13y^2 - 624y - 1620 = 0$$

$$D = 423616$$

$$\begin{array}{r} 13 \overline{) 1620} \\ 39 \\ \underline{1230} \\ 240 \\ 39 \\ \underline{1620} \\ 0 \end{array}$$



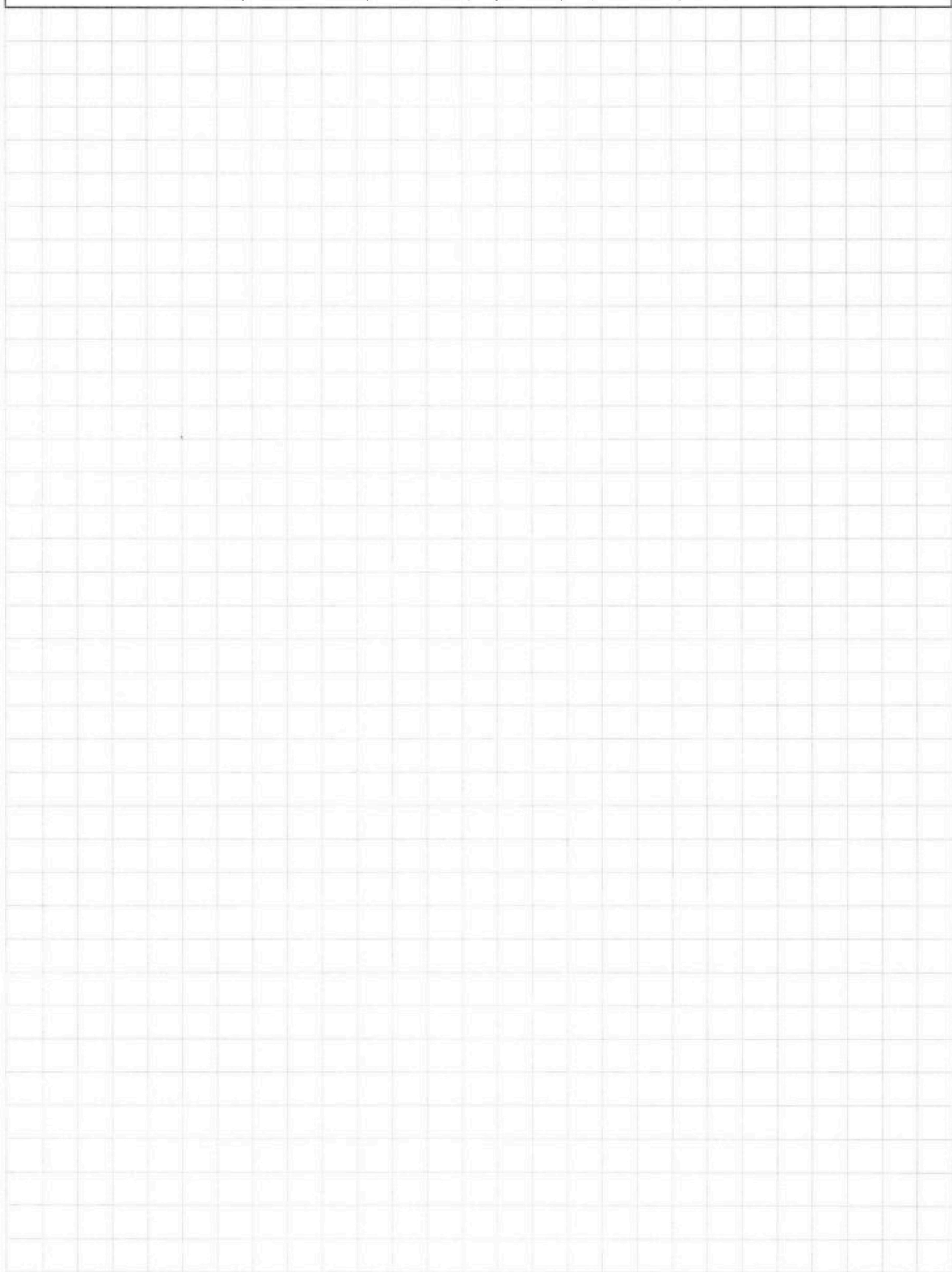
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порука QR-кода недопустима!



