



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{14}7^{13}$ ,  $bc$  делится на  $3^{19}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $3^{23}7^{42}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC = 1$  и  $BC = 25$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .
5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$5x - y = 3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения  $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .
7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX = \sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD : DC$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$$\left. \begin{aligned} ab &= 3^{14} \cdot 7^{13} \cdot p \\ bc &= 3^{19} \cdot 7^{17} \cdot q \\ ac &= 3^{23} \cdot 7^{42} \cdot r \end{aligned} \right\} \text{но целыми, где } p; q; r \text{ — целые положительные числа} \\ p; q; r \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} abc &= \sqrt{a^2 b^2 c^2} = \sqrt{3^{14} \cdot 7^{13} \cdot p \cdot 3^{19} \cdot 7^{17} \cdot q \cdot 3^{23} \cdot 7^{42} \cdot r} = \\ &= \sqrt{3^{56} \cdot 7^{72}} \cdot \sqrt{pqr} = 3^{28} \cdot 7^{36} \sqrt{pqr} \end{aligned}$$

при  $p=1; q=1; r=1$  условие выполняется:

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{3^5 \cdot 7^4} \quad ac = \frac{c^2}{3^5 \cdot 7^4} = 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$c = 3^{14} \cdot 7^{23} \quad a = 3^9 \cdot 7^{19} \quad b = \frac{3^{14} \cdot 7^{13}}{a} = 3^5 \cdot 7^6$$

такая ситуация возможна

т.к.  $abc = 3^{28} \cdot 7^{36} \sqrt{pqr}$ , наименьшее  $abc$  достигается при наименьшем  $\sqrt{pqr}$ , которая, в свою очередь, достигается при  $p=1, q=1, r=1$ ; тогда  $\sqrt{pqr}=1$ , а  $abc = 3^{28} \cdot 7^{36}$

Ответ:  $3^{28} \cdot 7^{36}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{\frac{a}{b}+1}{b\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2-9\frac{a}{b}+1\right)} \quad a \in \mathbb{N} \quad b \in \mathbb{N}$$

Обозначим  $\frac{a}{b} = c$ , тогда  $\frac{c+1}{b(c^2-9c+1)} = \frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$

Если дробь  $\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$  можно сократить на  $m$ , значит

дробь  $\frac{a^2-9ab+b^2}{a+b}$  так же можно сократить на  $m$

$$\frac{a^2+2ab+b^2-11ab}{a+b} = a+b - \frac{11ab}{a+b} \Rightarrow \frac{11ab}{a+b} - \text{сокращаем дробь}$$

т.к. дробь  $\frac{a}{b}$  - несократима,  $\text{НОД}(a, b) = 1 \Rightarrow$

$$\frac{ab}{a+b} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{ab}{a+b} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \Rightarrow 11 \frac{ab}{a+b} = \frac{11}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} - \text{сокращаем дробь} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  наибольшее число, на которое можно сократить данную дробь - 11,  
значит наибольшее  $m = 11$

Ответ: 11

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

$$3x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

$$3x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \Delta = 25 - 4 \cdot 18 < 0 \Rightarrow \text{выражение положительно при любых } x$$

$$3x^2 + x + 1 \geq 0$$

$$\text{выражение } 3x^2 + x + 1 = 0 \quad \Delta = 1 - 4 \cdot 3 < 0 \Rightarrow \text{аналогично}$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} = 5 - 6x + \sqrt{3x^2 + x + 1} \quad |^2$$

$$3x^2 - 5x + 6 = (5 - 6x)^2 + 2(5 - 6x)\sqrt{3x^2 + x + 1} + 3x^2 + x + 1$$

$$\underline{3x^2 - 5x + 6} - \underline{25 + 60x - 36x^2} - \underline{3x^2 - x - 1} = 2(5 - 6x)\sqrt{3x^2 + x + 1}$$
$$-36x^2 + 54x - 20 = 2(5 - 6x)\sqrt{3x^2 + x + 1}$$

$$-36x^2 + 54x - 20 = -2(18x^2 - 27x + 10)$$

$$18x^2 - 27x + 10 = 0$$

$$x = \frac{27 \pm \sqrt{27^2 - 40 \cdot 18}}{2 \cdot 18} =$$

$$27^2 = 3^6 = 729$$

$$40 \cdot 18 = 720$$

$$\sqrt{729 - 720} = 3$$

$$= \frac{27 \pm 3}{2 \cdot 18}$$

$$x_1 = \frac{27 + 3}{2 \cdot 18} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

