



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .
5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .
7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

Обозначим за A_n сумму степеней входящих 3 в простое разложение числа n .

Z_n , B_n — степеней входящих 7 в разложении на простые числа n .

Тогда

$$A_{ab} \geq 11, A_{bc} \geq 18, A_{ac} \geq 21$$

$$\Leftrightarrow A_{abc} \geq \frac{11+18+21}{2} = 25$$

(Если это не очевидно, то в пояснении можно сказать, что

$$A_{ab} = A_a + A_b, A_{bc} = A_b + A_c, A_{ac} = A_a + A_c \Rightarrow \frac{A_{ab} + A_{bc} + A_{ac}}{2} =$$

$$= A_a + A_b + A_c = A_{abc}.)$$

Аналогично,

$$B_{abc} \geq \frac{11+16+33}{2} = 32,5. \text{ Но } b \nmid c, ac \geq 7^{38} \Rightarrow abc \geq 7^{38}$$

Значит $B_{abc} \geq 38$.

$$\text{Тогда } abc \geq 3^{25} \cdot 7^{38} \Rightarrow abc \geq 3^{25} \cdot 7^{38}$$

Пример для $abc = 3^{25} \cdot 7^{38}$

$$a = 3^7 \cdot 7^{19}, b = 3^4, c = 3^{14} \cdot 7^{19}; abc = 3^{25} \cdot 7^{38}$$

$$ab = 3^{11} \cdot 7^{19}; bc = 3^{18} \cdot 7^{19}; ac = 3^{21} \cdot 7^{38}; \text{ Ответ: } 3^{25} \cdot 7^{38}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

По условию $(a, b) = 1$.

Найдем $(a+b; a^2 - 3ab + b^2) = (a+b; 10ab)$
по алгоритму Евклида

$$(a; a+b) = 1$$

$$(b; a+b) = 1$$

⇓

максимальное значение $(a+b; 10ab) = 10$.

Значит, дробь можно сократить максимум на 10.

Пример для $m=10$:

$$a=9, b=1$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 3ab + b^2} = \frac{10}{81 - 27 + 1} = \frac{10}{55} = \frac{2}{11} = 1.$$

Ответ: 10

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

Подставим $x = \frac{1}{4}$

Подставим $x = \frac{1}{4}$

$$\sqrt{\frac{1}{8} - \frac{3}{4} + 4} - \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + 3} = 0$$

⇓

$$4 - \frac{3}{4} = 3 + \frac{1}{4}$$

верно

⇓

$x = \frac{1}{4}$ подходит.

Заметим, что $2x^2 - 3x + 4 = 0$ не имеет корней \Rightarrow все значения больше нуля.

Аналогично $2x^2 + x + 3$ принимает значения, большие нуля.

Предположим, что $1 - 4x \neq 0$ (с равенством вариант разобран выше). Пусть $4x - 1 > 0$:

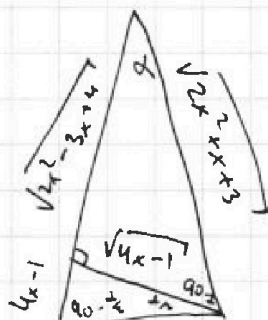
Тогда можно построить равнобедренный треугольник.

Равенство сторон следует из условия.

А высоту можно посчитать из прямоуголь-

ного треугольника: $\sqrt{2x^2 + x + 3 - 2x^2 + 3x - 4} =$

$$= \sqrt{4x - 1}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

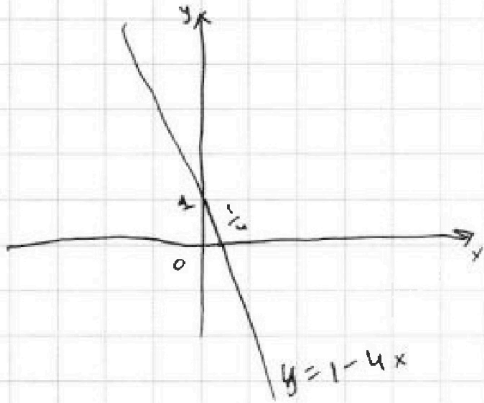
5

6

7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$00_1 + 0_1 0_2 = \frac{0_2 D - 0_1 E}{0_1 E}$$

