



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1

$$ab: (3^{11} \cdot 4^{11})$$

$$bc: (3^{18} \cdot 4^{16})$$

$$ac: (3^{21} \cdot 4^{38})$$

} \Rightarrow

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 = ab \cdot bc \cdot ac : (3^{50} \cdot 4^{65})$$

$$a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{N}$$

} $\Rightarrow abc : 3^{25} \cdot 4^{33} \Rightarrow$
 $\Rightarrow abc \geq 3^{25} \cdot 4^{33}$

Ответ: $3^{25} \cdot 4^{33}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

~~$2x^2 - 3x + 4 - 2x^2 - x - 3 = 1 - 4x(\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3})$~~

$$1 - 4x = 1 - 4x(\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3})$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1$$

~~$y = 2x^2 - 3x + 4$~~

$$x_{\text{вып}} = \frac{3}{4}$$

$$y_{\text{вып}} = 2 \cdot \frac{9}{16} - 3 \cdot \frac{3}{4} + 4 = \frac{18 - 36 + 64}{16} = \frac{46}{16}$$

$$2x^2 - 3x + 4 \geq \frac{46}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \sqrt{2x^2 - 3x + 4} > 1 \\ \sqrt{2x^2 + x + 3} \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3} > 1 \Rightarrow$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x - \text{решений нет}$$

Ответ: решений нет

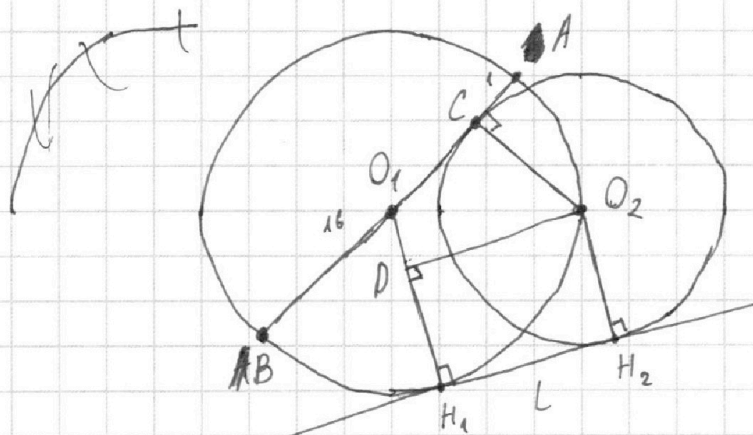
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$l = AB = AC + BC = 16$~~

l - длина касательной
 H_1, H_2 - точки касания общ. кас. с
 окружностями Ω и ω
 соответственно

r_1 - радиус окружности Ω

r_2 - радиус окружности ω

$r_1 = \frac{AB}{2} = \frac{AC + CB}{2} = 8,5$

соответственно

~~O_1, O_2~~ - центры окружностей Ω, ω

$O_1 O_2 = r_1 - r_2$

~~$AC = AB - BC = r_1 - r_2$~~

$O_1 C = BC - r_1 = 16 - 8,5 = 7,5$

$r_2^2 = -O_1 C^2 + O_1 O_2^2 = 8,5^2 - 7,5^2$

$\Rightarrow 42,25 - 56,25 = 16$

4	2	3	2
8,5	8,5		7,5
	8,5		7,5
	4,25		3,75
6	8,0		5,25
	42,25		56,25
			56,25

~~$r_2 = 4$~~

~~$O_2 D \perp O_1 H_1$~~ построение, $D \in O_1 H_1$

$DH_1 = O_2 H_2, DO_2 = H_1 H_2$ ~~прямоугольник по построению~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} L^2 &= O_2^2 = O_1 O_2^2 - O_1^2 O_2^2 = 8,5^2 - (4,5 - 4,5)^2 = && \begin{array}{r} 2 \quad 2 \\ 45 \\ 45 \\ 225 \\ 180 \\ 2025 \end{array} \\ &= 8,5^2 - \cancel{4,5^2} = 72,25 - 20,25 = \\ &= 32 \end{aligned}$$

$$L = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Ответ: $L = 4\sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$$a^2 - 8ab + b^2 = 0$$
$$D = 64b^2 - 4b^2 = 60b^2$$
$$a = \frac{8b \pm \sqrt{60b^2}}{2} = 4b \pm \sqrt{15}b$$~~

~~$$\frac{a+b}{a^2 - 8ab + b^2} = \frac{a+b}{(a - 4b - \sqrt{15}b)(a - 4b + \sqrt{15}b)}$$~~

~~$$(a+b) : m \Rightarrow a \equiv -b \pmod{m}$$
$$b^2 + a^2 \equiv 8ab \pmod{m}$$~~

5

$$3x + 2y = z$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} = \frac{2}{3x+2y}$$

$$3(3x+2y)y + (3x+2y)x = 2xy$$

$$9xy + 6y^2 + 3x^2 + 2xy = 2xy$$

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$$

$$D = 9y^2 - 8y^2 = y^2$$

$$x = \frac{-3y \pm y}{2}$$

$$\begin{cases} x = -y \\ x = -2y \end{cases}$$

~~$$(x+y)(x+2y) = 0$$~~

$$\begin{cases} z = -y \\ z = -2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = z = -y \\ z = 2x = -2y \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

н/м $x = z = -y$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3x^2 - 4x^2 - x^2}{x^2 - 6x^2} = \frac{-2x^2}{-5x^2} = \frac{2}{5}$$

