



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 9 КЛАСС. Вариант 13

1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{11}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $3^{18}7^{16}$ ,  $ac$  делится на  $3^{21}7^{38}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 8ab + b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC = 1$  и  $BC = 16$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$3x + 2y = z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения  $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклиstu на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .

7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX = 2\sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD : DC$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$ab : 3^{11} \cdot 2^{11}$$

a, b, c  $\in \mathbb{N}$

$$bc : 3^{18} \cdot 2^{16}$$

$$ac : 3^{21} \cdot 2^{38}$$

$$\underline{ac} : abc_{\min} = ?$$

$$\frac{ab}{3^{11} \cdot 2^{11}} = K : \frac{bc}{3^{18} \cdot 2^{16}}$$

$$abc : 3^{11} \cdot 2^{11} \quad (\text{н.к. } ab : 3^{11} \cdot 2^{11})$$

$$abc : 3^{18} \cdot 2^{16} \quad (\text{н.к. } bc : 3^{18} \cdot 2^{16})$$

$$abc : 3^{21} \cdot 2^{38} \quad (\text{н.к. } ac : 3^{21} \cdot 2^{38})$$

$$ab \cdot bc = ab^2 c : 3^{89} \cdot 2^{11+18+16} = 3^{29} \cdot 2^{22}$$

$$\underline{ac \cdot bc} = abc^2 : 3^{11+21} \cdot 2^{16+38} = 3^{99} \cdot 2^{54}$$

$$ab^2 c \cdot ac = (abc)^2 : (3^{29+21} \cdot 2^{22+38})$$

$$\frac{(abc)^2}{3^{50} \cdot 2^{65}} = K ; \quad K \in \mathbb{N}, \text{ н.к. } abc \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt{(abc)^2} = \sqrt{K} \sqrt{3^{50} \cdot 2^{65}}$$

$$abc = 3^{25} \cdot \sqrt{K} \cdot \sqrt{2^{65} \cdot K} \quad \text{тогда } \sqrt{2^{65} \cdot K} \in \mathbb{N}; K_{\min} = 2$$

$$abc_{\min} = 3^{25} \cdot \sqrt{2^{65} \cdot 2}$$

$$abc_{\min} = 3^{25} \cdot 2^{33}$$

$$\text{Ответ: } 3^{25} \cdot 2^{33}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$$

$\frac{a}{b}$  несократима;  $\Rightarrow \frac{b}{a}$  несократима

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$$

$$\frac{a+b}{m} = K ; \quad \frac{a^2-8ab+b^2}{m} = n$$

$$\frac{a^2-8ab+b^2}{m} = \frac{a^2+2ab+b^2-2ab-8ab}{m} = \frac{(a+b)^2-10ab}{m} =$$

$$= \frac{(a+b)}{m} \cdot \frac{(a+b)}{m} - \frac{10ab}{m} = K^2 - \frac{10ab}{m} = n$$

$$m = \frac{K^2 - n}{10ab} = \frac{(a+b)^2}{m} - \frac{a^2-8ab+b^2}{m} = \frac{a^2+2ab+b^2-a^2+8ab-b^2}{10ab m} =$$

$$= \frac{10ab}{m} \quad ab$$

$$\frac{(a+b)m}{ab(a+b)^2-10ab} = \frac{K}{n} = \frac{K}{K^2-10\frac{ab}{m}}$$

$$K((a+b)^2-10ab) = ab(a+b)(K^2-10\frac{ab}{m})$$

$$K(a+b)^2 - 10abK = K^2(a+b) - \frac{10ab(a+b)}{m}$$

$$K(a+b)(a+b + K) = 10abK(K - \frac{(a+b)}{m})$$

$$m = a+b$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

$$\sqrt{2x^2 + x - 4x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

$$\sqrt{2x^2 + x + 1 - 4x + 3} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

