



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



9 КЛАСС. Вариант 14

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x - y = 3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклистику на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже ~~велосипедиста~~^{мотоциклиста}. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = \sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$$ab : 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$bc : 3^{19} \cdot 7^{17} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{ по условию, тогда:}$$

$$\begin{array}{r} 14+19+23 \\ \hline 33 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 33+56 \\ \hline 89 \end{array}$$

$$ac : 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$ab \cdot bc \cdot ac : 3^{14} \cdot 3^{19} \cdot 3^{23} \cdot 7^{13} \cdot 7^{17} \cdot 7^{42}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 3^{56} \cdot 7^{72}$$

$$abc : 3^{28} \cdot 7^{36}$$

Наименее значение произведения abc мы получим, если
 abc не содержит других простых множителей, кроме 3 и 7 ,
тогда наименее значение abc , удовлетворяющее условию:
 $\underline{3^{28} \cdot 7^{36}}$.

$$\text{Ответ: } 3^{28} \cdot 7^{36}$$



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

$\frac{a}{b}$ - несократимая дробь $a \neq b$ - ~~бесконечно~~
~~числовые~~
~~числа~~

$$a \in \mathbb{N}; b \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} \quad m?$$

у

Необходимо найти

$$(a+b)(a+b) - 9ab$$

$$\text{НОД}(a+b, a^2 - 9ab + b^2)$$

$$\frac{a^2 - 9ab + b^2}{a+b} = \frac{(a+b)(a-b) - 9ab}{a+b} = a-b - 9 \frac{ab}{a+b}$$

Предположим, что частное от деления a на m равно n , а остаток от деления b на m равен y , если

$$a+b : m \Rightarrow x+y : m \text{ при } x < m; y < m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+y = m$$

$$a^2 - 9ab + b^2 : m \Rightarrow x^2 - 9xy + y^2 : m$$

у

$$x^2 - 2xy + y^2 - 7xy : m$$

$$x^2 - xy - 7xy : m$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - 11xy : m$$

$$(x+y)^2 - 11xy : m$$

наибольшее
общее деление
 $m=11$.

$$m^2 - 11xy : m \Rightarrow 11xy : m$$

при этом $x \neq m$
 $y \neq m$

$$\Rightarrow 11 : m \Rightarrow m=1$$

$$\text{или } m=11$$

Ответ: 11.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5 (продолжение)

$$216x^4 - 828x^3 + 1038x^2 - 505x + 75 = 0$$

$$\begin{array}{r} + 828 \\ 505 \\ \hline 1333 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 1038 \\ 39 \\ \hline 1119 \end{array}$$

Задача 3.

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

$$\sqrt{3x^2 + x - 6x + 1 + 5} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

$$\sqrt{(3x^2 + x + 1) + (5 - 6x)} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

$$\text{Об3: } 3x^2 - 5x + 6 \geq 0; 3x^2 + x + 1 \geq 0$$

Пусть

$$3x^2 + x + 1 = y$$

$$5 - 6x = z$$

Тогда:

$$\sqrt{y + z} - \sqrt{y} = z$$

$$\sqrt{y + z} = z + \sqrt{y} \quad (\text{обе части в квадрат})$$

$$y + z = z^2 + 2z\sqrt{y} + y$$

$$z - z^2 = 2z\sqrt{y} \quad (\text{отсюда } z \neq 0)$$

$$z(1 - z) = 2z\sqrt{y}$$

$$1 - z = 2\sqrt{y}$$

$$1 - 2z + z^2 = 4y \quad \downarrow \quad \begin{array}{l} \text{обе части в} \\ \text{квадрат} \end{array}$$

$$1 - 2(5 - 6x) + (5 - 6x)^2 = 4(3x^2 + x + 1)$$

$$1 - 10 + 12x + 25 - 60x + 36x^2 = 12x^2 + 4x + 4$$

$$12 - 52x + 24x^2 = 0 \quad | :2$$

$$\begin{array}{r} 165 \\ 120 \\ \hline 45 \\ 40 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 165 \\ 120 \\ \hline 45 \\ 40 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 165 \\ 120 \\ \hline 45 \\ 40 \\ \hline 5 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$24x^2 - 52x + 12 = 0 \quad | :2$$

$$12x^2 - 26x + 6 = 0 \quad | :2$$

$$6x^2 - 13x + 3 = 0$$

$$D = \underbrace{13^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3}_{169} = 97$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{97}}{12}$$

$$\text{Ответ: } \frac{13 + \sqrt{97}}{12}, \frac{13 - \sqrt{97}}{12}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2

