



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



9 КЛАСС. Вариант 13

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 8ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$3x + 2y = z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = 2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1

$$ab : \left(3^{11} \cdot 4^{11} \right)$$

$$bc : \left(3^{18} \cdot 4^{16} \right)$$

$$ac : \left(3^{21} \cdot 4^{38} \right)$$

}

\Rightarrow

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 = ab \cdot bc \cdot ac : \left(3^{50} \cdot 4^{65} \right)$$

$a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{N}$

}

$$\Rightarrow abc : 3^{25} \cdot 4^{33} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc \geq 3^{25} \cdot 4^{33}$$

$$\text{Ответ: } 3^{25} \cdot 4^{33}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

$$2x^2 - 3x + 4 - 2x^2 - x - 3 = 1 - 4x (\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3})$$

$$1 - 4x = 1 - 4x (\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3})$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1$$

$$y = 2x^2 - 3x + 4$$

$$x_{\text{кр}} = \frac{3}{4}$$

$$y_{\text{кр}} = 2 \cdot \frac{9}{16} - 3 \cdot \frac{3}{4} + 4 = \frac{18 - 36 + 64}{16} = \frac{46}{16}$$

$$2x^2 - 3x + 4 \geq \frac{46}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 4} > 1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 4}$$

$$\sqrt{2x^2 + x + 3} \geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3} > 1 \Rightarrow$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x - \text{решений нет}$$

Ответ: решений нет

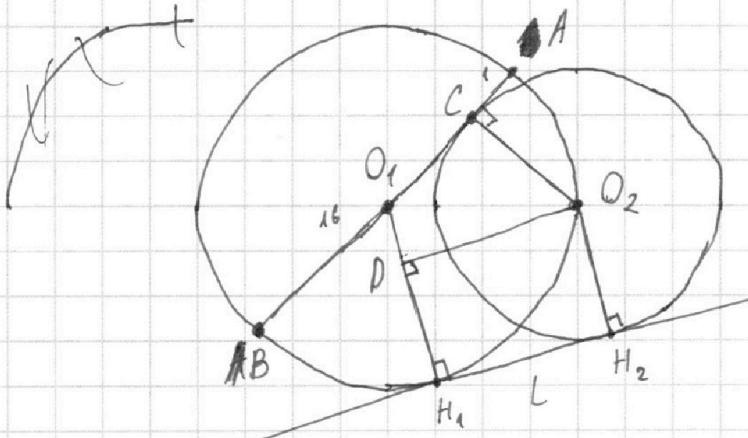
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~AB = AC + BC~~

— длина хасательной

H_1, H_2 — точки хасания обн. кас. с

окруженостями Ω и ω
соответсвенно

r_1 — радиус окружности Ω

r_2 — радиус окружности ω

$$r_1 = \frac{AB}{2} = \frac{AC + CB}{2} = 8,5$$

согласно

~~O1, O2~~ — центры окружностей Ω, ω

$$O_1 O_2 = r_1 - r_2$$

~~O1C = BC~~

$$O_1 C = BC - r_1 = 16 - 8,5 = 4,5$$

$$\begin{array}{r} 4,2 \\ 8,5 \\ 8,5 \end{array}$$

3,2

4,5

4,5

$$r_2^2 = O_1 C^2 + O_1 O_2^2 = 8,5^2 - 4,5^2 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} 4,25 \\ 6,25 \\ 6,25 \end{array}$$

3,75

3,75

$$\Leftrightarrow 72,25 - 56,25 = 16$$

$$\begin{array}{r} 6,8 \\ 7,25 \\ 7,25 \end{array}$$

5,25

5,25

$$\therefore r_2 = 4$$

$$\begin{array}{r} 5,25 \\ 5,25 \\ 5,25 \end{array}$$

~~O2D ⊥ O1H1~~ построение, $D \in O_1 H_1$

$DH_1 = O_2 H_2$, $DO_2 = H_1 H_2$ ~~приложилник~~ по постр



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$C^2 = D^2 - O_2^2 = O_1O_2^2 - O_1D^2 = 8,5^2 - (r_1 - r_2)^2 =$$

$$= 8,5^2 - 4,5^2 = 72,25 - 20,25 =$$

$$= 32$$

$$C = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Ответ: $C = 4\sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} a^2 - 8ab + b^2 &= 0 \\ a^2 - 64b^2 - 4b^2 &= 60b^2 \\ a = \frac{8b}{2} &= \sqrt{60b} = 4b\sqrt{15} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} a^2 - 8ab + b^2 &= (a - 4b - \sqrt{15}b)(a - 4b + \sqrt{15}b) \\ (a+b) : m &\Rightarrow a \equiv -b \pmod{m} \\ b^2 + a^2 &\equiv 8ab + 0 \pmod{m} \end{aligned}$$

#5

$$3x+2y = z$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} = \frac{2}{3x+2y}$$

$$3(3x+2y)y + (3x+2y)x = 2xy$$

$$9xy + 6y^2 + 3x^2 + 2xy = 2xy$$

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$$

$$D = 9y^2 - 8y^2 = y^2$$

$$x = \frac{-3y \pm y}{2} \quad \begin{cases} x = -y \\ x = -2y \end{cases}$$

$$(x+y)(x+y) \quad \begin{cases} z = -y \\ z = -4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = z = -y \\ z = 2x = -4y \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

 МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{пм } x = z = -y$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3x^2 - 4x^2 - x^2}{x^2 - 6x^2} = \frac{-2x^2}{-5x^2} = \frac{2}{5}$$

$$\text{пм } z = 2x = -4y$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3 \cdot 4y^2 - 4y^2 - 16y^2}{4y^2 - 6y^2} = \frac{12 - 4 - 16}{-2} = 4$$

Ответ: 4

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6

s - расстояние между А и В

v - скорость лодки в движении

u - скорость ветром

$$\begin{cases} \frac{s}{u} - \frac{s}{v+u} = 2 \\ v\left(\frac{s}{u}\right) - u\left(\frac{s}{v}\right) = 96 \\ \frac{s}{u+6} - \frac{s}{v+6} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s(v-u) = 2uv \\ s(v^2 - u^2) = 96uv \\ s(v+6 - u - 6) = \frac{5}{4}(v+6)(u+6) \end{cases} \Rightarrow v+u = 48$$
$$2uv = \frac{5}{4}(v+6)(u+6)$$

$$8uv = 50v + 30u + 30u + 180$$

$$\begin{cases} 8uv - 10v - 10u - 60 = 0 \\ v+u = 48 \end{cases}$$

$$v(48-v) - 10v - 10(48-v) - 60 = 0$$

$$48v - v^2 - 10v - 480 + 10v - 60 = 0$$

~~10v~~

$$v^2 - 48v + 540 = 0$$

$$\mathcal{D} = 48^2 - 2160 = 2304 - 2160 = 12^2$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3 \\ \times 6 \\ \hline 18 \\ \times 48 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$1384$$

$$192$$

$$2304$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$v = \frac{18 + 12}{2}$$

Система симметрична относительно v и u ,

$$v > u \Rightarrow$$

$$v = \frac{48 + 12}{2} = 30$$

$$u = \frac{48 - 12}{2} = 18$$

$$\text{ст} S(v-u) = 2uv$$

$$S = \frac{2 \cdot 18 \cdot 30}{(30-18)} = \frac{2 \cdot 18}{12} \cdot 30 = 3 \cdot 30 = 90 \text{ (км)}$$

Ответ: $S = 90 \text{ км}$

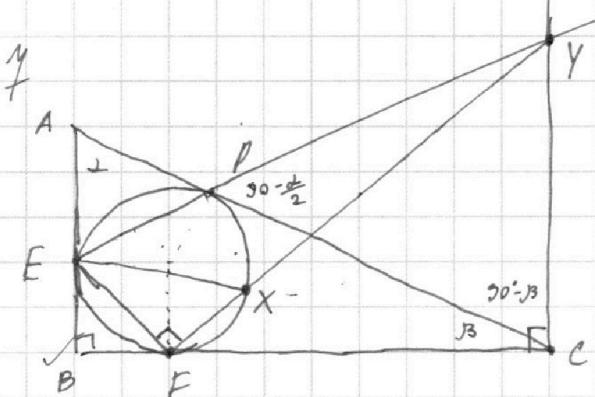
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$EX = 2\sqrt{2}XY$$

$$\frac{AD}{DC} = ?$$

$\triangle ADE \sim \triangle CDY$ по 2 угла

$$\frac{AD}{DC} = \frac{ED}{DY} = \frac{AE}{YC}$$

$$\angle A = \alpha \quad \angle ACB = \beta$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

~~AE = AD~~ (так как касательная)

$AE = AD$ тк $E \in l$ - точка касания

$$\angle YDC = \angle ADE = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \text{ макр. лем. угла}$$

$$\angle DCY = 90^\circ - \beta$$

$$180^\circ = \angle DYC + 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - \beta$$

$$\angle DYC = \beta + \frac{\alpha}{2} = (90^\circ - \alpha) + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \angle YDC \Rightarrow$$

$YC = DC$ равнод. \triangle

$YC = DC = FC$ (внис. квр) $\Rightarrow \angle CYF = \angle CFY = 45^\circ$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle BFE = \angle BEF = 45^\circ \quad (\text{внеш. угл.}) \Rightarrow$$

$$\angle EFX = 180^\circ - 15^\circ - 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow$$

~~EX~~ EX - диаметр ω



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1

$$\angle BFE = \angle BEF = 45^\circ \text{ (внеш. окр.)} \Rightarrow$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{a+b}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{a+b}{6ab} \quad \angle EXF = 90^\circ \Rightarrow \\ a^2 - 8ab + b^2 \quad EX \text{ - диаметр } \omega$$

$$3: \quad \cancel{a^2 - 8ab + b^2}$$

$$3x + 2y = z$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \Rightarrow 3y = x + 2xy$$

$$3x^2 - 4y^2 - z^2 = 0 \quad 3x^2 - 4y^2 - z^2 = \sqrt{3x + 4y^2 + z^2}$$

$$D = \sqrt{(4y^2 + z^2) \cdot 3}$$

$$x = \pm \sqrt{(4y^2 + z^2) \cdot 3}$$

$$S \left(\frac{v}{u} - \frac{u}{v} \right) =$$

$$S \left(v^2 - u^2 \right) = 36uv \quad \Rightarrow v+u=48$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S(v-u) = 2uv \\ S(v+u-u) = \frac{5}{4}(u+v)(v+u) \end{cases}$$

$$2uv = \frac{5}{4}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2 - 8ab + b^2} =$$