$$x_2 = \frac{27 - 3}{2 \cdot 18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{27 + 3}{2 \cdot 18} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6} \\ x_2 = \frac{27 - 3}{2 \cdot 18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \end{array} \right\} \rightarrow -36x^2 + 54x - 20 = -2 \cdot 18 \left(x - \frac{5}{6}\right) \left(x - \frac{2}{3}\right)$$

$$-2 \cdot 18 \left(x - \frac{5}{6}\right) \left(x - \frac{2}{3}\right) = 2(5 - 6x)\sqrt{3x^2 + x + 1}$$

$$3(5 - 6x) \left(x - \frac{2}{3}\right) = (5 - 6x)\sqrt{3x^2 + x + 1} \quad | : (5 - 6x), \text{ либо } x = \frac{5}{6}, \text{ либо:}$$

$$(3x - 2) = \sqrt{3x^2 + x + 1}, \quad 3x - 2 \geq 0 \quad x \geq \frac{2}{3}, \quad |^2$$

$$(3x - 2)^2 = 3x^2 + x + 1$$

$$9x^2 - 12x + 4 = 3x^2 + x + 1$$

$$6x^2 - 13x + 3 = 0$$

$$\Delta = 169 - 4 \cdot 18 = 97$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{97}}{12} \quad x_1 = \frac{13 + \sqrt{97}}{12} > \frac{2}{3} \Rightarrow \text{удовл.}$$

$$x_2 = \frac{13 - \sqrt{97}}{12} \approx \frac{13 - 10}{12} = \frac{1}{4} < \frac{2}{3} \Rightarrow \text{не удовлетворяет}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{5}{6}; \frac{13 + \sqrt{97}}{12} \right\}$$

$$\frac{13 - 9}{12} = \frac{1}{3} > x_2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

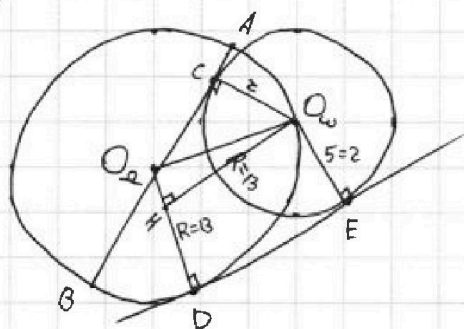
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4.



Центры окружностей  $\Omega$  и  $\omega$  —  
 $O_\Omega$  и  $O_\omega$  соответственно

По условию  $AC=1$ ;  $BC=25 \Rightarrow$   
 $AC+BC=1+25=26$  — диаметр  $\Omega \Rightarrow$   
 $R=13$  — радиус  $\Omega$

Точки касания общей касательной к окружностям  $\Omega$  и  $\omega$  —  
 $D$  и  $E$  соответственно

Тогда  $O_\Omega D = O_\Omega O_\omega = 13$

$(AB)$  — касательная к  $\omega \Rightarrow O_\omega C \perp AB$ ;  $O_\omega C = z$  — радиус  $O_\omega$

$O_\Omega C = R - AC = 12$

Рассмотрим  $\triangle O_\omega O_\Omega C$ : прямоугольный;  $O_\omega C = z$   
 $O_\omega O_\Omega = 13 = R$   
 $O_\Omega C = 12$  }  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  по т. Пифагора  $z = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 = O_\omega E$

$O_\Omega D \perp (ED)$ ;  $O_\omega E \perp (ED) \Rightarrow O_\Omega D \parallel O_\omega E \Rightarrow EO_\omega O_\Omega D$  — трапеция

$\Rightarrow [ED] = h$

Проведем  $O_\omega H \parallel ED$   $H \in O_\Omega D$  — высота трапеции

по т. Пифагора для  $\triangle O_\Omega H O_\omega$ :  $O_\omega H = \sqrt{O_\Omega O_\omega^2 - O_\Omega H^2} =$

$= \sqrt{R^2 - (R-z)^2} = \sqrt{13^2 - (13-5)^2} = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{169 - 64} = \sqrt{105} = ED$  —

— общая касательная к окружностям

Ответ:  $\sqrt{105}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

по  
усл.