$a \neq b$ - единственное решение

$$a \in N, b \in N$$

$m = ?$

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2}$$

Задача 4.

$$AC = 1$$

$$BC = 25$$

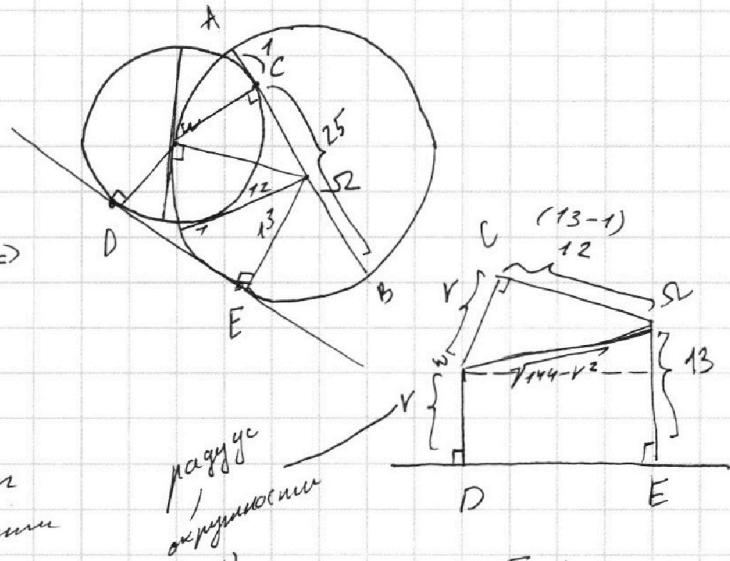
$$DE = ?$$

By условия:

$$AB = 1 + 25 = 26 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{26}{2} = 13$$

радиус
окружности S_2

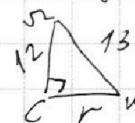


П.к. в ~~треугольнике~~ лежат
на окружности S_2 лежат
 \Rightarrow через точку
в них лежат

правильный касательный $\Rightarrow DE = \sqrt{144 - r^2} - \sqrt{r^2}$

$$r = ?$$

\Rightarrow нахождение $\triangle ABC$:



$$r = \sqrt{13^2 - 12^2} =$$

$$= \sqrt{169 - 144} = 5$$

По теореме Пифагора:

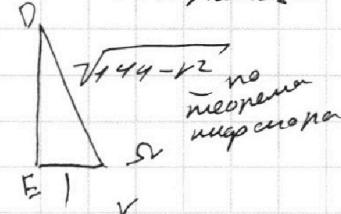
$$DE = \sqrt{D_{S2}^2 - E_{S2}^2} =$$

$$= \sqrt{144 - r^2 - (13 - r)^2} =$$

$$= \sqrt{144 - r^2 - 169 + 26r - r^2} = \sqrt{26r - 2r^2 - 25} =$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{3}{5} - \frac{9}{13} \\ & \frac{26}{13} - \frac{75}{55} \\ & \hline & = \sqrt{26 \cdot 5 - 2 \cdot 25 - 25} = \sqrt{130 - 50 - 25} = \\ & = \sqrt{130 - 75} = \sqrt{55} \end{aligned}$$

