



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 9 КЛАСС. Вариант 14

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{14}7^{13}$ ,  $bc$  делится на  $3^{19}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $3^{23}7^{42}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x.$$

- [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC = 1$  и  $BC = 25$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .
- [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$5x - y = 3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения  $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$ .

- [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклистику на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист прискажал бы в  $B$  на 36 минут позже ~~велосипедиста~~ мотоциклиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .

~~велосипедиста~~

- [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX = \sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD : DC$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓1:

Обозначим степень входящих числа 3 в  $a$  за  $d$ , в  $b$  за

$\beta$ , в  $c$  за  $f$ . Тогда по условию

$$\begin{cases} d+\beta \geq 14 \\ \beta+f \geq 19 \\ d+f \geq 23 \end{cases}$$

Складывая, получаем  $d(d+\beta+f) \geq 56$ ,  $d+\beta+f \geq 28$ .

В произведение abc числа 3 входят в степени  $d+\beta+f$ ,

поэтому степень входящий числа 3 в abc не меньше 28.

т.к.  $\frac{a}{abc}$  делится на  $3^{23} \cdot 7^{42}$ , то степень входящий 7

в abc не меньше 42. Тогда  $abc \geq 3^{28} \cdot 7^{42}$ , значит наименьшее значение abc

Приведём пример: пусть  $a = 3^9 \cdot 7^{13}$ ,  $b = 3^5$ ,  $c = 3^{14} \cdot 7^{29}$

Тогда  $ab = 3^{23} \cdot 7^{42}$ , т.е.  $ab : 3^{14} \cdot 7^{13}$ ;  $bc = 3^{19} \cdot 7^{29}$ ,  $bc : 3^{19} \cdot 7^{17}$ ;  $ac = 3^{23} \cdot 7^{42}$ ,  $ac : 3^{23} \cdot 7^{42}$ ;  $abc = 3^{28} \cdot 7^{42}$

Ответ:  $3^{28} \cdot 7^{42}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{2}$ :

Т.к. числитель можно сократить на  $m$ , то  $(a+b) : m$ .

Оба Пусть  $a \equiv x$ , тогда  $b \equiv m-x$ ,  $x \in (0, m)$ ,  $m > 1$ .

Т.к.  $(a^2 - gab + b^2) : m$ , то  $a^2 - gab + b^2 \stackrel{m}{\equiv} 0$ , тогда

$$x^2 - g \cdot x \cdot (m-x) + (m-x)^2 \stackrel{m}{\equiv} 0, \text{ т.е. } x^2 - gx_m + gx^2 + m^2 - 2xm + x^2 \stackrel{m}{\equiv} 0$$

$$11x^2 - 11xm + m^2 \stackrel{m}{\equiv} 0, \text{ значит } 11x^2 \not\equiv 0$$

Пусть  $m > 11$ , тогда  $(x, m) > 1$ . Обозначим  $(x, m) = k$  где  $k > 1$ .

Тогда  $m = k \cdot c$ ,  $x = k \cdot d$ , значит  $a \stackrel{kc}{\equiv} kd$ ,  $b \stackrel{kc}{\equiv} kc - kd$

Но тогда  $a$  имеет вид  $kd \cdot e + kc$ , а  $b$  имеет вид  $k(c-d) \cdot f$

+  $kc$ , т.е. оба числа кратны  $k$ , что невозможно ( $k > 1$ ).

значит  $m \leq 11$ . Приведём пример на  $m=11$ :  $a=6$ ,  $b=5$ . Тогда:

$$\frac{11}{6^2 - 9 \cdot 6 - 5 + 25} = \frac{11}{-209} = -\frac{11}{11 \cdot 19} = -\frac{1}{19}.$$

Очевидно при  $m=11$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x \quad \text{N3:}$$

Замена: пусть  $3x^2 - 5x + 6 = U^2$ ,  $3x^2 + x + 1 = V^2$  ( $U \geq 0, V \geq 0$ )

Тогда  $\sqrt{3x^2 - 5x + 6} = U$ ,  $\sqrt{3x^2 + x + 1} = V$ . Заметим, что  $5 - 6x = 3x^2 - 5x + 6 - (3x^2 + x + 1)$  т.е.  $5 - 6x = U^2 - V^2$ . Тогда:

$$U^2 - V^2 = U^2 - V^2$$

$U - V = (U - V)(U + V)$ . Рассмотрим 2 варианта: 1)  $U \neq V$ ; 2)  $U = V$ .

