



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 9 КЛАСС. Вариант 14

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{14}7^{13}$ ,  $bc$  делится на  $3^{19}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $3^{23}7^{42}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x.$$

- [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC = 1$  и  $BC = 25$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .
- [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$5x - y = 3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения  $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$ .

- [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклистику на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 36 минут позже ~~велосипедиста~~ мотоциклиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .

*мотоциклиста*

- [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX = \sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD : DC$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N1. \quad ab: 3^{14} \cdot 7^{13}; \quad bc: 3^{19} \cdot 7^{14}; \quad ac: 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$abc_{\min} - ?$$

$$a = 3^{d_1} \cdot 7^{\beta_1}$$

$$b = 3^{d_2} \cdot 7^{\beta_2}$$

$$c = 3^{d_3} \cdot 7^{\beta_3}$$

$d_1, d_2, d_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  – целые  
неотрицательные числа.

$$abc = 3^{d_1+d_2+d_3} \cdot 7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 + d_2 \stackrel{\text{def}}{\geq} 14 \\ d_2 + d_3 \stackrel{\text{def}}{\geq} 19 \\ d_1 + d_3 \stackrel{\text{def}}{\geq} 23 \end{array} \right. \Rightarrow 2(d_1 + d_2 + d_3) \geq 56 \Rightarrow d_1 + d_2 + d_3 \geq 28$$

$d_1 + d_2 + d_3 = 28$  при  $d_1 = 9, d_2 = 5, d_3 = 14$

$$abc_{\min} = 3^{28} \cdot 7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 + \beta_2 \stackrel{\text{def}}{\geq} 13 \\ \beta_2 + \beta_3 \stackrel{\text{def}}{\geq} 14 \\ \beta_1 + \beta_3 \stackrel{\text{def}}{\geq} 23 \end{array} \right. \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 42, \text{ т.к. } \beta_1 + \beta_3 \geq 23$$

$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 42$  при  $\beta_1 = 19, \beta_2 = 0, \beta_3 = 23$

$$abc_{\min} = 3^{28} \cdot 7^{42} \text{ при } a = 3^9 \cdot 7^{19}, b = 3^5, c = 3^{14} \cdot 7^{23}$$

$$\text{Ответ: } abc_{\min} = 3^{28} \cdot 7^{42}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 11ab} \quad (a+b)^2 - 11ab : m$$

Если  $a:m$  и  $b:m$   $\Rightarrow \frac{a}{b}$  сократимо  $\Rightarrow a:y:m$   $b:y:m$

$$a+b:m \Rightarrow (a+b)^2:m$$

$$(a+b)^2 - 11ab:m \Rightarrow 11ab:m$$

$$m_{\max} \text{ при } 11:m$$

$m_{\max} = 11$ , например при  $a=7$   $b=4$

Ответ:  $m_{\max} = 11$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

ЛМФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

Домножим обе части на  $\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1}$

$$5 - 6x = (5 - 6x)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$$

$$x = \frac{5}{6}$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} = 1$$

Тогда  $x = \frac{5}{6}$  или недоказанное в изложении  
уравнение даем

$$\sqrt{\frac{3 \cdot 25 - 6 \cdot 25 + 216}{36}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 25 + 5 \cdot 6 + 36}{36}}$$

$$\text{Проверка. } 276 - 6 \cdot 25 = 66 = 5 \cdot 6 + 36 \text{ равенство верное.}$$

Докажем верхнее  $\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1}$

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 + x + 1} \geq 0 \\ \sqrt{3x^2 - 5x + 6} \geq \sqrt{\frac{3 \cdot 25 - 6 \cdot 25 + 216}{36}} = \sqrt{\frac{141}{36}} > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3x^2 + x + 1} + \sqrt{3x^2 - 5x + 6} > 1$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{5}{6}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

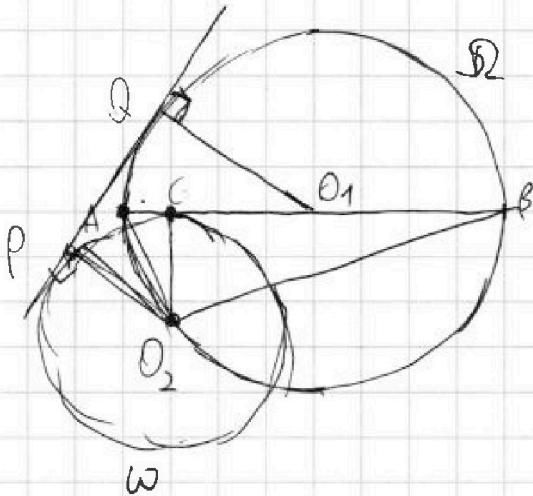
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.