\Leftrightarrow

$$00_1 (0_2 D - 0_1 E) = 0_1 0_2 \cdot 0_1 E$$

$$00_1 = \frac{0_1 0_2 \cdot 0_1 E}{0_2 D - 0_1 E} = \frac{\frac{17}{2} \cdot 4}{\frac{17}{2} - 4} = \frac{17 \cdot 4}{9}$$

$$00_2 = \frac{17 \cdot 4}{9} + \frac{17}{2} =$$
$$= \frac{136 + 153}{18} = \frac{289}{18}$$

$$\text{Тогда } 0D = \sqrt{00_1^2 - 0_2 D^2} = \sqrt{(00_2 + 0_2 D)(00_2 - 0_2 D)} =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{17}{2} + \frac{289}{18}\right) \left(\frac{289}{18} - \frac{17}{2}\right)} = \sqrt{\frac{442}{18} \cdot \frac{136}{18}} = \frac{34}{9} \sqrt{13}$$

$$\text{Ответ: } \frac{34}{9} \sqrt{13}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

$$z = 3x + 2y$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{z}{z} = \frac{z}{3x + 2y}$$

\Leftrightarrow

$$\frac{3y + x}{xy} = \frac{z}{3x + 2y}$$

\Leftrightarrow

$$(3y + x)(3x + 2y) = 2xy \Leftrightarrow 9xy + 3x^2 + 6y^2 + 2xy = 2xy$$

\Leftrightarrow

$$3xy + x^2 + 2y^2 = 0$$

$$y = \frac{\pm \sqrt{9x^2 - 8x^2} - 3x}{4} = \frac{\pm \sqrt{x^2} - 3x}{4}$$

$$z = \frac{3}{x} + \frac{\pm \sqrt{x^2} - 3x}{4} =$$

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{2} \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3x + 2x = 5x \\ y = -x \\ z = 3x - x = 2x \end{cases}$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3x^2 - 4x^2 - x^2}{x^2 - 6x^2} = \frac{-2x^2}{-5x^2} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3x^2 - x^2 - 4x^2}{x^2 - \frac{3x^2}{2}} = \frac{-2x^2}{-\frac{1}{2}x^2} = 4$$

значит, наибольшее возможное значение -4 .

Ответ: 4

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Теперь нам известно, что $v_1 + v_2 = 48$, $v_1 \cdot v_2 = 540$

$$v_M + v_B = 48, \quad v_M \cdot v_B = 540.$$

Найдем корни уравнения

$$(x - v_M)(x - v_B) = x^2 - (v_M + v_B)x + v_M \cdot v_B =$$

$$= x^2 - 48x + 540 = 0$$

\Updownarrow

$$\begin{cases} x = 30 \\ x = 18 \end{cases}$$

Значит, $v_M = 30$, $v_B = 18$ ($\frac{\text{км}}{\text{ч}}$).

$$\frac{s \cdot (v_M - v_B)}{v_B \cdot v_M} = 2 \Leftrightarrow s = \frac{2 v_B \cdot v_M}{v_M - v_B} = \frac{2 \cdot 540}{18} = 90 \text{ км}$$

Ответ: 90 км.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

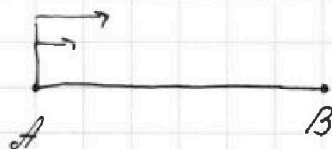
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.

Пусть, v_B - ск. велосипедиста,

v_M - ск. мотоциклиста.

S - весь путь от А до В.



Напишем формулы все, что дано в условии:

$$\textcircled{1} \frac{S}{v_B} - \frac{S}{v_M} = 2 \Leftrightarrow \frac{S(v_M - v_B)}{v_B \cdot v_M} = 2$$

$$\textcircled{2} v_M \cdot \frac{S}{v_B} - v_B \cdot \frac{S}{v_M} = 96 \Leftrightarrow \frac{S(v_M - v_B)(v_M + v_B)}{v_B \cdot v_M} = 96$$

$$\textcircled{3} \frac{S}{v_B + 6} - \frac{S}{v_M + 6} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{S(v_M - v_B)}{(v_B + 6)(v_M + 6)} = \frac{5}{4}$$

Разделим $\textcircled{2}$ на $\textcircled{1}$:

$$v_M + v_B = \frac{96}{2} = 48.$$

Разделим $\textcircled{1}$ на $\textcircled{3}$:

$$\frac{(v_B + 6)(v_M + 6)}{v_B \cdot v_M} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 5 \cdot v_B \cdot v_M + 30(v_B + v_M) + 180 = 2v_B \cdot v_M$$

Подставим $v_M + v_B = 48$.

$$v_B \cdot v_M = 60 + 10 \cdot 48 = 540$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