1) при  $U \neq V$ :  $U + V = 1$ , т.е.  $\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} = 1 \\ \sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x \end{cases}$  (1)

$$\begin{cases} 2\sqrt{3x^2 - 5x + 6} = 6 - 6x & | :2 \\ \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} = 1 & | - \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{3x^2 - 5x + 6} = 3 - 3x & (1) \\ \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} = 1 & (2) \end{cases}$$

$$(1): \begin{cases} 3x^2 - 5x + 6 = (3 - 3x)^2 \\ 3 - 3x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 - 5x + 6 = 9 - 18x + 9x^2 \\ 3x \leq 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x^2 - 18x + 3 = 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{13 + \sqrt{97}}{12} \\ x = \frac{13 - \sqrt{97}}{12} \\ x \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{13 - \sqrt{97}}{12} \end{cases}$$

Тогда, возврашиваясь к системе:

$$\begin{cases} x = \frac{13 - \sqrt{97}}{12} \\ \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{13 - \sqrt{97}}{12} \\ \sqrt{3 \left( \frac{13 - \sqrt{97}}{12} \right)^2 - 5 \cdot \frac{13 - \sqrt{97}}{12} + 6} + \sqrt{3 \left( \frac{13 - \sqrt{97}}{12} \right)^2 + \frac{13 - \sqrt{97}}{12} + 1} = 1 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3}$  (продолжение):

$$x = \frac{13 - \sqrt{97}}{12}$$
$$\sqrt{3} \cdot \frac{169 - 26\sqrt{97} + 97}{144} - \frac{26 \cdot (13 - \sqrt{97})}{48} + \frac{288}{48} + \sqrt{3 \cdot \frac{169 - 26\sqrt{97} + 97}{144} + \frac{4(13 - \sqrt{97}) + 48}{48}} = 1$$

$$x = \frac{13 - \sqrt{97}}{12}$$

$$(2): \sqrt{3x^2 + x + 1} = 1 - (3 - 3x), \sqrt{3x^2 + x + 1} = 3x - 2$$

$$\begin{cases} 3x^2 + x + 1 = 9x^2 - 12x + 4 \\ 3x^2 - 2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x^2 - 13x + 3 = 0 \\ x \geq \frac{2}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{13 \pm \sqrt{97}}{12} \\ \end{cases}$$

ТОГДА ВОЗВРАЩАЕМСЯ В СИСТЕМУ:

$$\begin{cases} x = \frac{13 + \sqrt{97}}{12} \\ x = \frac{13 - \sqrt{97}}{12} \end{cases}$$

СИСТЕМА НЕ ИМЕЕТ РЕШЕНИЙ.

$$2) \text{ при } U \approx V: \text{ ТОГДА } \sqrt{3x^2 - 5x + 6} = \sqrt{3x^2 + x + 1}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 5x + 6 = 3x^2 + x + 1 \\ 3x^2 - 5x + 6 \geq 0 \\ 6x = 5 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 6x = 5 \\ 3x^2 - 5x + 6 \geq 0 \\ 6x = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{5}{6} \\ 3x^2 - 5x + 6 \geq 0 \end{cases}$$

$$(3): \text{ при } x = \frac{5}{6}: 3 \cdot \frac{25}{36} - 5 \cdot \frac{5}{6} + 6 \geq 0, \text{ что верно, значит } x = \frac{5}{6} \text{ подходит.}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{5}{6}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓ 5:

$$y = 5x - 3z, y^2 = (5x - 3z)^2 = 25x^2 - 30xz + 9z^2$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} > \frac{19}{z}, 1 \cdot xyz, 8yz + xz = 15xy$$

$$xz = 15xy - 8yz.$$

$$30xz = 450xy - 240yz$$

$$y^2 =$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N6 (правильное решение):

$$10V_m t_m - 154 t_m + 3V_m - 126 = 0 \quad (**)$$

$$u_3(2): V_m t_m = (49 - V_m) t_m + V_B \quad 49 - V_m$$

$$V_m t_m = 49 t_m - V_m t_m + V_B, \quad 2V_m t_m = 49 t_m - V_m + 49, \quad (*)$$