$O_1$ -центр  $\Omega_2$ ;  $O_2$ -центр  $\omega$

$$AC = 1 \quad BC = 25$$

$D$ -диаметр  $\Omega_2$ ,  $d$ -диаметр  $\omega$   $\frac{D}{2} = R$   $\frac{d}{2} = r$

$P$  и  $Q$  - точки касания общей касательной  
 $\omega$  и  $\Omega_2$  соответственно  $\angle A O_2 B = 90^\circ$  и  $k. AB = D$

$$\text{Найдем } R = O_1 A = O_1 B = O_1 O_2 = \frac{AB}{2} = \frac{AC + BC}{2} = \frac{1 + 25}{2} = 13$$

$$O_2 C = O_2 P = \frac{d}{2} = r$$

$$O_2 C^2 + AC^2 = AD^2 \quad O_2 C^2 + BC^2 = O_2 B^2$$

$$O_2 A^2 + O_2 B^2 = AB^2$$

$$O_2 C^2 = \frac{AB^2 - AC^2 - BC^2}{2}$$

$$O_2 C = 5 = O_2 P$$

$$O_2 C = \sqrt{\frac{AB^2 - AC^2 - BC^2}{2}} = \sqrt{\frac{676 - 625 - 1}{2}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

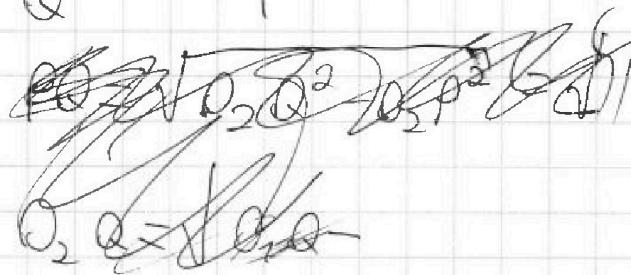
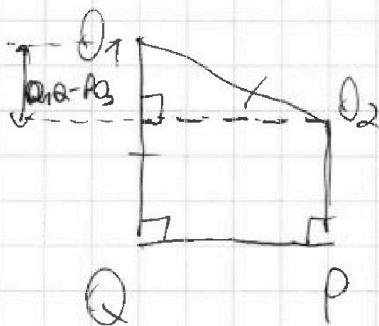
- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4 (продолжение)

$$O_2 P \perp PQ \perp O_1 Q \Rightarrow O_2 P \parallel O_1 Q$$



$$PQ = \sqrt{O_2 O_1^2 - (Q_1 Q - PO_2)^2} = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{105}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5

$$5x - y = 32 \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{2}$$
$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} \min \rightarrow \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = m$$

$$5x = y + 32$$

$$m = \frac{y^2 + 6yz + 9z^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6yz}{y^2 + 3z^2}$$

$$y = 5x - 3z \quad y = \frac{xz}{15x - 8z}$$
$$5x - 3z = \frac{xz}{15x - 8z}$$

$$75x^2 - 90xz - 45x^2 - xz + 24z^2 = 0$$

$$79x^2 - 86xz + 24z^2 = 0$$

$$x = \frac{86z \pm 14z}{190} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2z}{3} \\ x = \frac{12z}{25} \end{cases}$$

$$m = \frac{25x^2 - (5x - 3z)^2 - z^2}{(5x - 3z)^2 + 3z^2} - \frac{30xz - 10z^2}{25x^2 - 70xz + 12z^2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} & 30 \cdot \frac{2z}{3} \cdot 2 - 10z^2 \\ & 25 \cdot \frac{4z}{9} - 30 \cdot \frac{2z}{3} \cdot 2 + 12z^2 = \left(\frac{100}{9} - 20 + 12\right)z^2 \\ & 10 \cdot 10 - 100z^2 + 12 \cdot 9 = 90 \\ & 100 - 20 \cdot 9 + 12 \cdot 9 = 72 \\ & 100 - 72 = 28 \\ & = 28 = 4 \end{aligned}$$

№5 (продолжение 1)

