



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{14}7^{13}$ ,  $bc$  делится на  $3^{19}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $3^{23}7^{42}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC=1$  и  $BC=25$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения  $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .

7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX=\sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD:DC$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1  $ab: 3^{14}_7^{13}$

$bc: 3^{19}_7^{17}$

$ac: 3^{23}_7^{42}$

Числа 3 и 7 простые и взаимно просты друг с другом.  
Определим количество "3" и "7" минимально содержащихся в произведении чисел

$\min(a_3 + b_3) = 14$

$\min(a_7 + b_7) = 13$

$\min(b_3 + c_3) = 19$

$\min(b_7 + c_7) = 17$

$\min(a_3 + c_3) = 23$

$\min(a_7 + c_7) = 42$

$\min(a_3 + b_3 + c_3) = \frac{14 + 19 + 23}{2} = 28$

Но если посчитать так же, то

$b_7$  получается  $< 0$ . Попробуем, что  $a_7 + b_7 + c_7 \geq 42 \cdot 2$ ,

т.е. 84. В таком случае  $b_7 = 0$ , и при любом

распределении  $a_7$  и  $c_7$  получается 84

Таким образом,  $abc$  минимально, если  $a = 3^{a_3}_7^{a_7}$

$b = 3^{b_3}_7^{b_7}$ ,  $c = 3^{c_3}_7^{c_7}$ . Тогда  $abc = 3^{a_3 + b_3 + c_3}_7^{a_7 + b_7 + c_7}$   
 $= 3^{28}_7^{84}$

Ответ:  $3^{28}_7^{84}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2 Сократимо на  $m \Rightarrow (a+b):m$  и  $(a^2-9ab+b^2):m$

$$a^2-9ab+b^2 = ((a+b)^2 - 11ab):m$$

$\uparrow$   
 $m$ , т.к.  $a+b:m \Rightarrow 11ab:m$

либо  $m=11$ , либо  ~~$m=11$~~   ~~$a+b$~~   ~~$m=a+b$~~

$ab:m$ . В таком случае может

быть сократимо ~~также~~ на  $(a+b)$  или  $(a+b)^2$ . Но

$ab$  и  $(a+b)^2$  сократимы ~~лишь~~ ~~при~~ ~~каком-то~~ ~~значении~~  $a$

значит, на  $(a+b)=m$  и примеру  $a=10$   $b=5$ .  $\frac{15}{225}$  сокр. на

Ответ:  $m=a+b$

15

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3

$$a = 3x^2 - 5x + 6$$

$$b = 3x^2 + x + 1$$

$$a - b = -6x + 5$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$\text{либо } \sqrt{a} - \sqrt{b} = 0, \text{ либо } \sqrt{a} + \sqrt{b} = 0.$$

↓  
В этом случае  $a$  и  $b = 0$

Но

$$3x^2 - 5x + 6$$

$$D = 25 - 4 \cdot 3 \cdot 6 < 0, \text{ и}$$

$$3x^2 - 5x + 6 > 0 \text{ всегда}$$

$$\text{и } 3x^2 + x + 1 \text{ также всегда } > 0$$

Значит  $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$

$$\sqrt{a} = \sqrt{b} \leftarrow \text{всегда } > 0$$

$$a = b \Rightarrow 3x^2 - 5x + 6 = 3x^2 + x + 1$$

$$5 = 6x$$

$$x = \frac{5}{6}$$

Ответ:  $x = \frac{5}{6}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

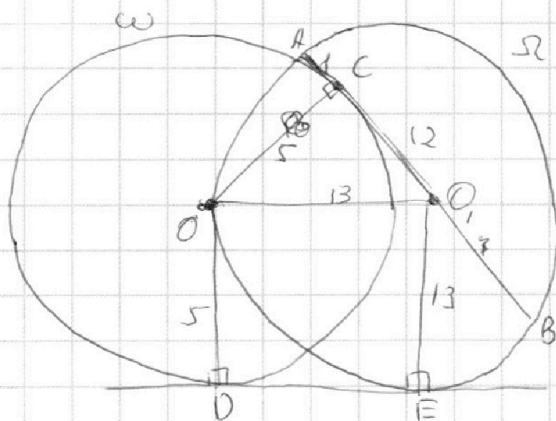
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