(\*)  $\rightarrow$  (\*\*):

$$245 t_m - 5V_m + 245 - 154 t_m + 3V_m - 126 = 0.$$

$$91 t_m - 2V_m + 119 = 0, \quad 2V_m = 91 t_m + 119$$

$$3V_m = \frac{273 t_m + 357}{2} \quad (***) \quad 10V_m = 455 t_m + 595 \quad (4)$$

$$10V_m t_m = 154 t_m - 3V_m + 126$$

$$(10V_m t_m) \cancel{- 154 t_m} \quad (455 t_m + 595) t_m = 154 t_m - \frac{273 t_m + 357}{2} + 126 \quad | \cdot 2$$

$$2t_m (455 t_m + 595) = 308 t_m - 273 t_m \cancel{+ 357} + 252$$

$$910 t_m^2 + 1190 t_m = 308 35 t_m - 105$$

$$910 t_m^2 - 1155 t_m + 105 = 0 \quad | : 5$$

$$182 t_m^2 - 231 t_m + 21 = 0. \quad D = 63009 - 45288 = 47721$$

Решая уравнение, получаем  $t_m$ , ищем поиске в (4)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

√6:

Пусть  $V_m$  (км/ч) — скорость мотоциклиста,  $V_m > 0$

$V_B$  (км/ч) — скорость велосипедиста,  $V_B > 0$ .

$t_m$  (ч) — время, за которое мотоциклист проехал путь АВ.

Тогда время, за которое велосипедист проехал АВ равно

или  $t_{m+1}$ . Тогда расстояние АВ одинаково для обоих

характеристиков, то  $V_m t_m = V_B (t_{m+1})$ . Из этого  $V_B t_m = V_m (t_{m+1})$

-49. Известно следующее:  $\frac{V_m t_m}{V_{m+1}} = \frac{V_m t_m}{V_B + 7} \neq \frac{3}{5}$

( $V_m t_m$  — расстояние от А до В).

$$\text{Тогда: } \begin{cases} V_m t_m = V_B t_m + V_B \\ V_B t_m = V_m t_m + V_m - 49 \\ \frac{V_m t_m}{V_{m+1}} = \frac{V_m t_m}{V_B + 7} \neq \frac{3}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} V_m t_m = V_B t_m + V_B \\ V_m t_m = V_B t_m + V_m - 49 \\ \frac{V_m t_m}{V_{m+1}} = \frac{V_m t_m}{V_B + 7} \neq \frac{3}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} V_B = 49 - V_m \\ V_m t_m = V_B t_m + V_B \\ V_m t_m = V_B t_m + V_m - 49 \\ \frac{V_m t_m}{V_{m+1}} = \frac{V_m t_m}{V_B + 7} \neq \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_B = 49 - V_m \\ V_m t_m = V_B t_m + V_B \end{array} \right. \quad (2)$$

$$5V_m t_m (V_B + 7) = 5(V_m + 7) V_m t_m \neq 3(V_m + 7)(V_B + 7) \quad (3)$$

$$\text{из (3): } 5V_m t_m (42 - V_m) = 5(V_m + 7) V_m t_m - 3(V_m + 7)(42 - V_m)$$

$$210V_m t_m - 5V_m^2 t_m = 5V_m^2 t_m + 35V_m t_m - 126V_m + 3V_m^2 - 882 + 21V_m$$

$$10V_m^2 t_m - 154V_m t_m + 3V_m^2 - 126V_m = 0 \quad | : V_m > 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 - 6x = u - v$$

$$u^2 - v^2 = u - v$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x \\ \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} = 1 \end{array} \right.$$

$$\left( \frac{13 - \sqrt{97}}{12} \right)^2 = \frac{169 - 26\sqrt{97} + 97}{144}$$

$$\sqrt{\frac{169 - 26\sqrt{97} + 97 - 260 + 20\sqrt{97} + 200}{48}}$$

87

$$\begin{array}{r} & + 97 \\ & 28 + 169 \\ & + 169 \\ \hline & 125 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \sqrt{3x^2 - 5x + 6} \\ \times 48 \\ \hline 96 \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 - \sqrt{97} \\ \times 12 \\ \hline 156 \\ 13 \\ \hline 125 \end{array}$$

$$\sqrt{\frac{169 - 26\sqrt{97} + 97 + 52 - 4\sqrt{97} + 48}{48}}$$

$$\sqrt{\frac{-6\sqrt{97} + 294}{48}} + \sqrt{\frac{-30\sqrt{97} + 366}{48}} = \sqrt{\frac{-\sqrt{97} + 494}{8}} + \sqrt{\frac{-5\sqrt{97} + 61}{8}} = 1$$