Подставим в  $m = \frac{30k_2 - 10z^2}{25x^2 - 30k_2 + 12z^2}$

$$x = \frac{2z}{3}$$

$$\frac{30 \cdot \frac{2z}{3} \cdot 2 - 10z^2}{25 \cdot \frac{4z^2}{9} - 30 \cdot \frac{2z}{3} \cdot 2 + 12z^2} = \frac{10z^2}{\left(\frac{100}{9} - 20 + 12\right)z^2} =$$

$$= \frac{90}{28} = \frac{45}{14} = m_1$$

Подставим  $x = \frac{12z}{25}$

$$\frac{30 \cdot \frac{12z}{25} \cdot 2 - 10z^2}{25 \cdot \frac{144z^2}{625} - 30 \cdot \frac{12z}{25} \cdot 2 + 12z^2} = m_2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 (усложнение 2)

$$m_2 = \frac{\frac{6 \cdot 12}{5} - 10}{\frac{144}{25} - \frac{30 \cdot 12}{25} + 12} = \frac{\frac{6 \cdot 5 \cdot 12 - 250}{25}}{144 - 30 \cdot 12 + 25 \cdot 12} =$$
$$= \frac{360 - 250}{144 - 60} = \frac{55}{92}$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 - 3z^2} \min = \frac{55}{92}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N6  $AB = S$   $\forall B$  - скользящее движение  $v_m$  - скорость центра тяжести

$$\frac{S}{v_B} - \frac{S}{v_m} - 1\gamma \Rightarrow S = \frac{v_B v_m}{v_m - v_B} \cdot 1\gamma \quad ①$$

$$v_m \cdot \frac{S}{v_B} - v_B \cdot \frac{S}{v_m} = 99 \text{ km} \quad S = \frac{49 v_B v_m}{v_m^2 - v_B^2} \quad ②$$

$$\frac{S}{v_B + 7} - \frac{S}{v_m + 7} = \frac{3}{5} \gamma \quad S = \frac{3(v_B + 7)(v_m + 7)}{5(v_m - v_B)} \quad ③$$
$$S = \frac{v_B v_m}{v_m - v_B} = \frac{49 v_B v_m}{v_m^2 - v_B^2} = \frac{3(v_B + 7)(v_m + 7)}{5(v_m - v_B)}$$

$$\Downarrow \\ v_m + v_B = 49$$

$$5v_B v_m = 3v_B v_m + 21v_B + 21v_m + 147$$

$$2v_B v_m = (21 + 3)49 \neq$$

$$v_B v_m = 12 \cdot 49 \quad v_B = \frac{12 \cdot 49}{v_m}$$

$$v_m^2 - 49v_m + 12 \cdot 49 = 0$$

$$v_m = \frac{49 \pm \sqrt{49^2 - 4 \cdot 12 \cdot 49}}{2} = 28; 21$$

$$v_m \geq 25 \Rightarrow v_m = 28, v_B = 21$$

$$S = \frac{28 \cdot 21}{28 - 21} = 84 \text{ km}$$

Ответ:  $d(A; B) = 84 \text{ km}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

**МФТИ**

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{\frac{3 \cdot 25}{36} - \frac{25}{6} + 6} = \sqrt{\frac{3 \cdot 25}{36} + \frac{5}{6} + 1} = 0$$

$$\sqrt{\frac{3 \cdot 25 - 6 \cdot 25 + 36}{36}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 25 - 5 \cdot 6 + 36}{36}} = \cancel{\sqrt{\frac{16}{36}}} =$$

$$276 - 6 \cdot 25 = 36 + 5 - 6$$

$$276 - 150 = 36 + 30$$

$$66 = 66$$

$$\begin{array}{r} +66 \\ 75 \\ \hline 191 \end{array}$$

$$0=0$$

$$\cancel{\frac{25}{9} - 4 \cdot 2} = \cancel{\frac{25 - 4 \cdot 2 \cdot 9}{9}} = \frac{5}{6}$$

$$3x^2 - 5x + 6$$

$$3 \cdot \cancel{\frac{25}{36}} + \sqrt{5}$$

$$ax^2 + bx + c - \frac{b}{2a}$$

$$\frac{a b^2}{4a^2} + -\frac{b^2}{2a} + c$$

$$\frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$

$$\frac{4ac - b^2}{4a} \quad \times \frac{14}{14}$$

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 6 - 5^2}{4 \cdot 3} =$$
  
$$\frac{84 - 25}{12} =$$
  
$$\frac{59}{12}$$

$$\begin{array}{r} \times 86 \\ \times 86 \\ \hline 516 \\ 688 \\ \hline 7396 \end{array}$$

$$24 \cdot 300 = 7200$$

$$196$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a}{8} + \frac{c}{d} = k$$