$$\begin{cases} 5x - y = 3z & (1) \\ \frac{8}{y} + \frac{1}{z} = \frac{15}{x} & | \cdot xyz \\ 8yz + xz = 15xy & (2) \end{cases}$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{(5x - y)(5x + y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{3z(5x + y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = z \cdot \frac{3(5x + y) - z}{y^2 + 3z^2}$$

$$\begin{cases} \text{из (2): } z = \frac{15xy}{8y + x} \\ \text{из (1): } z = \frac{5x - y}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{45xy}{8y + x} = 5x - y \\ 45xy = (5x - y)(8y + x) \end{cases}$$

$$45xy = 40xy + 5x^2 - 8y^2 - xy$$

$$5x^2 - 8y^2 - 6xy = 0$$

$$8y^2 + 6xy - 5x^2 = 0$$

$$D = 9x^2 + 40x^2 = (7x)^2$$

$$y = \frac{-3x \pm 7x}{8}$$

$$y_1 = -\frac{5}{4}x \quad y_2 = \frac{x}{2}$$

при  $y_1$ :  $z_1 = \frac{5x - y}{3} = \frac{5x + \frac{5}{4}x}{3} =$

$$= \frac{25x}{12} = z_1$$

при  $y_2$ :  $z_2 = \frac{5x - \frac{x}{2}}{3} = 1.5x$

Подставим найденные значения  
для  $x, y, z$  в нужное выражение:

$(x_1, y_1, z_1)$ :

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{25x^2 - (-\frac{5}{4}x)^2 - (\frac{25}{12}x)^2}{(-\frac{5}{4}x)^2 + 3(\frac{25}{12}x)^2} = \frac{25}{12} \cdot \frac{3(5 + (-\frac{5}{4})) - \frac{25}{12}}{(-\frac{5}{4})^2 + 3(\frac{25}{12})^2} =$$

$$= \frac{25}{12} \cdot \frac{\frac{45}{4} - \frac{25}{12}}{\frac{25}{16} + 3 \cdot \frac{625}{144}} = \frac{25}{12} \cdot \frac{20/3}{25/12 \cdot 7} = \frac{20}{21}$$

$(x_2, y_2, z_2)$ :

$$\frac{1.5x \cdot (3(5 + \frac{1}{2})x - 1.5x)}{(\frac{x}{2})^2 + 3(1.5x)^2} = \frac{1.5(16.5 - 1.5)}{\frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{9}{4}} =$$

$$= \frac{22.5}{7} > \frac{20}{21} \Rightarrow \frac{20}{21} - \text{наши значения}$$

Ответ:  $\frac{20}{21}$

~~1.25/12, 2.25/12, 3.25/12, 4.25/12, 5.25/12, 6.25/12, 7.25/12~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### Задача 6

№

|           | $S, \text{ км}$ | $v, \text{ км/ч}$ | $t, \text{ ч}$ |
|-----------|-----------------|-------------------|----------------|
| Мотоцикл  | $S$             | $v_M$             | $x$            |
| Велосипед | $S$             | $v_B$             | $x+1$          |

Также по условию:

$$v_B \cdot x + 49 = v_M (x+1)$$

$$(v_B + 7)(y + 0,6) = (v_M + 7)y = S$$

$S$  (км) - расстояние между А и В;  $v_M$  (км/ч) - скорость мотоциклиста в I случае,  $v_B$  (км/ч) - скорость велосипедиста в I случае,  $x$  (ч) - время, затраченное мотоциклистом на путь в I случае;  $y$  (ч) - время, затраченное мотоциклистом на путь во II случае

Согласно условию составим систему уравнений:

$$\begin{cases} (1) v_M \cdot x = v_B \cdot (x+1) = S \\ (2) v_B \cdot x + 49 = v_M (x+1) \\ (3) (v_B + 7)(y + 0,6) = (v_M + 7)y = S \end{cases}$$

$$(2) - (1): 49 - v_B = v_M$$

$$\begin{aligned} (v_M + 7)y &= v_M \cdot x \\ (56 - v_B)y &= (49 - v_B)x \\ \frac{x}{y} &= \frac{56 - v_B}{49 - v_B} \end{aligned}$$

$$(v_B + 7)(y + 0,6) = v_B y + 0,6v_B + 7y + 4,2 = (v_M + 7)y = v_M y + 7y$$

$$(v_M - v_B)y = 0,6(v_B + 7)$$

$$(v_M - v_B)x = (49 - v_M) = v_B$$

$$\frac{y}{x} = \frac{0,6(v_B + 7)}{v_B} = \frac{49 - v_B}{56 - v_B}$$

$$0,6(v_B + 7)(56 - v_B) = (49 - v_B)v_B$$

$$-0,6v_B^2 + 0,6 \cdot 49v_B + 0,6 \cdot 7 \cdot 56 = 49v_B - v_B^2 \Rightarrow 0,4v_B^2 - 0,4 \cdot 49v_B + 0,6 \cdot 7 \cdot 56 = 0$$