$$\frac{3x^2 - 4y^2 - 2^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3x^2 - 18y^2 + 18y^2 - 4y^2 - 2^2}{x^2 - 6y^2}$$

$$= \frac{3(x^2 - 6y^2) + 14y^2 - 2^2}{x^2 - 6y^2} = 3 + \frac{14y^2 - 2^2}{x^2 - 6y^2}$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 4y^2 - 2^2 \\ - 3x^2 - 18y^2 \\ \hline 14y^2 - 2^2 \end{array} \bigg| x^2 - 6y^2$$

$$3 = \frac{2-2y}{x}$$

$$3 = \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{y}\right)x$$

$$\frac{2-2y}{x} = \frac{2x}{x} - \frac{x}{y}$$

$$\frac{2-2y}{x} = 2 - \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} = 2 - \frac{2-2y}{x}$$

$$\frac{2-2y}{x} + \frac{14y^2 - 2^2}{x^2 - 6y^2}$$

$$\begin{array}{l} 3x^2 - 4y^2 - 2^2 = 0 \\ 3x^2 - 4y^2 - 2^2 = 0 \end{array}$$

$$3x + 2y = 2$$

$$2 = \frac{2}{\frac{3}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{2xy}{3y+x}$$

$$3x + 2y = \frac{2xy}{3y+x}$$

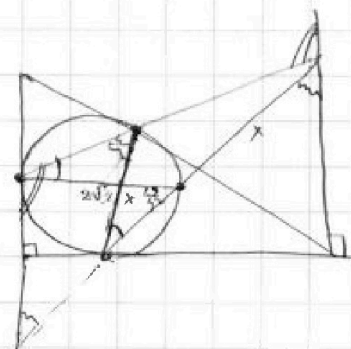
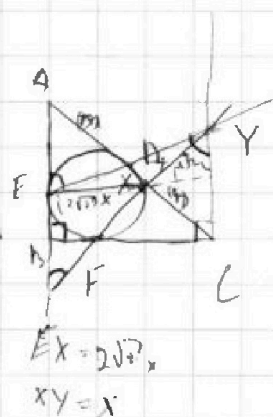
$$\left\{ \begin{array}{l} 3x(3y+x) + 2y(3y+x) - 2xy = 0 \\ 3y = -x \end{array} \right.$$

$$9xy + 3x^2 + 6y^2 + 2yx + 2xy = 0$$

$$x^2 + 2y^2 + 3xy = 0$$

$$x^2 + 2y^2 + xy + 2xy = 0$$

$$\begin{array}{l} x(x+y) + 2y(y+x) = 0 \\ (y+x)(x+2y) = 0 \\ y = -x \end{array}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5. $x, y, z \neq 0$, x, y, z - действительные

$$\begin{cases} 3x + 2y = z \\ \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \end{cases}$$

$$\frac{3x^2 + y^2 = z^2}{x^2 = 6y^2} \quad - \text{найдём?}$$

$$x + 2y = 0$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3x+2y} \Rightarrow \frac{3y(3x+2y) + x(3x+2y) - 2xy}{xy(3x+2y)} = 0$$

$$\begin{cases} 9xy + 6y^2 + 3x^2 + 2xy - 2xy = 0 \\ 3x + 2y \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 6y^2 + 9xy = 0 \\ x + 2y = -\frac{2}{3}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3xy = 0 \\ x + 2y = -\frac{2}{3}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3x + 2y = 0, x_1 \\ x + 2y = -\frac{2}{3}y \end{cases}$$