н/м $z = 2x = -4y$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3 \cdot 4y^2 - 4y^2 - 16y^2}{4y^2 - 6y^2} = \frac{12 - 4 - 16}{-2} = 4$$

Ответ: 4

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6

S - расстояние между А и В

v - скорость мотоцикла

u - скорость велосипедиста

$$\begin{cases} \frac{S}{u} - \frac{S}{v} = 2 \\ v\left(\frac{S}{u}\right) - u\left(\frac{S}{v}\right) = 96 \\ \frac{S}{u+6} - \frac{S}{v+6} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S(v-u) = 2uv \\ S(v^2 - u^2) = 96uv \end{cases} \Rightarrow v+u = 48$$
$$S(v+6 - u-6) = \frac{5}{4}(v+6)(u+6)$$

$$2uv = \frac{5}{4}(v+6)(u+6)$$

$$8uv = 5vu + 30v + 30u + 180$$

$$\begin{cases} 10v - 10u - 60 = 0 \\ v+u = 48 \end{cases}$$

$$v(48-v) - 10v - 10(48-v) - 60 = 0$$

$$48v - v^2 - 10v - 480 + 10v - 60 = 0$$

$$v^2 - 48v + 540 = 0$$

$$D = 48^2 - 2160 = 2304 - 2160 = 12^2$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3 \\ \hline 6 \\ \times 48 \\ \hline 48 \\ 384 \\ \hline 192 \\ \hline 2304 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$v = \frac{18 \pm \cancel{12}}{2}$$

Система симметрична относительно v и u ,

$$v > u \Rightarrow$$

$$v = \frac{48 + 12}{2} = 30$$

$$u = \frac{48 - 12}{2} = 18$$

$$\text{§A } S(v-u) = 2uv$$

$$S = \frac{2 \cdot 18 \cdot 30}{(30-18)} = \frac{2 \cdot 18}{12} \cdot 30 = 3 \cdot 30 = 90 \text{ (км)}$$

Ответ: $S = 90 \text{ км}$

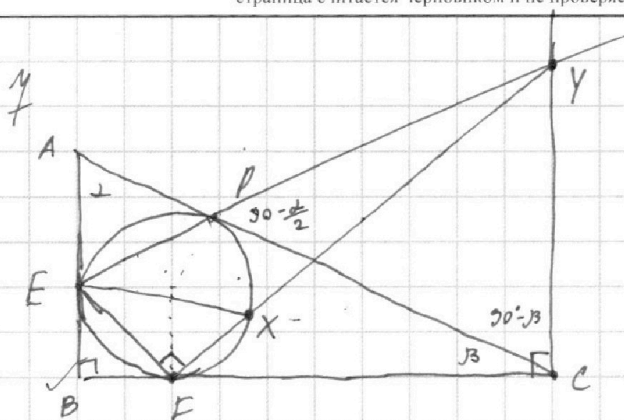
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$EX = 2\sqrt{2}XY$$

$$\frac{AD}{BC} = ?$$

$\triangle ADE \sim \triangle CDY$ по 2 углам

$$\frac{AD}{DC} = \frac{ED}{DY} = \frac{AE}{YC}$$

$$\angle A = \alpha \quad \angle ACB = \beta$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

~~$AE = AD$ (точки касания)~~

$AE = AD$ тк E и D - точки касания

$$\angle YDC = \angle ADE = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \text{ как кр. смеж. углы}$$

$$\angle DCY = 90^\circ - \beta$$

$$180^\circ = \angle PYC + 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - \beta$$

$$\angle PYC = \beta + \frac{\alpha}{2} = (90^\circ - \alpha) + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \angle YDC \Rightarrow$$

$YC = DC$ равноб. \triangle

$YC = DC = FC$ (впис. окр.) $\Rightarrow \angle CYF = \angle CFY = 45^\circ$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle BFE = \angle BEF = 45^\circ \text{ (впис. окр.)} \Rightarrow$$

$$\angle EFX = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow$$

~~EX~~ EX — диаметр ω

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~2~~

$\angle BFE = \angle BEMF = 45^\circ$ (впис. окр.) \Rightarrow

~~$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} + 6ab$~~ $\angle FX = 90^\circ \Rightarrow$
 ~~$a^2 - 8ab + b^2$~~ EX - диаметр \cap

~~$a^2 - 8ab + b^2$~~

~~$S = vt$
 $S = ut$~~

~~$3x + 2y = z$
 $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$~~

~~$\frac{S}{u} - \frac{S}{v} = 2$ $\frac{S}{u+b} - \frac{S}{v+b} = \frac{5}{4}$
 $v \frac{S}{u} - u \frac{S}{v} = 96$~~

~~$3x + 2y = z$~~

~~$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$~~

~~$3x^2 - 4y^2 = z^2$ $3x^2 - 4y^2 - z^2 = \frac{\sqrt{3}x + \sqrt{4}y}{x - \sqrt{6}y} (x + \sqrt{6}y)$~~

~~$x = \frac{2(4y^2 + z^2) \cdot 3}{16y^2 + 4z^2}$~~

~~$S \left(\frac{v}{u} - \frac{u}{v} \right) =$~~

~~$S(v^2 - u^2) = 96uv$ $\Rightarrow v + u = 48$
 $S(v - u) = 2uv$~~

~~$2uv = \frac{5}{4}$~~

~~$S \left(\frac{v+b}{u+b} - \frac{u+b}{v+b} \right) = \frac{5}{4} (u+b)(v+b)$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} =$$