$$0 = 49^2 - 21 \cdot 56 \cdot 2 = 7^2 \quad 2v_B^2 - 2 \cdot 49v_B + 3 \cdot 7 \cdot 56 = 0$$

$$v_B = \frac{49 \pm 7}{2} \quad v_{B1} = 21 \text{ км/ч}$$

$$v_{B2} = 28 \text{ км/ч}$$

т.к. по условию  $v_M > v_B$  (из-за того, что мотоциклист приезжает быстрее) и  $v_M = 49 - v_B$ , то

$$v_M = 28 \text{ км/ч} \Rightarrow x = \frac{49 - v_M}{v_M - v_B} = 3(\text{ч}) \Rightarrow S = 3 \cdot 28 \text{ км} = 84 \text{ км}$$

$$v_B = 21 \text{ км/ч}$$

Ответ: 84 км

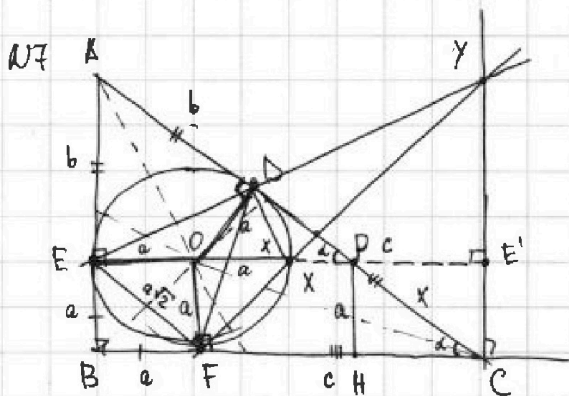
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Центр вписанной окружности  $\omega$  —  $O$  —  
 пересечение биссектрис  $\triangle ABC$ ;  
 по свойству  $AE = AD$ ;  $DC = CF$ ;  $FB = BE$

$$AD : DC = b : c = AE : FC$$

$$b = AD = AE$$

$$EX = \sqrt{2} \cdot XY$$

$$a = EB = BF = R - \text{радиус окружности}$$

$$c = FC = DC \quad (\text{r.k. } \square EBF - \text{квадрат})$$

по т. Пифагора для  $\triangle ABC$ :  $(a+b)^2 + (a+c)^2 = (b+c)^2$

$$2a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac = b^2 + 2bc + c^2$$

$$a^2 + ab + ac = bc \Rightarrow a(a+b+c) = bc$$

~~Вспомогательная конструкция: провести  $EO \parallel BF$  — продолжим  $EO$  за точку  $O$  до пересечения с  $AC$  в  $P$ ; проведем  $PH \perp FC$  в  $H$  на  $BC$ ; тогда  $\triangle POD = \triangle PHC$  (по признаку равенства прямоугол. тр.);  $OD = PH = a$ ;  $\angle PCH = \angle PDO$ ;  $\angle D = \angle H = 90^\circ$~~

~~Обозначим за  $X$  гипотенузу этих треугольников:  $X = PO = PC$~~

~~Тогда  $X + X \cos d = c \Rightarrow$~~

~~$a = X \sin d$~~

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin d} + \frac{a}{\cos d} = c \Rightarrow$$

~~$(a+b) = (b+c) \sin d$ ;  $\frac{a+b}{a+c} = \sin d \Rightarrow$~~

$$\Rightarrow \frac{a(a+b)}{(b+c)} + \frac{a(a+c)}{a+b} = c = \frac{a(a+b)^2 + (a+c)(b+c)}{(a+b)(b+c)}$$

$$+ ac + bc + c^2 \cdot \frac{1}{(a+b)(b+c)} = \frac{a}{(a+b)(b+c)} (a^2 + 3ab + ac + bc + b^2 + c^2) = c$$

$$a^3 + 3a^2b + a^2c + a^2b + ab^2 + ac^2 = cab + cb^2 + ac^2 + bc^2$$

$$a^3 + 3a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 = cab + cb^2 + ac^2 + bc^2$$

$$a+b=c \quad \text{и } \triangle$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7 (продолжение)