1) Найдем корни x_1

$$x^2 + 3x + 2y = 0$$

$$D = 9 - 8y^2 \geq 0, \text{ т.к. } x, y - \text{действительные числа}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8y^2}}{2}$$

$$\text{Ели } 9 - 8y^2 = 0, \text{ то } x = -\frac{3}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x$$

~~$$2x^2+4x$$~~

$$\sqrt{2x^2-3x+4 + 1-4x - 1+4x} - \sqrt{2x^2+x+3 + 1-4x - 1+4x} = 1-4x$$

$$\sqrt{2x^2+x+3+1-4x} - \sqrt{2x^2-3x+4+1-4x} = 1-4x$$

~~$$\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2-3x+4+1-4x} = 1-4x$$~~

$$2x^2-3x+4 = t$$

$$2x^2+x+3$$

$$1-4x$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{t+1-4x} = 1-4x$$

~~$$2x^2$$~~

$$\sqrt{2x^2+x+3+1-4x} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x$$

$$\sqrt{t+1-4x} - \sqrt{t} = 1-4x$$

$$\sqrt{t+1-4x} \cdot \sqrt{t} = m \cdot \sqrt{t} \quad |^2$$

$$m^2 \cdot t - (t+1-4x)^2 + t = 0$$

$$m^2 \cdot t^2 - 2tm + t = 0$$

$$t^2 - t = 0$$

$$t(t-1) = 0$$

$$t = 0$$

$$t-1 = 0$$

$$t = 0$$

$$t = 1$$

$$\sqrt{2x^2-3x+4+1-4x} - \sqrt{2x^2-3}$$

$$\sqrt{2x^2+x+3+1-4x} - \sqrt{2x^2-3x+4+1-4x} = 1-4x$$

$$t = 1-4x$$

$$\sqrt{2x^2+x+3+t} - \sqrt{2x^2-3x+4+t} = t$$

~~$$\sqrt{2x^2+x+3+t} = \sqrt{2x^2}$$~~

~~$$2x^2+x+3+t = 2x^2-3x+4$$~~

~~$$4x+3+t = 4$$~~

~~$$t = 1-4x$$~~

$$\begin{array}{r} 82 \\ \times 15 \\ \hline 160 \\ + 390 \\ \hline 490 \end{array}$$

~~$$\begin{array}{l} 1-4x < 0 \\ x < \frac{1}{4} \\ 1-4x > 0 \\ x > \frac{1}{4} \end{array}$$~~

~~$$x$$~~

$$2x^2-3x+4 = \frac{1}{4} \cdot 4$$

$$8x^2-12x+16-1=0$$

$$8x^2-12x+15=0$$

$$D = 144 - 480$$

$$2x^2+x+3 = \frac{1}{4} \cdot 4$$

$$8x^2+4x+12=4$$

$$8x^2+4x+8=0$$

$$D = 16 -$$

$$-(1-4x)^2 + 2(2x^2-3x+4)$$

$$\frac{(2x^2-3x+4) - (1-4x)^2}{2}$$

$$2x^2-3x+4 - 1 + 8x - 16 = 2x^2+5x-13$$

$$\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x$$

$$\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 4} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 3} = 0$$

$$\sqrt{4 - \frac{2}{4}} - \sqrt{3 + \frac{2}{4}} = 0$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. a, b, c

$$ab \equiv 0 \pmod{3^{11} \cdot 7^{11}}$$

$$bc \equiv 0 \pmod{3^{11} \cdot 7^{11}}$$

$$ac \equiv 0 \pmod{3^{11} \cdot 7^{11}}$$

ab, c - min?