Пусть:

$$2x^2 + x = a; \quad b = 1 - 4x$$

$$\begin{cases} 0 & \text{Д} : 2x^2 - 3x + 4 \geq 0 \\ & 2x^2 + x + 3 \geq 0 \\ & 2x^2 - 3x + 4 = 0 \quad 2x^2 + x + 3 = 0 \\ & D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 < 0 \quad D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 < 0 \\ & \text{нет корней} \quad \text{нет корней} \\ & \text{исчезают при любых } x. \end{cases}$$

$$\sqrt{a+b+3} - \sqrt{a+3} = b \quad 1 \cdot (\sqrt{a+b+3} + \sqrt{a+3})$$

$$(\sqrt{a+b+3} - \sqrt{a+3})(\sqrt{a+b+3} + \sqrt{a+3}) = b(\sqrt{a+b+3} + \sqrt{a+3})$$

$$a+b+3 - a-3 - b(\sqrt{a+b+3} + \sqrt{a+3}) = 0$$

$$a+b+3 - a-3 - b(\sqrt{a+b+3} + \sqrt{a+3}) = 0$$

$$b(1 - (\sqrt{a+b+3} + \sqrt{a+3})) = 0$$

$$b = 0$$

$$1 - (\sqrt{a+b+3} + \sqrt{a+3}) = 0 \quad 1 - (\sqrt{a+b+3} - \sqrt{a+3})$$

$$1 - 4x = 0$$

$$(\sqrt{a+b+3} - \sqrt{a+3}) - (a+b+3 - a-3) = 0$$

$$x = \frac{-1}{4}$$

$$\sqrt{a+b+3} - \sqrt{a+3} - (a+b+3 - a-3) = 0$$

$$x = \frac{1}{4}$$

$$t^2 = (\sqrt{a+b+3} + \sqrt{a+3})^2$$

$$a+b+3 + a+3 + 2\sqrt{(a+b+3)(a+3)} = 1$$

$$2a+6+6+2\sqrt{a^2+ab+3a+3a+3b+9} = 1$$

$$2a+5+b+2\sqrt{a^2+ab+6a+3b+9} = 0$$

$$2a+5+b+2\sqrt{(a+3)(a+3+b)} = 0$$

$$2a+5+b+2\sqrt{(a+3)(a+3+b)} = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 (продолжение)

$$1 - (\sqrt{a+b+3} + \sqrt{a+3}) = 0 \quad \rightarrow (\sqrt{a+b+3} + \sqrt{a+3})$$

$$(\sqrt{a+b+3} - \sqrt{a+3}) - ((\sqrt{a+b+3})^2 - (\sqrt{a+3})^2) = 0 \quad (\sqrt{a+b+3} + \sqrt{a+3})(\sqrt{a+b+3} - \sqrt{a+3}) = 0$$

$$(\sqrt{a+b+3} - \sqrt{a+3}) - (a+b+3 - a-3) = 0$$

$$(\sqrt{a+b+3} - \sqrt{a+3}) / \cancel{1} - \cancel{1}$$

$$\text{III. L } \sqrt{a+b+3} \geq 0 \text{ и } \sqrt{a+3} \geq 0$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3} > 0, \because \sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3} < 1$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} < 1 \quad 2x^2 - 3x + 3 = 0$$

$$\sqrt{2x^2 + x + 3} < 1 \quad D = (-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 < 0 \quad \text{Нем корней}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x^2 - 3x + 3 < 0 \\ 2x^2 + x + 2 < 0 \end{array} \right. \quad 2x^2 + x + 2 \stackrel{=}{\cancel{0}}$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 < 0 \quad \text{Нем корней}$$

III огра  $\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1$  не имеет корней.