$X \in EE'$  по условию  $\rightarrow \triangle EFX$  - р/б; прямоугол.  $\Rightarrow EX = 2a$  - диаметр

$$XE' = a + c - 2a = c - a$$

$$\triangle EFX \sim \triangle XYE' \Rightarrow XE' = E'Y = c - a = b$$

$$XY = \sqrt{2}b \text{ - по т. Пифагора для } \triangle XYE'$$

$$EX = 2a = \sqrt{2}XY \text{ - по укл}$$

$$\sqrt{2}XY = \sqrt{2}b \cdot \sqrt{2} = 2b = 2a \Rightarrow a = b$$

$$c = a + b$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{b}{c} = \frac{a}{a+a} = \frac{1}{2}$$

Ответ: 1:2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

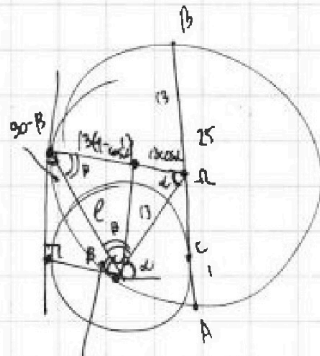
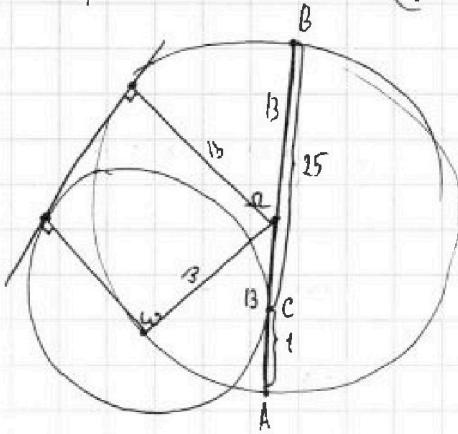
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

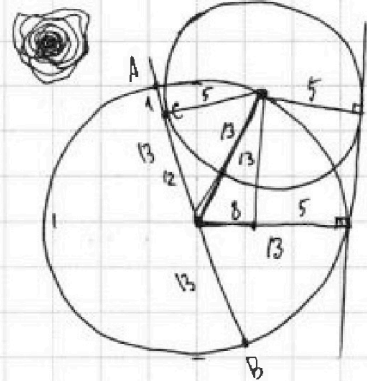


N2  $\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} = \frac{\frac{a}{b} + 1}{b \left( \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 9\left(\frac{a}{b}\right) + 1 \right)} = \frac{\frac{a}{b} + 1}{b \left( \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 9\left(\frac{a}{b}\right) + 1 \right)}$

N4



$180 - \beta - \alpha$   
 $90 - \beta + 180 - \beta - \alpha = 90$   
 $270 - 2\beta - \alpha = 90$   
 $2\beta + \alpha = 180 \checkmark$



$13 \cdot \sin d = \sqrt{169 + 64} =$

$13(1 - \cos \alpha) \cdot \sin \beta = 13 \sin d$   
 $(1 - \cos \alpha) \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \sin d$

$2 \cdot 13^2 - 2 \cos \alpha \cdot 13^2 = \ell^2 \quad \ell = 13 \sqrt{2(1 - \cos \alpha)}$

$\beta = \frac{180 - \alpha}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2}$

$\ell \cdot \sin \beta = \ell \sin(90 - \frac{\alpha}{2}) = \ell \cos \frac{\alpha}{2} = 13 \cdot \sin d$

$13 \sqrt{2(1 - \cos \alpha)} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = 13 \cdot \sin d$

$2(1 - \cos \alpha) \cdot (\cos \frac{\alpha}{2})^2 = \sin^2 d = 1 - \cos^2 d$

~~$2 \cos^2 d$~~   $\cos 2d = \cos^2 d - \sin^2 d = 2 \cos^2 d - 1$

$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos \alpha + 1}{2}$

$2(1 - \cos \alpha) \left( \frac{1 + \cos \alpha}{2} \right) = (1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)$

$1 + \cos \alpha = 1 + \cos \alpha$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a+b}{a^2+9ab+b^2} = \frac{c+1}{b(c^2-9c+1)}$$
$$c+1 = b \cdot 9$$

$$\frac{9a^2}{2} - 9ab + \frac{9b^2}{2} = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}a - \frac{3}{\sqrt{2}}b\right)^2 =$$

$$= 4,5a^2 - 9ab + 4,5b^2$$
$$a^2 - 9ab + b^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}(a-b)\right)^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 - 11ab = (a+b)^2 - 11ab$$

$$\frac{a^2 - 9ab + b^2}{a+b} = \frac{a+b}{b} = \frac{1}{b} + \frac{a}{b}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Вел.  $S$   $u_B$   $z$   
 мор.  $u_M$   $x$