$$\begin{aligned} a &= 3^5 \\ b &= 2 \cdot 7^6 \\ c &= 2^{12} \cdot 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 3^4 \cdot 7^9 \\ b &= 2^7 \cdot 7^9 \\ c &= 3^4 \cdot 7^9 \end{aligned}$$

$$a = 3^7 \cdot 7^m$$

$$b = 3^{11-n} \cdot 7^{11-m}$$

$$c = 3^{16-11+n} \cdot 7^{16-11+m} = 3^{5+n} \cdot 7^{5+m}$$

$$h + 2 + h = 21$$

$$2a + 2 + m + n = 38$$

$$2n = 14$$

$$2m = 31 \Rightarrow m = 10,5$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ \times 124 \\ \hline 1296 \\ + 3240 \\ \hline 39936 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2750 \\ \times 2750 \\ \hline 15500 \\ + 155000 \\ \hline 277500 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 39936 \\ \times 2750 \\ \hline 1058160 \\ + 7987200 \\ \hline 10985376 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ \times 52 \\ \hline 6480 \\ + 32400 \\ \hline 168480 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ \times 624 \\ \hline 20256 \\ + 64800 \\ \hline 202560 \end{array}$$

$$90^2 = 8100$$

$$100^2 = 10000$$

$$1000^2 = 1000000, a = 3^7 \cdot 7^{9,5}$$

$$500^2 = 250000, b = 3^4 \cdot 7^{9,5}$$

$$400^2 = 160000, c = 3^{14} \cdot 7^{13,5}$$

$$500^2 = 250000$$

$$600^2 = 360000$$

$$2 \cdot \frac{1}{b}$$

$$\begin{array}{r} 39936 \\ \times 2750 \\ \hline 1058160 \\ + 7987200 \\ \hline 10985376 \end{array}$$

$$\frac{a+b}{a^2+8ab+b^2}$$

$$a^2 - 8ab + b^2 \equiv m$$

$$a+b \equiv m$$

$$a^2 - 8ab + b^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$a+b \equiv 0 \pmod{m}$$

$$a \not\equiv b \pmod{m}$$

$$a^2 + 8ab + b^2 - 10ab \equiv 0 \pmod{m}$$

$$a+b \equiv 0 \pmod{m}$$

$$(a+b)^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$a+b \equiv 0 \pmod{m}$$

$$10ab \equiv 0 \pmod{m}$$

$$a+b \equiv 0 \pmod{m}$$

$$10ab \equiv 0 \pmod{m}$$

$$a+b \equiv 0 \pmod{m}$$

$$ab \equiv 0 \pmod{m}$$

$$a+b \equiv 0 \pmod{m}$$

$$ab \equiv 0 \pmod{m}$$

$$a+b \equiv 0 \pmod{m}$$

$$ab \equiv 0 \pmod{m}$$

$$a+b \equiv 0 \pmod{m}$$

$$ab \equiv 0 \pmod{m}$$

$$a+b \equiv 0 \pmod{m}$$

$$ab = (a+b) \cdot k$$

$$ab - ak - bk = 0$$

$$m \mid (a-b)$$

$$m \mid (a+b) + m \mid (a-b) \Rightarrow m \mid 2a$$

$$m \mid a$$

$$ab \equiv 0 \pmod{m}$$

$$\Rightarrow a+b \equiv 0 \pmod{m}$$

$$2 \cdot 3 = 6$$

$$2 \cdot 3 = 6$$

$$2 \cdot 5 = 10$$

$$2 \cdot 7 = 14$$

$$2 \cdot 9 = 18$$

$$2 \cdot 11 = 22$$

$$2 \cdot 13 = 26$$

$$2 \cdot 15 = 30$$

$$2 \cdot 17 = 34$$

$$2 \cdot 19 = 38$$

$$2 \cdot 21 = 42$$

$$2 \cdot 23 = 46$$

$$2 \cdot 25 = 50$$

$$2 \cdot 27 = 54$$

$$2 \cdot 29 = 58$$

$$2 \cdot 31 = 62$$

$$2 \cdot 33 = 66$$

$$2 \cdot 35 = 70$$

$$\begin{array}{r} 39936 \\ \times 2750 \\ \hline 1058160 \\ + 7987200 \\ \hline 10985376 \end{array}$$