Ответ:  $\frac{1}{4}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

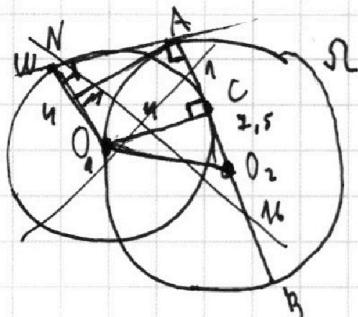
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$R_2 = AC + BC = 12 \text{ (пакет)}$$

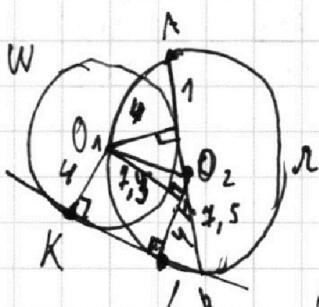
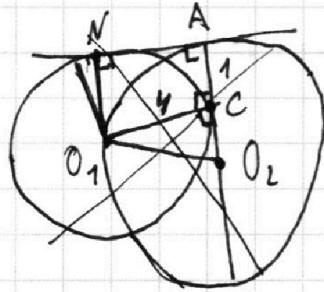
R1

$$O_1 O_2 = \frac{R_2}{2} = 8,5 \text{ (радиус окружности 1)}$$

$$O_1 C = \sqrt{O_1 O_2^2 - O_{C_1}^2} = \sqrt{8,5^2 - 7,5^2} = \sqrt{(8,5 - 7,5)(8,5 + 7,5)} =$$

=  $\sqrt{16} = 4$  (радиус окружности W, т.к.  $\angle O_1 CO_2 = 90^\circ$  — угол между радиусами и касанием)

Проведён касательный ~~AN~~ AN, тогда  $KL$ , т.к.  $O_1 K \perp O_2 L$



$O_2 L K = 90^\circ$  (угол между касам. и радиусом)

$O_1 K \parallel O_2 L$ ;  $O_1 O_2 \parallel KL$

$O_1 O_2 \parallel KL$  — параллел. прямые

Проведен высоту  $O_1 H$

$$O_2 H = O_2 L - LH = O_2 O_2 - O_1 K = 7,5 - 4 = 3,5 \quad (O_1 H \text{ отмечена})$$

$LH$ , радиус  $O_2 H$  т.к. является высотой)

$O_1 H = KL$  (если)

$$O_1 H = \sqrt{O_1 O_2^2 - O_2 H^2} = \sqrt{8,5^2 - 3,5^2} = \sqrt{(8,5 + 3,5)(8,5 - 3,5)} = \sqrt{11 \cdot 4} =$$

$$= 2\sqrt{11} = KL$$

Ответ:  $2\sqrt{11}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$1) \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y = z \\ \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \end{array} \right. |xyz$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y = z \\ 3y^2 + xz = 2xy \end{array} \right.$$

$$2) 2 + 3y + x = 2xy$$

$$z = \frac{2xy}{(3y+x)} ; 2 = 3x + 2y$$

$$\frac{2xy}{3y+x} = 3x + 2y$$

$$2xy = (3x + 2y)(3y + x)$$

$$3) \frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3x^2 - 4y^2 - (3x + 2y)^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3x^2 - 4y^2 - 9x^2 - 12xy - 4y^2}{x^2 - 6y^2} =$$

$$= \frac{-18x^2 - 12xy - 8y^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{-2(3x^2 + 6xy + 4y^2)}{(x - 2y)x^2 - 6y^2}$$

$$4) 2xy = (3x + 2y)(3y + x) = 9xy + 3x^2 + 6y^2 + 2xy$$

$$2xy - 2xy = 3x^2 + 9xy + 6y^2 = 0 ; \sqrt{3x + 2y}$$

$$\cancel{-2(3x^2 + 6xy + 3xy - 3xy + 4y^2 + xy^2 - y^2)}_{x^2 - 6y^2} = \cancel{\frac{-2(-3xy - 2y^2)}{x^2 - 6y^2}}_{x^2 - 6y^2} =$$