**N6**

(2) - (1):

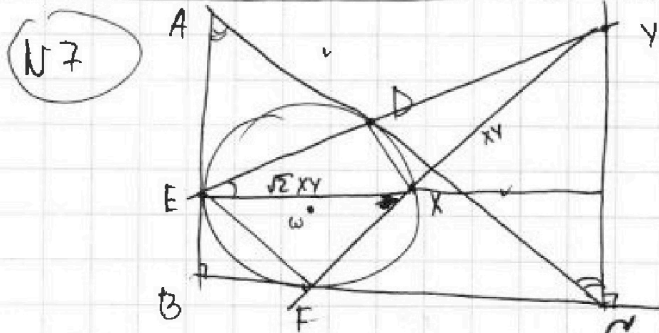
$$\begin{cases} u_B(x+1) = u_M x = S & (1) & u_M = 49 - u_B \\ u_B x + 49 = u_M(x+1) & (2) & (u_M - u_B)x = u_B \\ (u_B + 7)(y + 0.6) = (u_M + 7)y & (3) = S & (49 - 2u_B)x = u_B \end{cases}$$

$(u_B + 7)(y + 0.6) = (56 - u_B)y = (49 - u_B)x = u_B(x+1)$   $u_B = 21$   
 $u_M = 28$

$y = \frac{49 - u_B}{56 - u_B} x$   $(u_M - u_B)x = 49 - u_M$   
 $7x = 49 - 28 = 21$

$(u_B + 7) \left( \frac{49 - u_B}{56 - u_B} x + 0.6 \right) = u_B(x+1)$   $x = 3$   $S = 28 \cdot 3 = \underline{84 \text{ км}}$

$(u_B + 7) \left( (49 - u_B)x + 0.6(56 - u_B) \right) = u_B(x+1)(56 - u_B)$   
 $a + b = c$



т. косинусов  $\triangle EYX$ :

$2(XY)^2 + (XY)^2 = EY^2$   
 $2(XY)^2 + (XY)^2 + 2\cos\alpha \cdot \sqrt{2}(XY)^2 = EY^2$   
 $(a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2}XY)^2$   
 $2a^2 + 2a^2 = 2XY^2$   
 $XY = \sqrt{2}a$

N5  $5x - y = 3z$   $\frac{8}{y} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$

$8yz + xz = 15xy$

$z = \frac{15xy}{8y + x}$

$5x - y = \frac{45xy}{8y + x}$

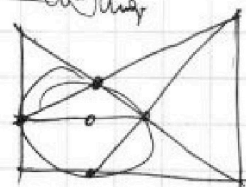
$(5x - y)(8y + x) = 45xy$

$40xy + 5x^2 - 8y^2 - xy = 45xy$

$5x^2 - 8y^2 - 6xy = 0$

$8y^2 + 6xy - 5x^2 = 0$

$y = \frac{-3x \pm \sqrt{9x^2 + 40x^2}}{8}$



$(a+b)(b+c) = ab + b^2 + ac + bc$

$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} =$

$= \frac{25x^2 - y^2 - \left(\frac{15xy}{8y+x}\right)^2}{y^2 + 3\left(\frac{15xy}{8y+x}\right)^2}$

$y^2 + 3\left(\frac{15xy}{8y+x}\right)^2$

$= \frac{(25x^2 - y^2)(8y+x)^2 - (15xy)^2}{y^2(8y+x)^2 + 3 \cdot (15xy)^2}$

$\frac{ac}{b+c} + \frac{a(a+c)}{c} = c = \frac{a(c^2 + a+c)}{(b+c)c} = c = \frac{-3x \pm 7x}{8}$

$a(c^2 + a+c) = c^2(b+c)$

$ac^2 + a^2 + ac = c^2b + c^3$

$y_1 = \frac{x}{2}$   
 $y_2 = \frac{5}{4}x$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

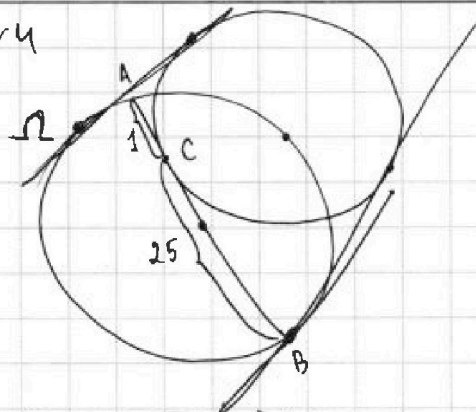
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4