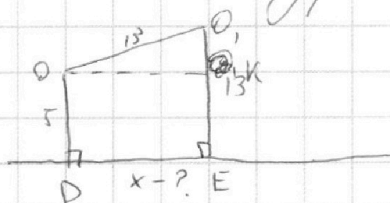


14



радиус  $\omega = r = 5$

Рассмотрим подробнее внутреннюю ситуацию:



Ответ:  $\sqrt{105}$ .

Заметим, что диаметр  $\Omega$   
 $= AC + CB = 26 \Rightarrow R$  (радиус

$\Omega$ ) = 13.  $O_1C = 13 - 1 = 12$

$OO_1 = 13$ , т.к. это тоже  $R$

$OC = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow$

$OK = x$ ,  $KF = 5 \Rightarrow O_1K = 13 - x = 8$

$x = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{169 - 64} = \sqrt{105}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{5} \begin{cases} 5x - y = 3z \\ \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \end{cases} \begin{cases} x = \frac{3z+y}{5} \\ 8yz = 15xy - xz \end{cases} \begin{cases} x = \frac{3z+y}{5} \\ x = \frac{8yz}{15y-z} \end{cases}$$

$$\frac{3z+y}{5} = \frac{8yz}{15y-z}$$

$$40yz = 45yz - yz + 15y^2 - 3z^2$$

$$15y^2 + 4zy - 3z^2 = 0$$

$$D = 16z^2 - 4 \cdot 15 \cdot (-3z^2) = 196z^2$$

$$y = \frac{-4z \pm 14z}{30} = \frac{-18z}{30} = -\frac{3z}{5}$$

$$y = \frac{-4z + 14z}{30} = \frac{10z}{30} = \frac{z}{3}$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{(5x-y)(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{3z5 \cdot \frac{3z+y}{5} + y) - z^2}{y^2 + 3z^2} =$$

$$= \frac{3z(3z+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{9z^2 + 6zy - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6zy}{y^2 + 3z^2} = \frac{2(4z^2 + 3zy)}{y^2 + 3z^2} =$$

$$= 2z \cdot \frac{4z + 3y}{y^2 + 3z^2}$$

Если  $y = -\frac{3z}{5}$ :  $2z \cdot \frac{4z + 3(-\frac{3z}{5})}{\frac{9z^2}{25} + 3z^2} = 2z \cdot \frac{2 \cdot 2z}{3 \cdot \frac{9}{25}z^2} = \frac{4 \cdot 4z^2}{3 \cdot 36z^2}$

$z \neq 0$ , по условию

$$= \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 36} = \frac{44}{108} = \frac{11}{27} = \frac{55}{135} = \frac{55}{42}$$

Если  $y = \frac{z}{3}$ :  $2z \cdot \frac{4z + 3(\frac{z}{3})}{\frac{z^2}{9} + 3z^2} = 2z \cdot \frac{3z}{\frac{28}{9}z^2} = \frac{6z^2}{\frac{28}{9}z^2} = \frac{6}{\frac{28}{9}} =$

$$= \frac{6 \cdot 9}{28} = \frac{54}{28} = \frac{27}{14} \quad ; \quad \frac{55}{42} \vee \frac{27}{14} \Leftrightarrow \frac{55}{42} < \frac{81}{42} \Rightarrow \text{Ответ: } \frac{55}{42}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