$$\begin{array}{l} 3x \geq 2 \\ x \geq \frac{2}{3} \end{array}$$

$$\sqrt{\frac{-10 + 49}{8}} + \sqrt{\frac{-50 + 61}{8}}$$

$$3 - 3x + \sqrt{3x^2 + x + 1} = 1, \sqrt{3x^2 + x + 1} = 3x - 2$$

5+

$$3x^2 + x + 1 = 9x^2 - 12x + 4, 6x^2 - 13x + 3$$

$$\frac{13 - \sqrt{97}}{12} \quad \text{if } \frac{8}{12} \quad 13 - \sqrt{97} > 8$$

$$13 - \sqrt{97} \vee 8, \sqrt{97} \vee 5$$

$$\frac{75}{36} - \frac{150}{36} + 6 \geq 0 \quad \frac{75}{36} - \frac{150}{36} + 216$$

$$\frac{z^2 + z + 6}{z - (6 + x_5) \cdot z^3} = \frac{z^2 + z + 6}{z - (5x_5 - 6) \cdot z^3} = \frac{z^2 + z + 6}{z^2 - 6x_5 z^2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

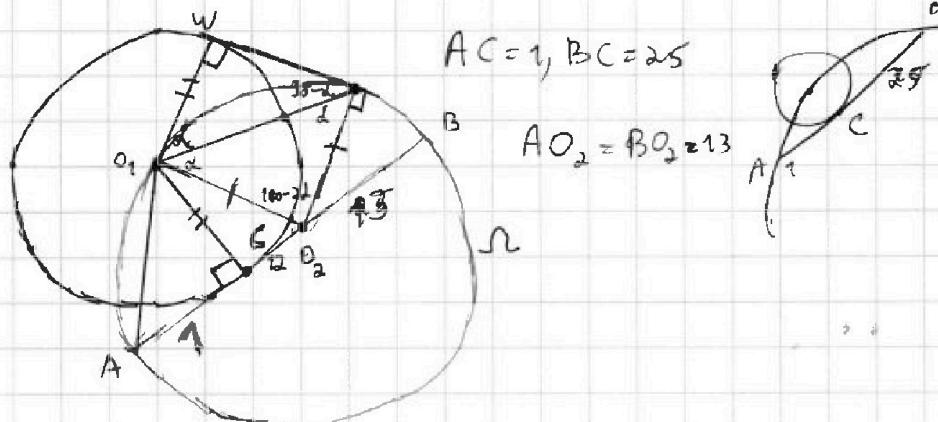
5

6

7

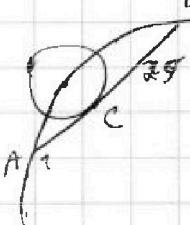
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AC = 1, BC = 25$$

$$AO_1 = BO_2 = 13$$



2

$$xy_{51} = zx + zy_{51}$$

$$\frac{zy}{51} - 1 \cdot \frac{zy}{51} = \frac{y}{1} + \frac{x}{8}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$bc : 3^{19} \cdot 7^{17}$$

$$ac : 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$\min(abc) \rightarrow$

$$3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$: b=1 \quad c=3^{19} \cdot 7^{17} \quad a=3^{14} \cdot 7^{13} \quad \frac{209+25}{294}$$

$$3^{33} \cdot 7^{42} : b=1 \quad c=3^{19} \cdot 7^{17} \quad a=3^{14} \cdot 7^{25} \quad \checkmark$$

$$a = 3^{d-13}$$

$$U^d$$

$$(3x - 3)^2 \geq 9x^2 - 27x + 9$$

$$3^{18-d} \cdot 3^{40-d} \geq \frac{3}{3}^{19}$$

$$b = 3^{14-d}$$

$$abc = 3^{d+14-d+23-d}$$

$$18-d+40-d \geq 19$$

$$c = 3^{23-d}$$

$$169 - 2d = 3^{37-d}$$

$$d=9, \quad \boxed{3^{28}}$$

$$58-2d \geq 19$$

$$3^{14-d} \cdot 3^{23-d} \geq 3^{19}$$

$$\text{abc}$$

$$2d \leq 39$$

$$d \leq 19.5$$

$$abc$$

$$\frac{360}{6} = 60, 3^{37-2d} \geq 3^{19}, 37-2d \geq 19, 18 \geq 2d, \boxed{9 \geq d}$$