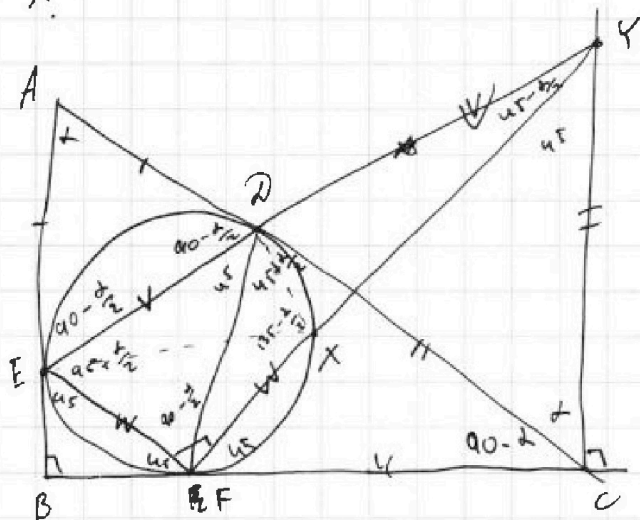
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7.



Т.к. $AE \parallel CY$, то $\triangle AED \sim \triangle CYD$

Значит, $\frac{AD}{DC} = \frac{ED}{DY}$

$\triangle FDP \sim \triangle EXY$

\Downarrow

$$\frac{DF}{FY} = \frac{XY}{EY} \quad ; \quad \frac{EX}{XY} = \frac{FD}{DY} \quad \Rightarrow \quad DY = \frac{FA}{2\sqrt{2}}$$

$$YE \cdot YD = YF \cdot YX$$

$$\frac{EY}{DY} = 1 + \frac{ED}{DY} \quad ; \quad \frac{EY}{FY} = \dots$$

EX - диаметр, т.е. $\angle EFX = 90^\circ$ Значит, $EX \parallel BC$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab : 3^{11} 7^{11}$$

$$bc : 3^{13} 7^{16}$$

$$ac : 3^{21} 7^{38}$$

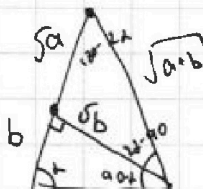
abc

$$3a + 3b = 11$$

$$1a + 3b = 11$$

$$3b + 3c = 13$$

$$2b + 7c = 16$$



$$\alpha = \alpha/2$$

$$(a+b, a^2 - 2ab + b^2)$$

$$a^2 + 2ab + b^2$$

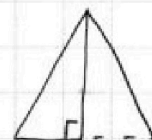
$$(a+b, 10ab)$$

10

$$\sqrt{a^2} - \sqrt{a+4x-1} =$$

$$\sqrt{a+4x-1} = \sqrt{a^2} + 4x - 1$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$



$$\frac{b}{\sqrt{b}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$\sqrt{b} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

$$\sqrt{a-b}$$

$$\sqrt{a}$$

$$b = 2\sqrt{b} - 1$$

$$(2x - 4)(x - 1)$$

$$\frac{1}{2}$$

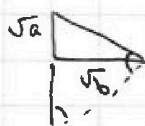
$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 4$$

$$2x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$x^2 - 1.5x + 2 = 0$$

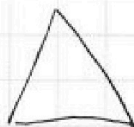
$$9 - 3a$$

$$(2x - 3)(x)$$



$$\frac{3}{2}$$

$$3 \cdot \frac{2}{3}$$





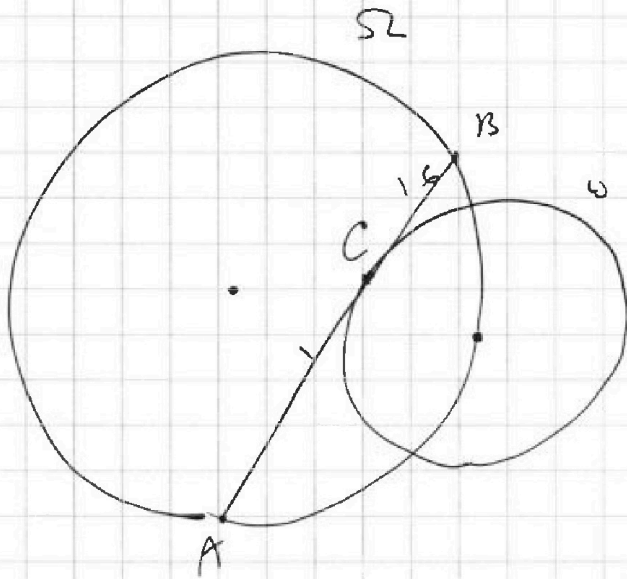
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$$