повыше расположенная

Черновик

$$\frac{8yz}{15y-z} = \frac{y+3z}{5}$$

$$8yz = (y+3z)(15y-z)$$

$$8yz = 15y^2 - 3z^2 + 44yz$$

$$15y^2 + 36yz - 3z^2 = 0$$

$$5y^2 + 12yz - z^2 = 0$$

$$D = 144z^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-z^2) = 164z^2 = 4 \cdot 41z^2$$

$$\sqrt{D} = 2z\sqrt{41}$$

$$y = \frac{-12z \pm 2z\sqrt{41}}{10}$$

$$\frac{2(4z^2 + 3yz)}{y^2 + 3z^2} = \frac{2(4z^2 + 3 \cdot \frac{-12z + 2z\sqrt{41}}{10} \cdot z)}{\frac{(2z\sqrt{41} - 12z)^2}{100} + 3z^2}$$

$$= \frac{2(4z^2 + 6z^2 \frac{2\sqrt{41} - 6}{10})}{\frac{(2z\sqrt{41} - 12z)^2}{100} + 3z^2} = \frac{2(4z^2 + \frac{6z^2(2\sqrt{41} - 6)}{10})}{\frac{(2z\sqrt{41} - 12z)^2}{100} + 3z^2}$$

$$= \frac{2(4z^2 + 3z^2 \frac{2\sqrt{41} - 6}{5})}{\frac{(2z\sqrt{41} - 12z)^2}{100} + 3z^2} = \frac{2(4z^2 + \frac{6z^2(2\sqrt{41} - 6)}{10})}{\frac{(2z\sqrt{41} - 12z)^2}{100} + 3z^2}$$

$$= \frac{2(4z^2 + 3z^2 \frac{2\sqrt{41} - 6}{5})}{\frac{308z^2 - 48z^2\sqrt{41}}{100} + 3z^2} = \frac{z^2 \cdot 2 \cdot (4 + 3 \frac{2\sqrt{41} - 6}{5})}{\frac{308 - 48\sqrt{41}}{100} + 3}$$

$$= \frac{2(4 + 3 \frac{2\sqrt{41} - 6}{5})}{\frac{4(77 - 12\sqrt{41})}{100} + 3} = \frac{2(4 + \frac{3(2\sqrt{41} - 6)}{5})}{\frac{77 - 12\sqrt{41}}{25} + 3} = \frac{154}{77}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6  $v_B$  - скорость велосипедиста,  $v_M$  - скорость мотоциклиста,  $S$  - расстояние

$$\frac{S}{v_M} + t = \frac{S}{v_B} \Rightarrow t = S \left( \frac{1}{v_B} - \frac{1}{v_M} \right) \Rightarrow S = \frac{1}{\frac{v_M - v_B}{v_M v_B}} = \frac{v_M v_B}{v_M - v_B} \quad (1)$$

$$\begin{cases} v_B \cdot \frac{S}{v_M} + 49 = v_M \cdot \frac{S}{v_B} \\ \frac{S}{v_M + 7} + \frac{3}{5} = \frac{S}{v_B + 7} \end{cases} \quad \begin{aligned} 49 &= S \left( \frac{v_M}{v_B} - \frac{v_B}{v_M} \right) \\ 49 &= \frac{v_M v_B}{v_M - v_B} \cdot \frac{(v_M - v_B)(v_M + v_B)}{v_M v_B} \\ 49 &= v_M + v_B \quad (2) \end{aligned}$$

$$\frac{S}{v_M + 7} + \frac{3}{5} = \frac{S}{v_B + 7}$$

$$\frac{3}{5} = S \left( \frac{1}{v_B + 7} - \frac{1}{v_M + 7} \right)$$

$$\frac{3}{5} = \frac{v_M v_B}{v_M - v_B} \cdot \frac{(v_M + 7 - v_B - 7)(v_M + 7)}{(v_B + 7)(v_M + 7)} = \frac{v_M v_B}{v_M - v_B} \cdot \frac{v_M - v_B}{v_M v_B + 7(v_B + v_M) + 49}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{v_M v_B}{v_M v_B + 7 \cdot 49 + 49} = \frac{v_M v_B}{v_M v_B + 8 \cdot 49}$$