$$3^{28} \cdot 7^{42} \cdot 3^{58-d}$$

$$\boxed{33+23=56}$$

$$a = 3^9 \cdot 7^{13}$$

$$b = 3^5$$

$$c = 3^{14} \cdot 7^{29}$$

$$a = 3^d$$

$$\boxed{d+p+f?}$$

$$\frac{73-10}{12} = \frac{3}{12}$$

$$b = 3^\beta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d+p \geq 14 \\ \beta+f \geq 19 \end{array} \right.$$

$$2(d+p+f) \geq 56, \quad d+\beta+f \geq 28$$

$$c = 3^f$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d+f \geq 23 \end{array} \right.$$

$$(a+b) : m$$

$$a^m \equiv x, b \equiv$$

$$(a,b)=1$$

$$\frac{a+b}{a}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - gab + b^2}$$

$$\max(m), : (a+b) : m, (a^2 - gab + b^2) : m$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 11ab}$$

$$(a+b) : m$$

$$m \in \mathbb{N}$$

$$a^m \equiv x \quad \forall x \in \{0, n\}$$

$$\frac{3+5}{g-9-3-5+25} = \frac{8}{-101}$$

$$a^2 - gab + b^2 : m$$

$$111m$$

$$x^2 - g \cdot x \cdot (m-x) + (m-x)^2$$

$$x^2 - gx + mx + g^2 - g^2 + m^2 - 2xm + x^2$$

$$11x^2 : m$$

$$\max(n) = 11$$

$$11x^2 \equiv 0$$

$$11x^2 - 11xm + m^2 \equiv 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$m = \text{беск.}, \quad x = 108. \quad \begin{aligned} & 1 + x + xe \\ & 11 + xe^2 : m, \quad (a, b) = 1 \\ & 11(x9 - 5) - 9 + x5 - ex \\ & n = 9 + x5 - ex \end{aligned}$$

$$a = 9, \quad b = 72$$

$$\textcircled{1} \quad (m, n) = 1, \quad x^2 : m \quad \begin{aligned} & 11 \\ & 11 \quad 9 \\ & x = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \quad m = 2^2 \cdot 3^3 \end{aligned}$$

$$a \equiv 6, \quad b \equiv \rightarrow \text{оканчиваются на } 6, \quad m = kx$$

$$a \equiv x, \quad b \equiv kx - x \quad \begin{aligned} & 1 + x9 - 11 - x - 9 + x5 - \\ & 1 - 9 \quad 1 \quad n \end{aligned}$$

$$a = (kx + b + x), \quad b = (kx \cdot L + kx - x), \quad (a, b) \nmid x, \quad a \equiv x, \quad b \equiv x$$

$$x = 1, \quad k = m, \quad a \equiv 1, \quad b \equiv m - 1. \quad \begin{array}{l} a \equiv 1, \\ 1 + 1 = 2, \\ b = 2 \end{array}$$

4

$$m \geq 1. \quad a = m - b + 1, \quad b = mb + m - 1. \quad a + b = mb + mL + m, \quad (a+b) \mid m$$

$$\textcircled{2} \quad (m, n) = 1, \quad 11x^2 : m \quad m = 11 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \quad \begin{aligned} & x = 2^2 \cdot 3 \\ & b \equiv x, \quad a \equiv 6 \\ & b \equiv 1102, \quad a \equiv 6 \\ & \frac{1102}{1102} \end{aligned}$$

$$m : x, \quad (m, x) = u. \quad u = \frac{m}{x}. \quad x^2 : u, \quad u \geq 1, \quad u \in \mathbb{N}$$

$$u \mid x, \quad u = kx \quad 4x = 5$$

$$a \equiv x, \quad b \equiv 3x^2 - 5x + 6 = 3x^2 + x + 1 \quad \begin{aligned} & a = 6 \\ & b = 1102d + 1102 \end{aligned}$$

$$\text{тогда } m > 11, \quad (m, x) \geq 1, \quad (m, x) = k.$$

$$a \equiv kc, \quad b \equiv kd \quad \begin{aligned} & x = k \cdot c, \quad m = k \cdot d \\ & a = kc \dots + kd \end{aligned}$$

$$a = kc \dots + kd \quad b = k(d - c) \dots + kd, \quad (a, b) \geq k. \quad \frac{209}{99}$$