в S_2 DE - промежуточное изображение



по теореме
пифагора

Ответ: $\sqrt{55}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \frac{x}{z} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{x = \frac{2}{3} z}$$

$$5 \cdot \frac{2}{3} z - 3z = y$$

$$(\frac{10}{3} - 3)z = y$$

$$\boxed{\frac{1}{3}z = y}$$

$$\frac{25 \cdot \frac{4}{9}z^2 - \frac{1}{9}z^2 - z^2}{\frac{1}{9}z^2 + 3z^2} =$$

$$= \frac{\frac{100}{9} - \frac{1}{9} - 1}{\frac{1}{9} + 3} = \frac{\frac{100-1-9}{9}}{\frac{1}{9} + \frac{27}{9}} =$$

$$= \frac{90}{28} = 3 \frac{6}{28}$$

$$2) \frac{x}{z} = \frac{72}{150} = \frac{12}{25}$$

$$\boxed{x = \frac{12}{25} z}$$

$$5 \cdot \frac{12}{25} z - 3z = y$$

$$\frac{12}{5} z - 3z = y$$

$$\frac{2}{5} z - 3z = y$$

$$\boxed{y = -\frac{3}{5} z}$$

$$\frac{25 \cdot \frac{144}{25^2} z^2 - \frac{9}{25} z^2 - z^2}{\frac{9}{25} z^2 + 3z^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{144}{25} - \frac{9}{25} - \frac{25}{25} \right) z^2}{\left(\frac{9}{25} + \frac{75}{25} \right) z^2} =$$

$$= \frac{144 - 9 - 25}{9 + 75} = \frac{110}{84} = 1 \frac{26}{84}$$

$$3 \frac{6}{28} > 1 \frac{26}{84} \Rightarrow \text{наименшее}\\ \text{одноточное значение выражения } 1 \frac{26}{84} =$$

$$= 1 \frac{13}{42} .$$

Ответ: $1 \frac{13}{42}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Zagava 5.

$$5x - y = 3z \quad ; \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} \min - ?$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{5x-32} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{8(5x - 3z) + x}{x(5x - 3z)} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{40x - 24z + x}{5x^2 - 3zx} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{41x - 24z}{5x^2 - 3zx} = \frac{15}{z}$$

$$41x - 24x^2 = 15.5x^2 - 15.3x$$

$$\underbrace{(41+45)}_{86} Z X - 24 \frac{45}{Z^2} - 75 \frac{45}{X^2} = 0$$

$$75x^2 - 86z x + 24z^2 = 0 \quad | : z^2$$

$$75\left(\frac{x}{z}\right)^2 - 86 \frac{x}{z} + 24 = 0$$

$$D = 86^2 - 4 \cdot 75 \cdot 24 = \\ = 7396 - \cancel{1152} 7200 = 196 = 14$$

$$\frac{x}{7} = \frac{86 \pm 14}{2 \cdot 75}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(490 - 336 + 42) \sqrt{m} + (6 - 10) \sqrt{m}^2 - 2352 = 0 \quad -\frac{990}{336}$$

$$-40\sqrt{m}^2 + 196\sqrt{m} - 2352 = 0 \quad | : (-4) \quad +\frac{154}{42}$$

$$\sqrt{m}^2 - 99\sqrt{m} + 588 = 0$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 588 =$$

$$= 2401 - 2352 = 49$$

$$\sqrt{m} = \frac{49 \pm 7}{2}$$

$$\sqrt{m}_1 = \frac{49 + 7}{2} = \frac{56}{2} = 28 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right)$$

$$\sqrt{m}_2 = \frac{49 - 7}{2} = \frac{42}{2} = 21 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right)$$

$$\begin{array}{r} -196 \quad | \\ -16 \quad | \\ \hline 35 \\ -36 \\ \hline 10 \\ +36 \\ \hline 49 \\ \hline 49 \end{array} \quad \begin{array}{r} 49 \\ \times 49 \\ \hline 441 \\ 196 \\ \hline 2401 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2352 \quad | \\ 20 \quad | \\ \hline 35 \\ -35 \\ \hline 2 \\ \hline 32 \\ -32 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 910 \\ 2401 \\ -2352 \\ \hline 0049 \end{array}$$

Две \sqrt{m} : $\sqrt{8} = 49 - 21 = 28 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right) \Rightarrow \sqrt{8} > \sqrt{21} - \text{условие}$