$$3 v_M v_B + 3 \cdot 8 \cdot 49 = 5 v_M v_B$$

$$3 \cdot 8 \cdot 49 = 2 v_M v_B$$

$$3 \cdot 4 \cdot 49 = v_M \cdot v_B$$

$$v_M v_B = 12 \cdot 49$$

$$v_M + v_B = 49$$

$$v_M v_B = 12 \cdot 49$$

$$v_M (49 - v_M) = 12 \cdot 49$$

$$v_M^2 - 49 v_M + 12 \cdot 49 = 0$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 12 \cdot 49 = 49(49 - 48) = 49 \Rightarrow \sqrt{D} = 7$$

$$v_{M1} = \frac{49 + 7}{2} = 28$$

$$v_{M2} = \frac{49 - 7}{2} = 21$$

$$v_M > v_B \Rightarrow v_M = 28, v_B = 21$$

Тогда  $S = \frac{28 \cdot 21}{4}$

$$= 84 \text{ км}$$

Ответ:  $S = 84 \text{ км}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



*Черновик*

$$\left\{ \begin{aligned} S &= \frac{v_B v_M}{v_M - v_B} \\ S \cdot \frac{v_B}{v_M} + 4g &= S \cdot \frac{v_M}{v_B} \\ 4g &= S \left( \frac{v_M}{v_B} - \frac{v_B}{v_M} \right) \end{aligned} \right.$$

$$4g = \frac{v_B v_M}{v_M - v_B} \cdot \frac{v_M^2 - v_B^2}{v_B v_M} = v_M + v_B$$

$$\frac{S}{v_B + 7} = \frac{3}{5} + \frac{S}{v_M + 7}$$

$$S \left( \frac{1}{v_B + 7} - \frac{1}{v_M + 7} \right) = \frac{3}{5}$$

$$\frac{v_M v_B}{v_M - v_B} \left( \frac{v_M + 7 - v_B - 7}{(v_B + 7)(v_M + 7)} \right) = \frac{3}{5}$$

$$\frac{v_M v_B}{v_M - v_B} \cdot \frac{v_M - v_B}{v_B \cdot v_M + 4g + 7(v_B + v_M)} = \frac{3}{5}$$

$$v_M v_B = 12 \cdot 4g \quad \frac{v_M v_B}{v_M v_B + 4g + 7 \cdot 4g} = \frac{3}{5}$$

$$S = \frac{28 \cdot 21}{7} = 28 \cdot 3 = 84 \text{ км}$$

$$v_M + v_B = 49$$

$$5v_M v_B = 3v_M v_B + 3 \cdot 8 \cdot 4g$$

~~4g^2 = 2 \cdot 4g~~

$$v_M(49 - v_M) = 12 \cdot 4g$$

$$2v_M v_B = 3 \cdot 8 \cdot 4g$$

$$49v_M - v_M^2 = 12 \cdot 4g$$

$$v_M^2 - 49v_M + 49 \cdot 12 = 0$$

$$v_M \cdot v_B = 12 \cdot 4g$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 1 \cdot 49 \cdot 12 = 49^2 - 49 \cdot 48 = 49(49 - 48) = 49$$

$$v_M = \frac{49 \pm 7}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

$$v_M = \frac{49 + 7}{2} = \frac{56}{2} = 28$$

$$v_M > v_B \Rightarrow v_M = 28, v_B = 21$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

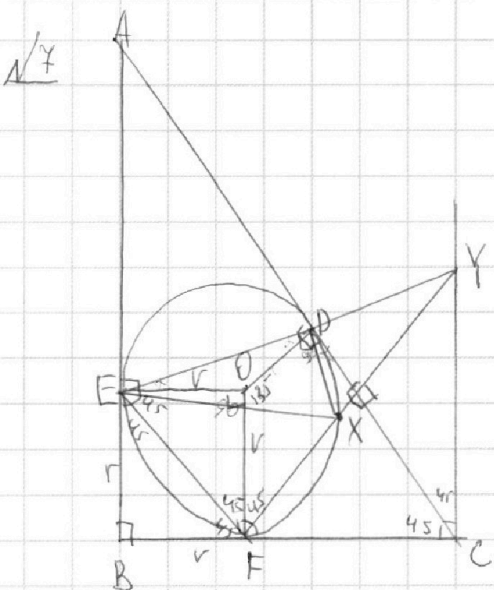
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$r$  - радиус впис. окружности

$$r = \frac{a+c-b}{2}, \text{ где } \begin{cases} a=BC \\ c=AB \\ b=AC \end{cases}$$