$$\begin{aligned} a^2 + 8ab + b^2 - 10ab &\equiv 0 \pmod{m} \\ a+b &\equiv 0 \pmod{m} \\ (a+b)^2 &\equiv 0 \pmod{m} \\ a+b &\equiv 0 \pmod{m} \\ 10ab &\equiv 0 \pmod{m} \\ a+b &\equiv 0 \pmod{m} \\ ab &\equiv 0 \pmod{m} \\ a+b &\equiv 0 \pmod{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot 5 &= 10 & 2 \cdot 9 &= 18 \\ 2 \cdot 7 &= 14 & 2 \cdot 11 &= 22 \\ 2 \cdot 13 &= 26 & 2 \cdot 15 &= 30 \\ 2 \cdot 17 &= 34 & 2 \cdot 19 &= 38 \\ 2 \cdot 21 &= 42 & 2 \cdot 23 &= 46 \\ 2 \cdot 25 &= 50 & 2 \cdot 27 &= 54 \\ 2 \cdot 29 &= 58 & 2 \cdot 31 &= 62 \\ 2 \cdot 33 &= 66 & 2 \cdot 35 &= 70 \end{aligned}$$

$$ab \equiv a+b \pmod{m}$$

$$a+m = a+b+m$$

$$a+m+b-m = a+b$$

$$a+m+b-m = a+b$$

$$a+m+b-m = a+b$$

$$a+m+b-m = a+b$$

$$a+m+b-m = a+b$$

$$a+m+b-m = a+b$$

$$a+m+b-m = a+b$$

$$a+m+b-m = a+b$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y_{1,2} = \frac{624 \pm \sqrt{473400 + 216}}{26} = \frac{624 \pm \sqrt{54 + 1183501}}{26} =$$

$$\frac{312 \pm 3\sqrt{6} \pm 13150}{13} = \frac{312 \pm 3 \cdot 2\sqrt{3780}}{13} =$$

$$\begin{array}{r} 835 \\ \times 656 \\ \hline 5010 \\ 5010 \\ \hline 54960 \\ + 6264 \\ \hline 51196 \end{array}$$

$$\begin{cases} (t+2)x = ty \\ (t+2)y = tx = 56 \\ \frac{ty}{y+6} - \frac{tx}{x+6} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 796 \\ \times 656 \\ \hline 5010 \\ 5010 \\ \hline 54960 \\ + 6264 \\ \hline 51196 \end{array}$$

$$\frac{(y-48)/4}{(24-y)/(y+6)} - \frac{(4-48)/4}{(24-y)/(48+y+6)} = \frac{5}{4} \quad 29t - ty + 48 - y = 0$$

$$\frac{(y-48)/4}{(24-y)} \left(\frac{1}{y+6} - \frac{1}{54-y} \right) = \frac{5}{4} \quad t(24-y) = y-48$$

$$\frac{(y-48)/4}{(24-y)} \left(\frac{54-y-4-6}{(y+6)(54-y)} \right) = \frac{5}{4} \quad t = \frac{y-48}{24-y}$$

$$\frac{(y-48)y(48-24)}{(24-y)(y+6)(54-y)} = \frac{5}{4} = 0$$

$$\frac{(y-48)y(48-24)}{(24-y)(y+6)(54-y)} = 0$$

$$\frac{(y-48)y(48-24)}{(24-y)(y+6)(54-y)} = \frac{5}{4} = 0 \quad \frac{24(y-48) - 5(y+6)(54-y)}{(y+6)(54-y)} = 0$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 48 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 54 \\ \times 16 \\ \hline 864 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times 6 \\ \hline 204 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 54 \\ \times 16 \\ \hline 864 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times 6 \\ \hline 204 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 54 \\ \times 16 \\ \hline 864 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times 6 \\ \hline 204 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 54 \\ \times 16 \\ \hline 864 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times 6 \\ \hline 204 \end{array}$$