двоих

условие

Две \sqrt{m} : $\sqrt{21} = 49 - 28 = 21 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right) \Rightarrow \sqrt{21} > \sqrt{8}.$

$$\frac{21}{84} \quad S = \frac{\sqrt{8} \sqrt{21}}{\sqrt{21} - \sqrt{8}} \approx \frac{28 \cdot 21}{28 - 21} = \frac{28 \cdot 21}{7} = 4 \cdot 21 = 84 \text{ (км)}$$

Ответ: 84 км.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

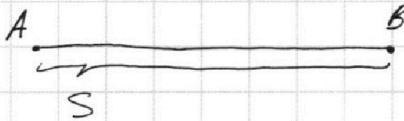


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.



v_B - скорость вспышки молчания

v_m - скорость

вспышки молчания

$s - ?$

Условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{s}{v_m} + 1 = \frac{s}{v_B} \quad (1) \\ \text{час} \\ \frac{s}{v_m} \cdot v_B + 49 = \frac{s}{v_B} \cdot v_m \quad (2) \\ \text{49 км} \\ \frac{s}{v_m + 7} + \frac{36}{60} = \frac{s}{v_B + 7} \quad (3) \\ \text{7 км} \end{array} \right.$$

У(1):

$$s \left(\frac{1}{v_m} - \frac{1}{v_B} \right) = -1$$

$$s = \frac{1}{\frac{1}{v_B} - \frac{1}{v_m}}$$

$$s = \frac{1}{v_m - v_B}$$

$$s = \boxed{\frac{v_B v_m}{v_m - v_B}} \quad (4)$$

У(2) и (3):

$$\frac{v_B}{v_m} \cdot \frac{v_B v_m}{(v_m - v_B)} + 49 = \frac{v_m}{v_B} \cdot \frac{v_B v_m}{(v_m - v_B)}$$

$$\frac{v_B^2}{v_m - v_B} + 49 = \frac{v_m^2}{v_m - v_B} \quad | \cdot (v_m - v_B)$$

$$v_B^2 + 49(v_m - v_B) = v_m^2$$

$$v_B^2 + 49(v_m - v_B) - v_m^2 = 0$$

$$(v_B - v_m)(v_B + v_m) + 49(v_m - v_B) = 0$$

$$(v_B - v_m)(v_B + v_m) - 49(v_B - v_m) = 0$$

$$(v_B - v_m)(v_B + v_m - 49) = 0$$

$$\boxed{v_B = v_m \text{ и } v_B = 49 - v_m} \quad (5)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ (3), (4), (5):

$$\frac{S}{\sqrt{m} + 7} + \frac{36}{60} = \frac{S}{\sqrt{8} + 7}$$

$$\frac{\sqrt{8}\sqrt{m}}{\sqrt{m} - \sqrt{8}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{m} + 7)} + \frac{36}{60} = \frac{\sqrt{8}\sqrt{m}}{\sqrt{m} - \sqrt{8}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{8} + 7)}$$

$$\frac{\sqrt{8}\sqrt{m}}{(\sqrt{m} - \sqrt{8})(\sqrt{m} + 7)} - \frac{\sqrt{8}\sqrt{m}}{(\sqrt{m} - \sqrt{8})(\sqrt{8} + 7)} = -\frac{36}{60}$$

$$\frac{\sqrt{8}\sqrt{m}}{\sqrt{m} - \sqrt{8}} \left(\frac{1}{\sqrt{m} + 7} - \frac{1}{\sqrt{8} + 7} \right) = -\frac{36}{60}$$

$$\frac{\sqrt{8}\sqrt{m}}{\sqrt{m} - \sqrt{8}} \left(\frac{\sqrt{8} + 7 - \sqrt{m} - 7}{(\sqrt{m} + 7)(\sqrt{8} + 7)} \right) = -\frac{36}{60}$$

$$\frac{\sqrt{8}\sqrt{m} (\sqrt{8} - \sqrt{m})}{(\sqrt{m} - \sqrt{8})(\sqrt{m} + 7)(\sqrt{8} + 7)} = -\frac{36}{60}$$