$$\sqrt{a^2} = \frac{a+b}{2}$$

$$\sqrt{a}$$

$$3x + 2y = 2$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3x + 2y}$$

$$\frac{x + 3y}{xy} = \frac{2}{3x + 2y}$$

$$(x + 3y)(3x + 2y) = 2xy$$

$$3x^2 + 9xy + 2xy + 6y^2 = 2xy$$

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$$

$$x = \frac{9y^2 - 8y^2}{2} \quad D = y^2$$

$$\frac{-3 \pm |y|}{2}$$

54

$$a + b =$$

$$y \geq 0$$

$$3 \cdot \left(\frac{-3 + y}{2} \right)^2 - 4y^2$$



$$a + b = 11$$

$$b + c = 18$$

25

$$a + b = 11$$

$$b + c = 18$$

$$a + c = 21$$

38

$$c = 14$$

$$b = 4$$

$$a = 7$$

$$a + b = 11$$

$$b + c = 16$$

$$a + c = 38$$

$$a + b + c = 27$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{4x-1} = \sqrt{2x^2-3x+4} + 16x^2 - 2x + 1 + 2(4x-1)\sqrt{2x^2-3x+4} - 2x^2 - x - 3$$

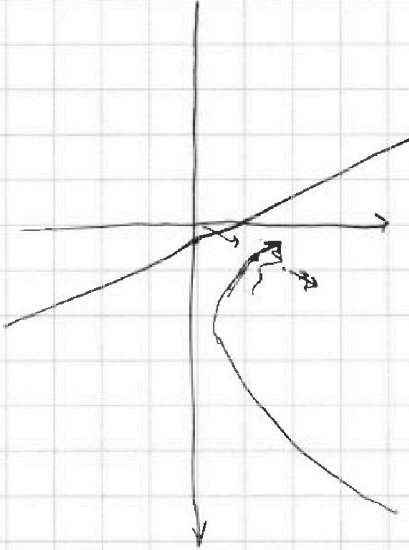
$$16x^2$$

$$\sqrt{4x-1}$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a+b}$$

$$2\sqrt{3x}$$

$$\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)}$$



$$2x_1^2 - 3x_1 + 4 = 2x_2^2 - 3x_2$$

$$2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 3(x_1 - x_2)$$

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad -1$$

$$2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = x_2 - x_1$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$2x_1^2 - 3x_1 - 2x_2^2 + 3x_2$$

$$2(x_1 + x_2)(x_1 + x_2) + 3(x_2 - x_1) = (x_1 - x_2)(2(x_1 + x_2) - 3)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

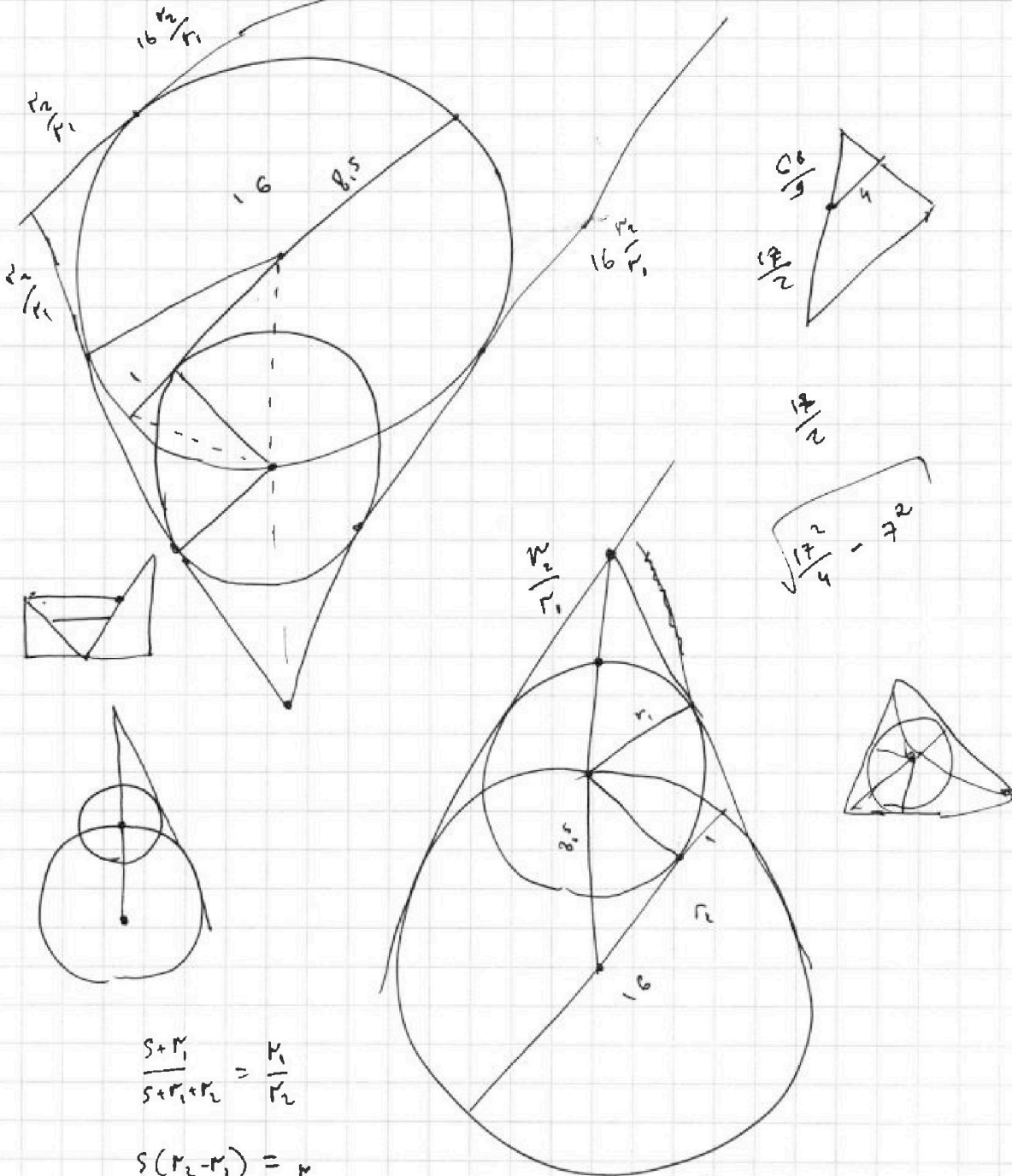
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!