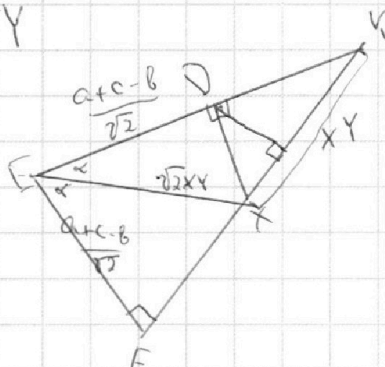
$$\text{Тогда } DC = r = a - \frac{a+c-b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{c}{2} = \frac{a+b-c}{2}$$

$$AD = AC = c - \frac{a+c-b}{2} = \frac{c}{2} + \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{c+b-a}{2}$$

$$AD/CD = \frac{c+b-a}{2} \cdot \frac{2}{a+b-c} = \frac{c+b-a}{a+b-c}$$

Произведем построение угла  $\angle FOC = \angle FOB$  - введем  $EF \parallel AC$ . Тогда  $CD \perp FY$

$$EF = \left( \frac{a+c-b}{2} \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a+c-b}{\sqrt{2}}$$



$FX = DX$  по т. Пифагора в  $\triangle EDX$

$$FX = DX = \sqrt{2XY^2 - \frac{(a+c-b)^2}{2}}$$

$$\begin{cases} DX^2 + DY^2 = XY^2 \\ ED^2 + DX^2 = 2XY^2 \\ (XY^2 + FX)^2 + EF^2 = FY^2 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

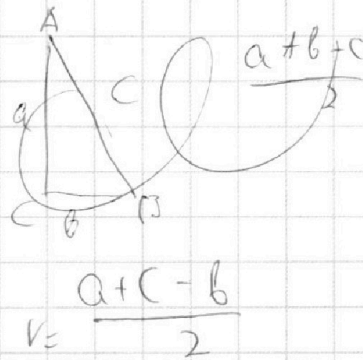
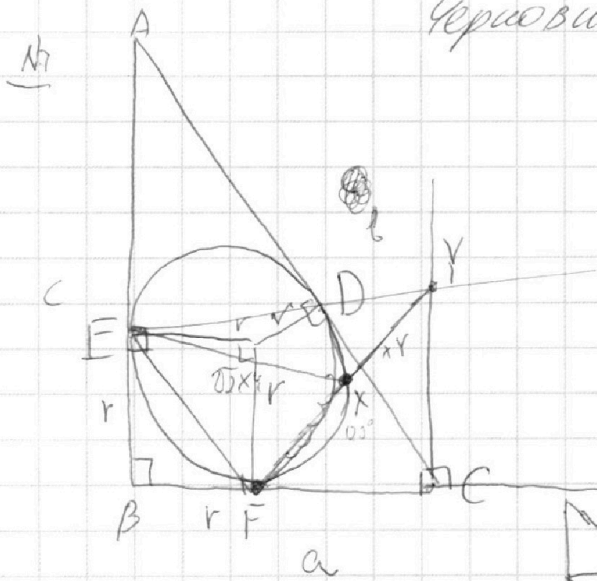
- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



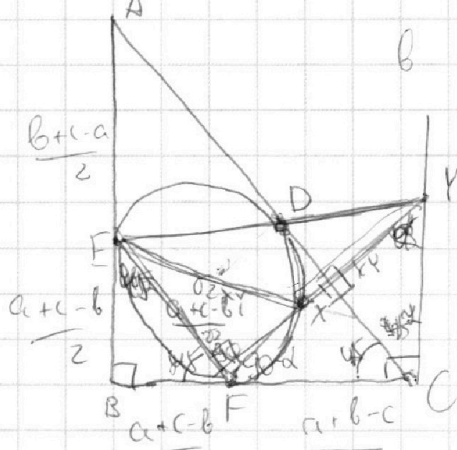
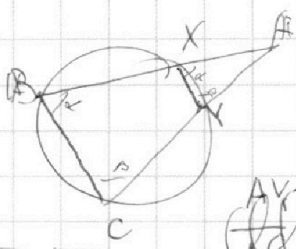
*Черновик*