$$\frac{-\sqrt{8}\sqrt{m}}{(\sqrt{m} + 7)\sqrt{8} + 7} = -\frac{6}{10}$$

$$10\sqrt{8}\sqrt{m} = 6(\sqrt{m} + 7)(\sqrt{8} + 7)$$

$$10(49 - \sqrt{m})\sqrt{m} = 6(\sqrt{m} + 7)(49 - \sqrt{m} + 7)$$

$$10 \cdot (49\sqrt{m} - \sqrt{m}^2) = (6\sqrt{m} + 42)(56 - \sqrt{m})$$

$$490\sqrt{m} - 10\sqrt{m}^2 = \underbrace{6 \cdot 56\sqrt{m}}_{\times \frac{3}{6} \frac{6}{336}} - \underbrace{6\sqrt{m}^2}_{\times \frac{12}{42} \frac{72}{224}} + \underbrace{42 \cdot 56 - 42\sqrt{m}}_{+ \frac{112}{224} \frac{224}{2352}}$$

$$\underline{490\sqrt{m}} - \underline{10\sqrt{m}^2} = \underline{336\sqrt{m}} - \underline{6\sqrt{m}^2} + \underline{2352} - \underline{42\sqrt{m}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

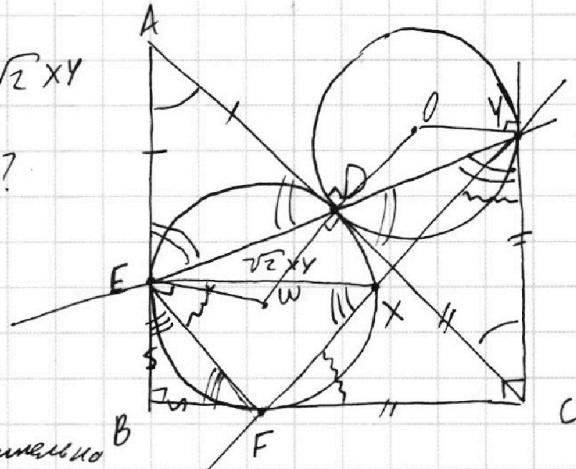
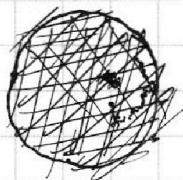
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7.

$$\text{Дано: } EX = \sqrt{2}XY$$

$$AD : DC - ?$$



Синтез точки Y относительно
окружности w радиуса: ~~Радиус~~
 $DY \cdot YE = YX \cdot YF \quad (1)$

П.к. окружность w вписана в: $\angle DAE; \angle DCY; \angle EBF \Rightarrow$

$$\Rightarrow AE = AD; DC = FC; BE = EF.$$

AB || YC, т.к. $AB \perp BC; YC \perp BC \Rightarrow \angle DAE \cong \angle ACY$, как
внешнее одностороннее, при $AB \parallel YC$
 $\angle ADE = \angle YDC$, как внутреннее

$$\Rightarrow \triangle EAD \sim \triangle DCY \text{ (по двум углам)} \Rightarrow DC = CY$$

П.к. $DC = CY \Rightarrow$ окружность, вписанная в $\angle DCY$ будет
касаться сторон угла в точках D и Y.

~~Любое узкое сечение окружности суживается в месте соприкосновения с касательной~~
~~окружности в концентрических она будет вписана~~
 \Rightarrow м.к. окружность w и \odot

$$\frac{AD}{DC} = 1.$$

$$\text{By (1): } DY(DY + DE) = XY(XY + YF), \text{ где } \frac{DE}{DY} = \frac{AD}{DC}$$

$$DY^2 + DY \cdot DE = XY^2 + XY \cdot YF$$

из подобия

Однако:

$$\angle XEF = \angle XFC \text{ (угол между касательной и касательностью)}$$

$$\text{П.к. } \angle BEF = \pi/2 \Rightarrow \angle FEB = \angle EFB = \angle EXF \text{ (внешние углы } \triangle)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.