$$= \frac{6xy + 4y^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{2y(3x + 2y)}{x^2 - 6y^2} = \frac{2yz}{x^2 - 6y^2} = \cancel{\frac{2yz}{(x - 2y)(x + 2y)}}$$

$$x = \frac{z - 2y}{3} ; x^2 = \cancel{\frac{z^2 - 4zy + 4y^2}{9}}$$

$$3yz = y = \frac{z - 3x}{2} ; 6yz = \frac{6z^2 - 36zx + 18x^2}{2} = 3z^2 - 18zx + 27x^2$$

$$x^2 - 6y^2 = \cancel{\frac{z^2 - 4zy + 4y^2}{9}} - (3z^2 - 18zx + 27x^2) = \cancel{\frac{z^2 - 4zy + 4y^2 - z^2}{9}}$$

$$= \cancel{\frac{z^2 - 4zy + 4y^2 - 27z^2 + 9 \cdot 18zx + 9 \cdot 27x^2}{9}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$3x^2 + 9xy + 6y^2 = 0$$

$$\mathcal{D} = (9y)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3y^2 = 81y^2$$

$$x_1 = \frac{-9y + \sqrt{81y^2}}{2 \cdot 3} = \frac{-9y + 9y}{6} = -y$$

$$x_2 = \frac{-9y - \sqrt{81y^2}}{2} = \frac{-18y}{6} = -2y$$

$$\begin{cases} x = -y \\ x = -2y \end{cases}$$

$$1) \frac{-2(3x^2 + 6xy + 4y^2)}{x^2 - 4y^2} = \frac{-2(3(-y)^2 + 6(-y)y + 4y^2)}{(-y)^2 - 4y^2} =$$

$$= \frac{-2(3y^2 - 6y^2 + 4y^2)}{-5y^2} = \frac{-2y^2}{-5y^2} = \frac{2}{5}$$

$$2) \frac{-2(3(-2y)^2 + 6(-2y)y + 4y^2)}{(-2y)^2 - 4y^2} = \frac{-2(12y^2 - 12y^2 + 4y^2)}{4y^2 - 4y^2} =$$

$$= \frac{-8y^2}{-2y^2} = 4$$

Ответ: 4

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 (черт)

$$x_2^2 - 48x_2 + 590 = 0$$

$$\Delta = (-48)^2 - 4 \cdot 590 = 2304 - 2160 = 144$$

$$x_{2_1} = \frac{48 + \sqrt{144}}{2} = \frac{48 + 12}{2} = 30$$

$$x_{2_2} = \frac{48 - \sqrt{144}}{2} = 18$$

$x_2 > v_1$  по условию;  $v_2 = 30$ ;  $v_1 = 18$

$$S_{AB}(v_2 - v_1) = 2v_1v_2$$

$$S_{AB} = \frac{2v_1v_2}{v_2 - v_1} = \frac{2 \cdot 30 \cdot 18}{30 - 18} = \frac{360 \cdot 18}{12} = 540 \text{ см}^2$$

Ответ: 90 см

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

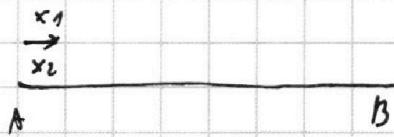
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$x_1$  - скорость велосипедиста