$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

$$3x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 18 \Rightarrow \text{всегда выполняется}$$

$$3x^2 + x + 1 \geq 1$$

$$D = 1 - 3 \cdot 4 \Rightarrow \text{всегда}$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} = 5 - 6x + \sqrt{3x^2 + x + 1} \quad ^2$$

$$3x^2 - 5x + 6 = (5 - 6x)^2 + 2(5 - 6x)\sqrt{3x^2 + x + 1} + 3x^2 + x + 1$$

$$3x^2 - 5x + 6 = 25 - 60x + 36x^2 + 2(5 - 6x)\sqrt{3x^2 + x + 1} + 3x^2 + x + 1$$

$$36x^2 - 54x + 20 + 2(5 - 6x)\sqrt{3x^2 + x + 1} = 0$$

~~4x^2 - 27x + 10~~

$$2(18x^2 - 27x + 10)$$

$$D = 27^2 - 4 \cdot 18 \cdot 10 = 9 = 3^2$$

$$x = \frac{27 \pm 3}{2 \cdot 18} \Rightarrow x_1 = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

$$x_2 = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{5}{6} + \frac{4}{6} \quad \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3}$$

$$2(5 - 6x)\sqrt{3x^2 + x + 1} + 2 \cdot 18(x - \frac{5}{6})(x - \frac{2}{3}) = 0 \quad x^2 - \frac{9}{6}x + \frac{10}{18}$$

$$6 \cdot 2(\frac{5}{6} - x)\sqrt{3x^2 + x + 1} + 2 \cdot 18(x - \frac{5}{6})(x - \frac{2}{3}) = 0$$

$x = 5/6$  или

$$\sqrt{3x^2 + x + 1} = 3(x - \frac{2}{3}) = (3x - 2)$$

$$3x - 2 \geq 0 \quad x \geq \frac{2}{3}$$

$$3x^2 + x + 1 = (3x - 2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$$

$$6x^2 - 13x + 3 = 0$$

$$D = 169 - 18 \cdot 4 = 97$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{97}}{12} = \frac{13 \pm \sqrt{97}}{12} = \frac{13}{12} \pm \frac{\sqrt{97}}{12} = \frac{13}{12} \pm \frac{1}{4}x$$

$$\frac{23}{12} = 2\sqrt{\quad}$$

$$9 - \frac{5}{x} = \frac{15}{4} \quad \frac{45}{4} - \frac{25}{12} =$$

$$= \frac{105 - 25}{12} = \frac{80}{12} = \frac{20}{3}$$

$$\frac{25}{16} + 3 \cdot \frac{625}{144} = \frac{25}{16} \left(1 + \frac{3 \cdot 25}{9}\right) =$$

$$= \frac{25}{16} \left(\frac{9 + 75}{9}\right) = \frac{25}{16} \left(\frac{84}{9}\right) = \frac{25 \cdot 21}{4 \cdot 9} =$$

$$= \frac{25 \cdot 7}{4 \cdot 3} = \frac{25 \cdot 7}{12} \quad 3 \cdot 5,5 =$$

$$= 16,5 - 1,5 = 15$$

$$15 - 1,5 = 13,5$$

$$\frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{9}{4} = \frac{1}{4} + \frac{27}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

№3

$$\frac{225}{7}$$

2  
4  
7

$$\frac{13}{39} \cdot \frac{18}{72}$$

$$\frac{13}{169}$$

$$\frac{169}{97}$$

$$\sqrt{97}$$

$$97 \approx 10$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\cancel{(5x-y)^2(8y+x)^2} = 15(xy)^2 =$$

$$= \frac{(5x-y)(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{3z(5x+y) - z^2}{(5x)^2 - 6yz} =$$

$$y^2 + 3z^2 = (y+3z)^2 - 6yz$$

$$= \frac{3(5x+y) - z}{z} = \frac{15x + 3y - z}{25x^2 - 6yz} =$$

при  $y_1$ :

$$\frac{25x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{3z}{2}\right)^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 3(3z)^2} =$$

$$= \frac{100x^2 - x^2 - 9z^2}{x^2 + 27z^2} = \frac{90x^2}{28z^2} = \frac{90}{28} = \frac{45}{14}$$