$$\frac{a+c}{8+d} = k$$

$$\frac{a+c}{8+d} = \frac{a}{8} + \frac{c}{d}$$

$$aBd + Bcd = ab^2 + b^2c + Bcd + acd^2$$

$$\frac{a}{B} = \frac{c}{d} = k$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = m$$

$$25x^2 - y^2 - z^2 = my^2 + 3mz^2$$

25

$$5x = 3z + y$$

$$3z^2 + 6zy + y^2 - y^2 - z^2 : 3z^2 + y^2$$

$$\frac{2z^2 + 6zy}{3z^2 + y^2} \min?$$

$$x = \frac{3z + y}{5} \quad \frac{40}{3z + y} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{7}} + \frac{\cancel{3}}{\cancel{8}} = \frac{\cancel{2} + \cancel{3}}{\cancel{7} + \cancel{8}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2 \cdot 8 + 3 \cdot 7}{7 \cdot 8} = \frac{31}{56}$$

$$769 - 64 = 705$$

$$3 \cdot 7 \cdot 5$$

$$a \neq b : m$$

$$d = mn \quad b = mk$$

$$(a, b) = 1$$

$$ab \in m(mk)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5x - y = 32 \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{19}{2}$$

$$y = 5x - 32$$

$$\frac{1}{y} = \frac{15}{2} - \frac{8}{x} = \frac{15x - 8z}{xz}$$

$$\frac{72}{150} = \frac{36}{75} = \frac{12}{25}$$

$$y = \frac{xz}{15x - 8z}$$

$$\frac{xz}{15x - 8z} = 5x - 32$$

$$xz = 75x^2 - 40x_2 - 45x_2 + 24z^2$$

$$75x^2 - 86x_2 + 24z^2 = 0$$

$$x = \frac{86z \pm \sqrt{86^2 z^2 - 4 \cdot 24z^2 \cdot 75}}{750} = \frac{86z \pm 14z}{150}$$

$$\frac{25x^2 - (5x - 32)^2 - z^2}{(5x - 32)^2 + z^2} = \frac{25x^2 - 25x^2 + 30x_2 - 92 - z^2}{25x^2 - 30x_2 + 12z^2} =$$

$$= \frac{30x_2 - 10z^2}{25x^2 - 30x_2 + 12z^2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

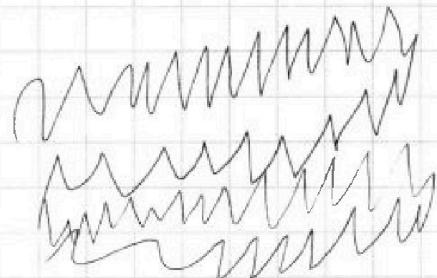
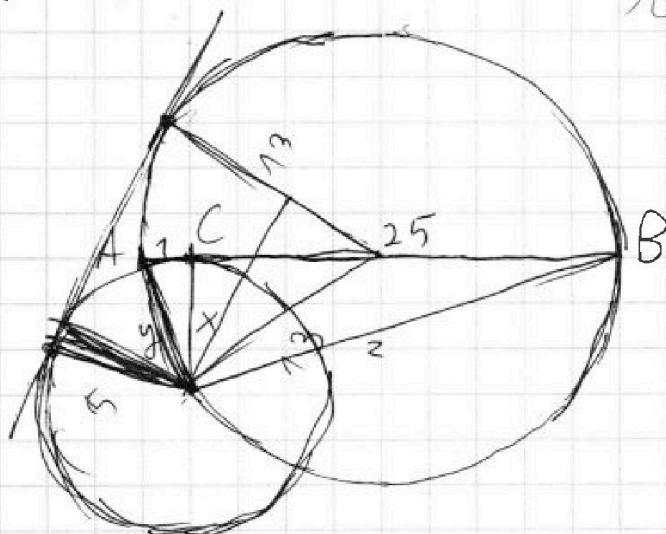
МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 10ab}$$

(a+b)m



$$1+x^2 = y^2$$

$$25^2 + x^2 = z^2$$

$$y^2 + z^2 = 26^2$$

$$1+625+2x^2=26^2$$

$$x=5$$

$$\frac{Tn}{55} = \frac{64-60}{410-360}$$

$$\frac{25 \cdot 225}{144z^2 - 30 \cdot \frac{12}{25}z^2 + 144z^2}$$

$$30 \cdot \frac{25}{144}z^2 - 144z^2$$

$$x = \frac{25}{144}z$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N1. \quad 3^{14} \cdot 7^{13} \mid abc$$

$$3^{19} \cdot 7^{14} \mid bca$$

$$3^{23} \cdot 7^{42} \mid acb$$

abc  $\leq$  ? abc

$$\begin{cases} a = 3^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1} \\ b = 3^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2} \\ c = 3^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3} \end{cases} \Rightarrow abc = 3^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 14 \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 14$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 \geq 19 \quad \alpha_2 + \alpha_3 = 19$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 \geq 23 \quad \alpha_1 + \alpha_3 = 23$$