$$\frac{S + r_1}{S + r_1 + r_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$S(r_2 - r_1) = r_1 r_2$$

69

$$\frac{17}{9} \cdot \frac{9}{53}$$

306

442

$$17 \cdot 4 \cdot$$

$$\frac{17 \cdot 2 \sqrt{13}}{9}$$

$$13 \cdot 17$$

$$\frac{221}{13} = 17$$

$$\frac{17 \cdot 17}{17} = 17$$

$$\frac{15}{75} = \frac{1}{5}$$

34

$$\frac{64}{4} = 16$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

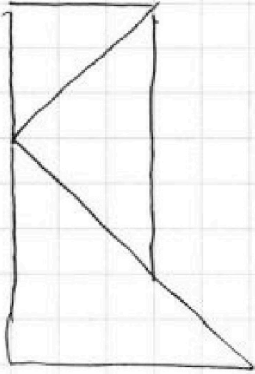
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

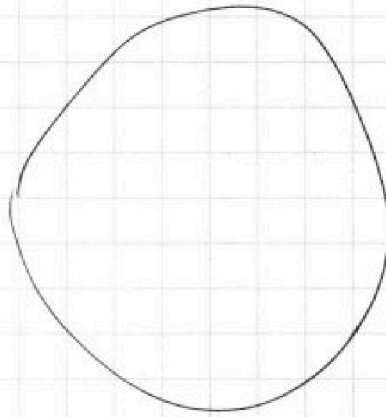
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{EF}{FY} = \frac{BE}{FC}$$



$$\sqrt{2x_1^2 - 3x_1 + 1}$$

$$f(x_1) - g(x_1) = h(x_1)$$

$$f(x_2) - g(x_2) = h(x_2)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



d_M

$$\frac{S}{d_A} - \frac{S}{d_M} = 2$$

$$d_M \cdot \frac{S}{d_M} = 96$$

$$d_M \cdot \frac{S}{d_A}$$

$$\frac{S}{d_A + 6} - \frac{S}{d_M + 6} = 4 \frac{5}{4}$$

$$\frac{S(d_M - d_A)}{(d_A + 6)(d_M + 6)} = \frac{5}{4}$$

2B

$$\frac{S \cdot d_M - S \cdot d_A}{d_M \cdot d_A} = 2$$

$$\frac{S(d_M - d_A)}{d_M \cdot d_A} = 2$$

$$S \frac{(d_M - d_A)(d_M + d_A)}{d_M \cdot d_A} = 96$$

$$\frac{2}{5} = \frac{(d_A + 6)(d_M + 6)}{d_M \cdot d_A}$$

$$x^2 - 48x + 540 = 0$$

4.4.5
6.9.10

- 2A
- 4 + 44
- 40 8
- 30 · 18

$$d_M + d_A = 48$$

$$2d_1 \cdot d_2 = 5d_1 \cdot d_2 + 30d_1 + 30d_2 + 5 \cdot 180$$

30 · 48

$$3d_1 \cdot d_2 = 10 \cdot 48 + 180$$

540