$x_2$  - скорость мотоциклиста

$S_{AB}$  - расстояние от А до В

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S_{AB}}{x_1} - \frac{S_{AB}}{x_2} = 2 \quad | \times x_1 x_2 \\ 2x_2 - 2x_1 = 2x_1 x_2 \end{array} \right. ; 12 \text{ км} = 1 \frac{1}{4}, x_2 > x_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x_2 S_{AB}}{x_1} - \frac{S_{AB} x_1}{x_2} = 96 \quad | \times x_1 x_2 \\ x_2^2 - x_1^2 = 96x_1 x_2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S_{AB}}{x_1+6} - \frac{S_{AB}}{x_2+6} = 1 \frac{1}{4} \quad | (x_1+6)(x_2+6) \\ x_2^2 - x_1^2 = 96(x_1+6)(x_2+6) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{AB}(x_2 - x_1) = 2x_1 x_2 \\ S_{AB}(x_2^2 - x_1^2) = 96x_1 x_2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{AB}(x_2 - x_1) = 2x_1 x_2 \\ S_{AB}(x_2^2 - x_1^2) = 96x_1 x_2 \\ S_{AB}(x_2 + 6 - x_1 - 6) = \frac{5}{4}(x_1 + 6)(x_2 + 6) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 + x_1 = 48 \\ 2x_1 x_2 = \frac{5}{4}x_1 x_2 + \frac{15x_1}{2} + \frac{95x_2}{2} + 45 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 + x_1 = 48 \\ x_1 = 48 - x_2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2x_1 x_2 + \frac{5}{4}x_1 x_2 + \frac{15}{2}(x_1 + x_2) + 45 = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{3}{4}x_1 x_2 = \frac{15}{2} \cdot \frac{24}{48}x_1 x_2 + 45$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{15}{2} (48 - x_2 + x_2) + 45 - \frac{3}{4} x_2 (x_2 - x_2) = 0$$

$$24 \cdot 15 + 45 - \frac{3}{4} \cdot 48 x_2 + \frac{3}{4} x_2^2 = 0 \quad | \cdot \frac{4}{3}$$

$$\cancel{\frac{15 \cdot 15 \cdot 3}{4}} + \frac{45}{4}$$

$$\frac{3}{4} x^2 - 36 x_2 + 24 \cdot 15 + 45 = 0 \quad | : \frac{3}{4}$$

$$x^2 - \frac{36 \cdot 4}{3} x_2 + \frac{24 \cdot 15 \cdot 4}{3} + \frac{45 \cdot 4}{3} = 0$$

$$x^2 - 48 x_2 + 540$$

(продолжение на другой странице)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

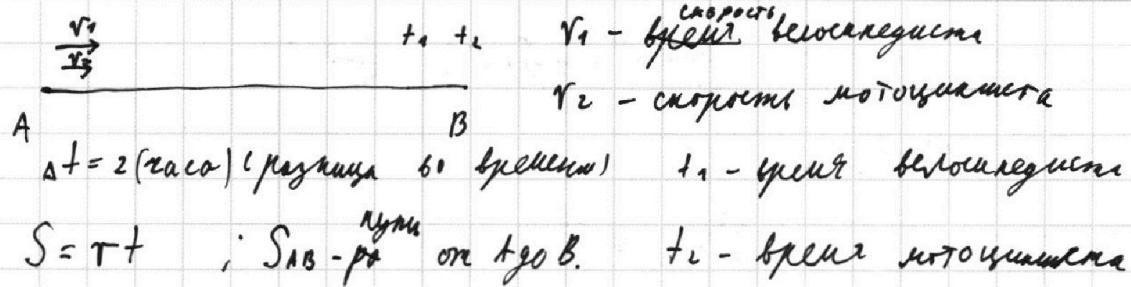
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 - t_2 = \sqrt{2} \\ v_1 t_2 + 96 = v_2 t_1 \end{array} \right| \quad 12 \text{ час} = 1 \frac{15}{60} = 1 \frac{1}{4} \text{ ч}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S_{AB}}{v_1 + 6} - \frac{S_{AB}}{v_2 + 6} = 1 \cdot \frac{1}{4} \\ v_2 > v_1 \end{array} \right. \quad S_{AB} = v_1 t_1 ; \quad S_{AB} = v_2 t_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S_{AB}}{v_1} - \frac{S_{AB}}{v_2} = 2 \cdot \frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2} \\ 1 \cdot v_1 v_2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 t_2 + 96 = v_2 t_1 \\ \frac{S_{AB}}{v_1 + 6} - \frac{S_{AB}}{v_2 + 6} = 1 \frac{1}{4} \quad (T_1 + 6)(T_2 + 6) \\ \frac{S_{AB}}{v_1 + 6} \end{array} \right. \quad 1 \cdot (v_1 + 6)(v_2 + 6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{AB} \cdot v_2 - S_{AB} \cdot v_1 = 2 v_1 v_2 \\ v_1 t_2 + 96 = v_2 t_1 \\ S_{AB} (v_2 + 6) - S_{AB} (v_1 + 6) = 1 \frac{1}{4} (v_2 + 6)(v_1 + 6) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{AB} (v_2 - v_1) = 2 v_1 v_2 \\ v_1 t_2 v_2 t_1 - v_1 t_2 = 96 \\ S_{AB} (v_2 + 6 - v_1 + 6) = 1 \frac{1}{4} (v_2 + 6)(v_1 + 6) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 v_1 v_2 = 1 \frac{1}{4} (v_1 v_2 + 6 v_2 + 6 v_1 + 36) \\ v_2 t_1 - v_1 t_2 = 96 \end{array} \right.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N<sub>5</sub>