$S - ?$

v_m - скорость
мотоциклиста

v_B - скорость
байкера

B

Получим систему из 3-х
уравнений с тремя
неизвестными:

$$v_B + v_m = \frac{S}{t}$$

$$\frac{S}{v_m} + t = \frac{S}{v_B}$$

$$\frac{S}{v_m + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}} + \frac{36}{60} t = \frac{S}{v_B + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S}{v_m} + t = \frac{S}{v_B} \quad (1) \\ \frac{S}{v_m + 7} + \frac{36}{60} t = \frac{S}{v_B + 7} \quad (2) \end{array} \right.$$

$$49 \text{ км} + \frac{S}{v_m} \cdot v_B = \frac{S}{v_B} \cdot v_m$$

$$\frac{S}{v_m + 7} + \frac{36}{60} t = \frac{S}{v_B + 7} \quad (2)$$

из (1):

$$\frac{S}{v_m} - \frac{S}{v_B} = -1$$

$$\frac{S}{v_m} \cdot v_B + 49 = \frac{S}{v_B} \cdot v_m \quad (3)$$

$$S \left(\frac{1}{v_m} - \frac{1}{v_B} \right) = -1$$

из (4) и (3)

$$\left(\frac{v_B v_m}{v_B - v_m} \right) \cdot \frac{v_B}{v_m} + 49 = \left(\frac{v_B v_m}{v_B - v_m} \right) \cdot \frac{v_m}{v_B}$$

отсюда

$$S = \frac{1}{\frac{1}{v_B} - \frac{1}{v_m}}$$

$$\frac{v_B^2}{v_B - v_m} + 49 = \frac{v_m^2}{v_B - v_m} / \cdot (v_B - v_m)$$

$$S = \frac{1}{\frac{v_B v_m}{v_B - v_m}}$$

$$v_B^2 + 49v_B - 49v_m - v_m^2 = 0 \quad S = \frac{v_B v_m}{v_B - v_m} \quad (4)$$

$$(v_B - v_m)(v_B + v_m) + 49(v_B - v_m) = 0$$

$$(v_B - v_m)(v_B + v_m + 49) = 0$$

$$v_B = v_m \text{ или}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

 МФТИ.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Zagora 3.

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x \quad (\text{выражение обе части в квадрат})$$

$$3x^2 - 5x + 6 \geq 0 \quad 3x^2 + x + 1 \geq 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 3.6 < 0$$

$$3x^2 - 5x + 6 - 2\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} + \dots$$

$$+3x^2 + x + 1 = 25 - 60x + 36x^2$$

$$\frac{3x^2 - 5x + 6}{2} + \frac{3x^2 + x + 1}{2} = \frac{-25 + 60x - 36x^2}{2}$$

$$-30x^2 + 56x - 18 = 2\sqrt{3x^2 - 5x + 6} \sqrt{3x^2 + x + 1} \quad | :2$$

$$-15x^2 + 28x - 9 = \sqrt{3x^2 - 5x + 6} \sqrt{3x^2 + x + 1}$$

$$(-15x^2 + 28x - 9)^2 = (3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)$$

$$(-15x^2 + 28x - 9)(-15x^2 + 28x - 9) = 9x^4 + \underline{3x^3} + \underline{3x^2} - \underline{15x^3} - \underline{5x^2} - \underline{5x} +$$

$$+ \frac{18x^2 + 6x + 6}{=}$$

$$15^2 x^4 - \underline{15 \cdot 28 x^3} + \underline{15 \cdot 9 x^2} - \underline{15 \cdot 28 x} + \underline{28^2 x^2} - \underline{9 \cdot 28 x} + \underline{9 \cdot 15 x^2} -$$

$$-9 \cdot 28x + 81 = 9x^4 - 12x^3 + 16x^2 + x + 6$$

$$225x^4 - 840x^3 + (135 + 784 + 135)x^2 -$$

$$-504X + 81 = 9X^4 - 12X^3 + 16X^2 + X + 6$$

$$\begin{array}{r}
 .10 \\
 -225 \\
 \hline
 9 \\
 \hline
 275 \\
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 .10 \\
 -840 \\
 \hline
 728 \\
 \hline
 828 \\
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1 \\
 +135 \\
 \hline
 135 \\
 \hline
 240 \\
 \hline
 784 \\
 \hline
 1059 \\
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 .1 \\
 -1055 \\
 \hline
 16 \\
 \hline
 1038 \\
 \end{array}$$