$$DC = FC = a - \frac{a+c-b}{2} = a - \frac{a}{2} - \frac{c}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{c}{2} = \frac{a+b-c}{2}$$

$$AD = AC = c - \frac{a+c-b}{2} = c - \frac{a}{2} - \frac{c}{2} + \frac{b}{2} = \frac{c}{2} + \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b+c-a}{2}$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{\frac{b+c-a}{2}}{\frac{a+b-c}{2}} = \frac{b+c-a}{a+b-c}$$



$$\sqrt{\left(\frac{a+c-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+c-b}{2}\right)^2}$$

$$\sqrt{\frac{(a+c-b)^2}{4} + \frac{(a+c-b)^2}{4}}$$

$$\sqrt{2(a+c-b)}$$

$$\frac{a+c-b}{2} \cdot \sqrt{2} = EF$$

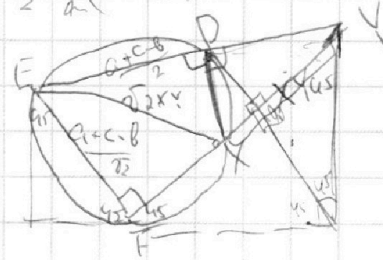
$$\frac{AY}{AC} = \frac{AX}{AB}$$

$$\frac{AY}{AC} = \frac{AX}{AB}$$

$$AC \cdot AY = AB \cdot AX$$

$$\frac{AY}{AX} = \frac{AC}{AB} = \frac{AX}{AY}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(a+c-b)}{2} \cdot EF$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



*Черновик*

N1

$$ab = 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$bc = 3^{19} \cdot 7^{17}$$

$$ac = 3^{23} \cdot 7^{42}$$

Числа 3 и 7 простые и взаимнопросты друг с другом. Определим, сколько "3" и "7" содержится (минимально) в произведении чисел.

$$\min(a_3 + b_3) = 14$$

$$\min(a_7 + b_7) = 13 + x$$

$$\min(b_3 + c_3) = 19$$

$$\min(b_7 + c_7) = 17 + (12 - x)$$

$$\min(a_3 + c_3) = 23$$

$$\min(a_7 + c_7) = 42$$

$$\min(a_3 + b_3 + c_3) = \frac{14 + 19 + 23}{2} = \frac{56}{2} = 28$$

Но если посчитать точнее, то  $b_7 < 0$ .

$$a_7 + b_7 = 13 + x$$

$$a_7 + b_7 = 13 + x$$

$$b_7 + c_7 = 29 - x$$

$$b_7 + 42 - a_7 = 29 - x$$

$$a_7 + c_7 = 42$$

$$2b_7 + 42 = 42$$

$$b_7 = 0$$

$$\min(a_7 + b_7 + c_7) = 84$$

$$a = 3^{a_3} \cdot 7^{a_7} \quad b = 3^{b_3} \cdot 7^{b_7} \quad c = 3^{c_3} \cdot 7^{c_7}$$

abc минимально, если  $a = 3^{a_3} \cdot 7^{a_7}$ ,  $b = 3^{b_3} \cdot 7^{b_7}$ ,  $c = 3^{c_3} \cdot 7^{c_7}$ .