$$m = 11, \quad \text{тк } 6, 5: \quad \frac{11}{36 - 9 \cdot 6 \cdot 5 + 25} = \frac{11}{119} \quad \begin{aligned} & 1 = 1 + x + xe \\ & 11 = 11 + xe^2 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & 1 - x - 2xe - 9 + x5 - ex = x9 - 5 \\ & 11 = 11 + xe^2 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} & n = 9 + x5 - ex \\ & 11 = 11 + xe^2 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$V_m, V_B.$$

$$t_m \quad t_B = t_m + 1$$

$$\boxed{V_m t_m = V_B(t_m + 1)}$$

$$\cancel{V_B t_m} + 4g = V_m(t_m + 1)$$

$$\boxed{V_m \frac{V_m b_m}{(V_m + 7)} + \frac{3}{5} = \frac{V_m t_m}{(V_m + 7)} \quad 1 \cdot 5(V_m + 7)(V_B + 7)}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 42 \\ \hline 84 \\ 84 \\ \hline 882 \end{array}$$

$$91 \cdot 3 = 273$$

$$\boxed{V_m t_m = V_B(t_m + 1)}$$

$$\cancel{V_B t_m} + 4g = V_m(t_m + 1) \rightarrow V_m t_m + V_m$$

$$\begin{array}{r} 1155 \\ - 105 \\ \hline 155 \\ - 15 \\ \hline 5 \end{array} \quad | \overline{273}$$

$$119 \cdot 3 = 357$$

$$5(V_B + 7)(V_m t_m + 3(V_m + 7)(V_B + 7)) = 5 V_m b_m (V_m + 7)$$

$$\cancel{5(V_B + 7)V_m t_m}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 119 \\ \hline 595 \end{array}$$

$$V_B t_m + V_B = V_m t_m + 4g - V_m$$

$$5(4g - V_m)V_m t_m + 3(V_m + 7)(4g - V_m)$$

$$V_B + V_m = 4g$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 5 \\ \times 11 \\ \hline 55 \end{array}$$

$$V_B t_m + V_B - V_m t_m \cancel{- V_m t_m + 4g} = 0$$

$$\cancel{\frac{M_B}{M_m}}$$

$$V_B + V_m =$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 5 \\ \times 11 \\ \hline 55 \end{array} \quad | \overline{182}$$

$$V_m t_m = (4g - V_m)t_m - V_m + 4g$$

$$V_m t_m = 4g t_m - V_m t_m - V_m + 4g$$

$$- 210 + 35 + 21 \quad 56$$

$$\boxed{2V_m t_m = 4g t_m - V_m + 4g}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 154 \\ \times 11 \\ \hline 154 \end{array}$$

$$V_m t_m = (4g - V_m)t_m + V_B$$

$$V_m t_m = 4g t_m - V_m t_m + V_B$$

$$\boxed{2V_m t_m = 4g t_m + V_B}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 154 \\ \times 11 \\ \hline 154 \end{array} \quad | \overline{182}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$8yz + xz = 15xy, \quad xz = 15xy - 8yz \quad . \quad 15xz = 125xy - 120yz$$

$$\frac{3z(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{15xz + 3yz - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{225xy - 147yz - z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$y = 5x - 3z, \quad y^2 = 25x^2 - 30xz + 9z^2$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{25x^2 - 25x^2 + 30xz - 9z^2 - z^2}{25x^2 - 30xz + 9z^2 + 3z^2} = \frac{30xz - 10z^2}{25x^2 - 30xz + 12z^2}$$

$$\frac{10z(3x - z)}{(5x - 3z)^2 + 3z^2}$$

$$\begin{array}{r} 211 \\ 253 \\ \times 253 \\ \hline 759 \\ 1205 \\ 506 \\ \hline 63009 \\ -15288 \\ \hline 47721 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 31 \\ 182 \\ \times 84 \\ \hline 728 \\ 1456 \\ \hline 15288 \end{array}$$

$$800 \rightarrow 640000$$

$$80 \rightarrow$$

$$120 \rightarrow 14400$$

$$\begin{array}{r} 23 \rightarrow \\ \times 23 \\ \hline 65 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 181 \\ 219 \\ \times 219 \\ \hline 1971 \\ 219 \\ 438 \\ \hline 47961 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 96 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 211 \\ 211 \\ \hline 211 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 422 \\ \hline 44521 \end{array}$$