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 14 + 19 + 23 = 56$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 28$$

$$\beta_1 + \beta_2 \geq 13$$

$$\beta_2 + \beta_3 \geq 17$$

$$\beta_1 + \beta_3 \geq 42$$

$$2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 42$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 36 \quad 42$$

$$abc = 3^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \geq 3^{28} \cdot 7^{19} \cdot 7^{42}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча OR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

Домножаем на сопряженные

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} \text{ где } \geq 0$$

$$3x^2 - 5x + 6 - 7x^2 - x - 1 = (5 - 6x)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$$

$$5 - 6x = (5 - 6x)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$$

делить

$$5 - 6x = 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} = 0 \Rightarrow \sqrt{a} \geq 0, \text{ где } a \geq 0$$

$$x = \frac{5}{6}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 5x + 6} = 0 \\ \sqrt{3x^2 + x + 1} = 0 \end{cases}$$

5

1 2 3 4 5 6 7  
✓ ✓ ✓ ✓ ✓

$$3x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 < 0$$

Значит корней у системы нет

Отмечена цифра 5



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

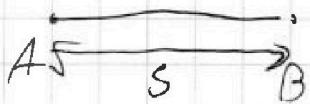
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

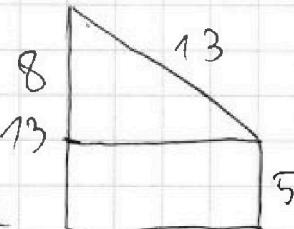
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$v_f$  - скорость бегущего

$v_m$  - скорость погоняющего



$$\frac{s}{v_f} - \frac{s}{v_m} = 1\text{ч}$$

~~$$v_f \cdot \frac{s}{v_m} v_m \cdot \frac{s}{v_f} - v_f \cdot \frac{s}{v_m} = 49 \text{ км}$$~~

$$\frac{s}{v_f+7} - \frac{s}{v_m+7} = 0,62$$

$$\frac{s \cdot v_m - s \cdot v_f}{v_f + v_m} = 1$$

$$s = \frac{v_f + v_m}{v_m - v_f}$$

$$\frac{s(v_m+7) - s(v_f+7)}{(v_f+7)(v_m+7)} = \frac{6}{10}$$

$$s = \frac{s(v_f+7)(v_m+7)}{(v_m + v_f) \cdot 70}$$

$$\frac{s(v_m^2 - v_f^2)}{v_f + v_m} = 49$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 25 \\ \hline 125 \\ 995 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 26 \\ 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$s = \frac{49 v_f v_m}{v_m^2 - v_f^2}$$

$$\begin{array}{r} -676 \\ 526 \\ \hline 50 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                       |                                       |                                       |                                       |                                       |                                       |                                       |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$S = \frac{V_B V_M}{V_M - V_B} = \frac{49 V_B V_M}{V_M^2 - V_B^2} = \frac{3(V_M + 7)(V_B + 7)}{5(V_M - V_B)}$$

$$1 = \frac{49}{V_M + V_B}$$

$$V_M + V_B = 49$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ 6 \\ \hline 294 \end{array}$$

$$\frac{6 V_M \cdot V_B + 42 V_M + 42 V_B + 294}{10 (V_M - V_B)}$$

$$\frac{32 V_M V_B + 21 V_M + 21 V_B + 197}{5 (V_M - V_B)}$$

~~$$2 V_B \cdot V_M = 6 V_B V_M + 42 V_M + 42 V_B + 294$$~~

$$5 V_B V_M = 32 V_B V_M + 21 V_M + 21 V_B + 197$$

$$2 V_B \cdot V_M = 21 \cdot 49 + 197 = 49 \cdot 24$$

$$V_B \cdot V_M = 49 \cdot 12 \quad V_B = \frac{49 \cdot 12}{24}$$

$$V_M + V_B = 49$$

$$V_M + \frac{49 \cdot 12}{24} = 49$$

$$V_M^2 + 49 \cdot 12 - 49 V_M = 0$$

$$49^2 - 49 \cdot 12 \cdot 4 = 49$$

$$V_M = \frac{49+7}{2} = 21; 28$$

$$V_M \neq V_B$$