Тогда

$$abc = 3^{a_3 + b_3 + c_3} \cdot 7^{a_7 + b_7 + c_7} = 3^{28} \cdot 7^{84}$$

N6     $\sigma_B$      $\sigma_M$      $S$

$$\frac{S}{\sigma_M} + 1 = \frac{S}{\sigma_B}$$

$$S \left( \frac{1}{\sigma_B} - \frac{1}{\sigma_M} \right) = 1$$

$$S \cdot \frac{\sigma_M - \sigma_B}{\sigma_B \sigma_M} = 1$$

$$\sigma_B \cdot \frac{S}{\sigma_M} + 149 = \frac{S}{\sigma_B} \cdot \sigma_M$$

$$S = \frac{\sigma_M - \sigma_B}{\sigma_B \sigma_M} = \frac{1}{\sigma_B \sigma_M}$$

$$\frac{S}{\sigma_M + 7} + \frac{3}{5} = \frac{S}{\sigma_B + 7}$$

$$S = \frac{\sigma_B \sigma_M}{\sigma_M - \sigma_B}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1  $ab: 3^1 4^1 1^3$   
 $bc: 3^1 9^1 7^1$   
 $ac: 3^2 3^1 4^2$

$a_3 + b_3 = 14$   $a_7 + b_7 = 13$   
 $b_3 + c_3 = 19$   $b_7 + c_7 = 17$   
 $a_3 + c_3 = 23$   $a_7 + c_7 = 42$

~~$x = y + 3z$~~   
 $8yz = 15xy - xz$   
 $8yz = x(15y - z)$   
 $x = \frac{8yz}{15y - z}$

№2  $\frac{a+b}{(a-4.5b)^2 - 19.25b^2}$

$$\begin{array}{r} 4.5 \\ \cdot 5 \\ \hline 13.5 \\ 202.50 \end{array}$$

№3  $\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{x^2 + x + 1} = 5 - 6x$   
 ~~$3x^2 - 5x + 6$~~   $D < 0$

$\frac{8yz}{15y - z} = y + 3z$   
 $8yz = (15y - z)y$   
 $8yz + xz = 15xy$   
 $xz = (15x - 8z)y$

$(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{x^2 + x + 1})^2 = (5 - 6x)^2$   
 $3x^2 - 5x + 6 + (x^2 + x + 1) - 2\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(x^2 + x + 1)} = 25 - 60x + 36x^2 - 60x$   
 $4x^2 - 4x + 7 = 22$   
 $3x^2 - 5x + 6 = a$   $x^2 + x + 1 = b$   
 $x(15x - 8z) = 8yz$   $x(15x - 8z) = 8yz$   
 $x^2 - 6x + 5 = a - b$

$5x - y = 3z$   $y = 5x - 3z$   
 $\frac{8y + x}{xy} = \frac{15}{z}$

$4x^2 - 4x + 7 = 22$   
 $3x^2 - 5x + 6 = a$   $x^2 + x + 1 = b$   
 $x(15x - 8z) = 8yz$   
 $z = \frac{x(15x - 8z)}{8y}$   
 $5x - y = \frac{3 \cdot 15 \cdot x}{8y + x}$   
 $5x - y = \frac{45x}{8y + x}$

$(5x - y)(5x + y) - z^2$   
 $y^2 + 3z^2$   
 $z = \frac{15x - y}{8y + x}$

$\frac{(5x - y)(5x + y) - z^2}{y^2 + 3z^2}$   
 $5x^2 - 8y^2 + 39yx = 45xy$   
 $5x^2 - 8y^2 = 6xy$   
 $\frac{3z(3z + 2y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6yz}{y^2 + 3z^2} = \frac{2(4z^2 + 3yz)}{y^2 + 3z^2}$   
 $\frac{3z(3z + 2y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6yz}{y^2 + 3z^2} = \frac{2(4z^2 + 3yz)}{y^2 + 3z^2}$   
 $= 2z \left( \frac{4z + 3y}{y^2 + 3z^2} \right)$

$5x^2 - 8y^2 + 39yx = 45xy$   
 $5x^2 - 8y^2 = 6xy$   
 $x = \frac{y + 3z}{5}$

$\frac{3z(3z + 2y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6yz}{y^2 + 3z^2} = \frac{2(4z^2 + 3yz)}{y^2 + 3z^2}$   
 $\frac{8z^2 + 6yz}{y^2 + 3z^2} = \frac{2(4z^2 + 3yz)}{y^2 + 3z^2}$   
 $5x - 3z = \frac{xz}{15x - 8z}$