$$\begin{cases} 2V_1V_2 = 1 \frac{1}{4}V_1V_2 + \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{8}V_2 + \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{8}V_1 + \frac{5}{4} \cdot \frac{9}{8} \\ V_2t_1 - V_1t_2 = 96 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2V_1V_2 - \frac{5}{4}V_1V_2 = \frac{15}{2} \cdot V_2 + \frac{15}{2}V_1 + 45 \\ V_2t_1 - V_1t_2 = 96 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{4}V_1V_2 - \frac{15}{2}V_2 + \frac{15}{2}V_1 + 45 = 0 \\ V_2t_1 - V_1t_2 = 96 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3V_1V_2 = 30V_2 + 30V_1 + 180 \\ V_2t_1 - V_1t_2 = 96 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1V_2 = 10V_2 + 10V_1 + 60 \\ V_2t_1 - V_1t_2 = 96 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{V_2S_{AB}}{V_1} - \frac{S_{AB} \cdot V_1}{V_2} = 96 \\ V_1V_2 = 10V_2 + 10V_1 + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{AB}(V_2^2 - V_1^2) = 96V_1V_2 \\ V_1V_2 = 10V_2 + 10V_1 + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{AB}(V_2 - V_1)(V_1 + V_2) = 96V_1V_2 \\ V_1V_2 = 10V_2 + 10V_1 + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} +2V_1V_2(V_1 + V_2) = 96V_1V_2 \\ V_1V_2 = 10V_2 + 10V_1 + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 + V_2 = 48 \\ V_1V_2 = 10V_2 + 10V_1 + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -V_1 - V_2 \\ -V_1 - V_2 = 48 \\ V_1V_2 = 10V_2 + 10V_1 + 60 \\ V_1 + V_2 = 48 \end{cases}$$

$$V_1V_2 = 60$$

$$\begin{cases} V_1 = 48 - V_2 \\ V_1V_2 = 10V_2 + 10V_1 + 60 \end{cases}$$

$$(48 - V_2)V_2 = 10V_2 + 10(48 - V_2) + 60$$

$$48V_2 - V_2^2 = 10V_2 + 480 - 10V_2 + 60$$

$$V_2^2 - 48V_2 + 480 = 0$$

$$\Delta = 48^2 - 4 \cdot (-480) = 4064$$

$$x_{21} = \frac{-48 + \sqrt{4064}}{2} = \frac{48 + 8}{2}$$

$$x_{22} = \frac{-48 - \sqrt{4064}}{2} < 0 \text{ (не имеет смысла)}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