при  $y_2$ :

$$\frac{25x^2 - \left(\frac{5x}{4}\right)^2 - \left(\frac{7z}{4}\right)^2}{\left(\frac{5x}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{7z}{4}\right)^2} = \frac{400 - 25 - (7z/11)^2}{25 + 3 \cdot (7z/11)^2} = \frac{400 - 25 - 49}{25 + 3 \cdot 49} =$$



$$= \frac{326}{172} \approx 2$$

~~при  $y_1$ :~~  
при  $y_1$ :  
 $\frac{15x \cdot x/2}{8 \cdot \frac{x}{2} + x} =$   
 $= \frac{7,5x^2}{5x} = 1,5x = z$

при  $y_2$ :  
 $\frac{15x \cdot 5/4 x}{8 \cdot \frac{5}{4} x + x} =$   
 $= \frac{75/4 \cdot x}{10x + x} = \frac{75}{44} x$

$$\frac{75}{4} \approx 7 \frac{3}{4}$$

$$\frac{400 - 25 - 49}{25 + 3 \cdot 49} = \frac{326}{172} \approx 2$$

N4

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 11ab}$$

$$= \frac{a+b}{(a-b)^2 - 7ab}$$

$$a+b = m \cdot 9$$

$$a^2 - 9ab + b^2 = m \cdot p$$

$$\frac{22}{4,5} = 81,25$$

$$\frac{a}{b} + 1$$

$$\frac{a^2 - 9ab + b^2}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{9a}{b} + 1 \cdot b =$$

$$\frac{9a}{b} = 4,5 \cdot 2 \cdot \frac{a}{b}$$

$$a^2 - 9ab + b^2 =$$

$$= a^2 - 9ab + 20,25b^2 - 19,25b^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab = 3^{14} \cdot 7^{13} \cdot p$$

$$bc = 3^{19} \cdot 7^{17} \cdot q$$

$$ac = 3^{23} \cdot 7^{42} \cdot r$$

$$p \cdot q \cdot r = 1$$

$$ab = 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$bc = 3^{19} \cdot 7^{17}$$

$$ac = 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{3^5 \cdot 7^4}$$

$$c = 3^5 \cdot 7^4 a$$

$$b = \frac{3^{14} \cdot 7^{13}}{a}$$

$$a^2 \cdot 3^5 \cdot 7^4 = 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$a = \sqrt{3^{18} \cdot 7^{38}} = 3^9 \cdot 7^{19}$$

$$c = 3^{14} \cdot 7^{23}$$

$$b = \frac{3^5 \cdot 7^4}{3^9 \cdot 7^{19}} \quad abc = \frac{3^9 \cdot 7^{19} \cdot 3^{14} \cdot 7^{23} \cdot 3^5}{7^6} = 3^{28} \cdot 7^{36}$$

WIV

1 NB

$$U_M = 49 - U_B$$

5

6

$$U_B y + 0.6 U_B + 7x + 4.2 = U_M y + 7x$$

$$(U_M - U_B) y = 0.6(U_B + 7)$$

$$(U_M - U_B) x = 49 - U_M = U_B$$

$$\frac{y}{x} = \frac{0.6(U_B + 7)}{U_B}$$

$$y = 0.6 \cdot \frac{U_B + 7}{U_B} \cdot x = \frac{49 - U_B}{56 - U_B} x$$

$$0.6(U_B + 7)(56 - U_B) = (49 - U_B)U_B$$

$$56U_B - U_B^2 + 7 \cdot 56 - 7U_B =$$

$$= -U_B^2 + 49U_B + 7 \cdot 56$$

$$-0.6U_B^2 + 0.6 \cdot 49U_B + 0.6 \cdot 7 \cdot 56 = 49U_B - U_B^2$$

$$0.4U_B^2 - 0.4 \cdot 49U_B + 0.6 \cdot 7 \cdot 56 = 0$$

$$4U_B^2 - 2 \cdot 49U_B + 21 \cdot 56 = 0$$

$$U_B^2 - 24.5U_B + 21 \cdot 56 \cdot 2 = 7^2$$

$$7 \cdot 7 - 7 \cdot 7 - 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 2 =$$

$$= 7^2(7 - 7 - 3 \cdot 8 \cdot 2) = 7^2$$

$$U_B = \frac{49 \pm 7}{2} \Rightarrow U_{B1} = 28$$

$$U_{B2} = 21$$

$$U_{M1} = 49 - 28 = 21$$

$$U_{M2} = 49 - 21 = 28 \quad \text{т.к. } U_M > U_B$$