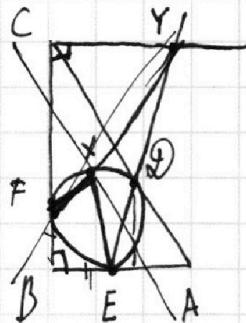
6

7

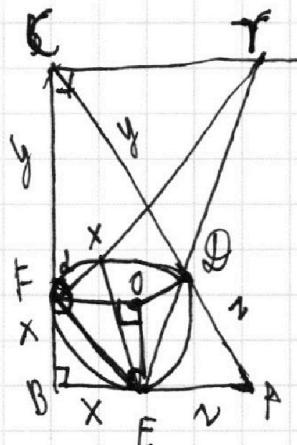


МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$W-\text{окр.}, \because EX = 2\sqrt{2} XY$$



$$(x+y)^2 + (x+z)^2 = (y+z)^2$$
$$x^2 + 2xy + y^2 + x^2 + 2xz + z^2 = y^2 + 2yz + z^2$$
$$2x^2 + 2xy + 2xz = 2yz$$

$$x^2 + yx + xz = yz$$

$$\cancel{yx - x(x+z) = y(z-x)}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

**МФТИ**

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{16} + \frac{6x}{16} - \frac{4x^2}{16} = \sqrt{\frac{2}{16}} - \frac{3}{4} + 4 + \sqrt{\frac{2}{16} + \frac{1}{4} + 3} \\
 & \sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x \\
 & (\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3})^2 = (1 - 4x)^2 \\
 & (\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3})^2 - (1 - 4x)^2 = 0 \\
 & (\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3})(\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3}) - (1 - 4x)(\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3}) = 0 \\
 & \cancel{\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3}} - (1 - 4x)(\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3}) = 0 \\
 & \cancel{\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3}} - (1 - 4x)(\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3}) = 0 \\
 & (\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3})(\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3}) = (1 - 4x)(\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3}) \\
 & + \cancel{\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3}} - (1 - 4x)(\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3}) = 0 \\
 & 2x^2 - 3x + 4 - 2x^2 - x - 4x - 4 = (1 - 4x)(\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3}) \\
 & 2x^2 + x - 6x + 4 = 2x^2 + x - 4x + 1 + 3 \\
 & 2x^2 + x - 5x + 1 = 0 ; 1 - 4x = 0 \\
 & \sqrt{a+b+3} - \sqrt{a+3} = b \\
 & a+b+3 - (a+3) = b(\sqrt{a+b+3} + \sqrt{a+3}) \\
 & 16 \cdot 4 \cdot 4 a+b+3 - a+3 = b(\sqrt{a+b+3} + \sqrt{a+3})
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N<sub>2</sub>

$\frac{a}{b}$  квадратична;  $a \in N$ ;  $b \in N$

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab-2ab+b^2-8ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-10ab}$$

$$\frac{(a+b)^2-10ab}{a+b} = a+b - \frac{10ab}{a+b} = \frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} =$$

$a+b : m$  ~~б/н~~

$(a+b)^2-10ab : m$

$$= \frac{a}{a^2-8ab+b^2} + \frac{b}{a^2-8ab+b^2} =$$

$$\frac{(a+b)^2-10ab}{a+b} = a+b - \frac{10ab}{a+b} = \frac{1}{a-8b+\frac{b^2}{a^2}} + \frac{1}{\frac{b^2}{a^2}-8a+b}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-10ab} = \frac{1}{a+b} + \left( -\frac{a+b}{10ab} \right)$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-10ab} = \frac{a+b}{(a+b-\sqrt{10ab})(a+b+\sqrt{10ab})} = \frac{a+b}{a+b-10ab} + \frac{a+b}{(a+b+\sqrt{10ab})} = \\ = \frac{a}{(a+b)^2-10ab} + \frac{b}{(a+b)^2-10ab}$$

$$\frac{a^2}{b} = \frac{a \cdot a}{b} < \frac{a}{b} \cdot a ; \frac{b^2}{a} = \frac{b \cdot b}{a} = \frac{b}{a} \cdot b$$