



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



9 КЛАСС. Вариант 14

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x.$$

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .
- [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x - y = 3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$.

- [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисти на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .
- [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = \sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$$\left. \begin{array}{l} ab = 3^{14} \cdot 7^{13} \cdot p \\ bc = 3^{19} \cdot 7^{17} \cdot q \\ ac = 3^{23} \cdot 7^{42} \cdot r \end{array} \right\} \text{но условие, где } p, q, r - \text{целые положительные числа}$$
$$p, q, r \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} abc &= \sqrt{a^2 b^2 c^2} = \sqrt{3^{14} \cdot 7^{13} \cdot p \cdot 3^{19} \cdot 7^{17} \cdot q \cdot 3^{23} \cdot 7^{42} \cdot r} = \\ &= \sqrt{3^{56} \cdot 7^{72}} \cdot \sqrt{pqr} = 3^{28} \cdot 7^{36} \sqrt{pqr} \end{aligned}$$

при $p=1; q=1; r=1$ условие соблюдается:

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{3^5 \cdot 7^4} \quad ac = \frac{c^2}{3^5 \cdot 7^4} = 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$c = 3^{14} \cdot 7^{23} \quad a = 3^9 \cdot 7^{19} \quad b = \frac{3^{14} \cdot 7^{13}}{a} = 3^5 \cdot 7^6$$

такая ситуация возможна

т.к. $abc = 3^{28} \cdot 7^{36} \sqrt{pqr}$, наименьшее abc достигается при наименьшем \sqrt{pqr} , которая, в свою очередь, достигается при $p=1, q=1, r=1$; тогда $\sqrt{pqr}=1$, а $abc = 3^{28} \cdot 7^{36}$

Ответ: $3^{28} \cdot 7^{36}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} = \frac{\frac{a}{b} + 1}{b\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 9\frac{a}{b} + 1\right)} \quad a \in \mathbb{N} \quad b \in \mathbb{N}$$

$$\text{Обозначим } \frac{a}{b} = c, \text{ тогда } \frac{c+1}{b(c^2 - 9c + 1)} = \frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2}$$

Если дробь $\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2}$ можно сократить на m , значит

дробь $\frac{a^2 - 9ab + b^2}{a+b}$ также можно сократить на m

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2 - 11ab}{a+b} = a+b - \frac{11ab}{a+b} \Rightarrow \frac{11ab}{a+b} - \text{сократимая дробь}$$

т.к. дробь $\frac{a}{b}$ - несократима, $\text{HOD}(a, b) = 1 \Rightarrow$

$$\frac{ab}{a+b} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{ab}{a+b} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \Rightarrow 11 \frac{ab}{a+b} = \frac{11}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} - \text{сократимая дробь} \Rightarrow$$

\Rightarrow наибольшее число, на которое можно сократить данную дробь - 11, значит наибольшее $m = 11$

Ответ: 11

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} = \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

$$3x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

$$3x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \Delta = 25 - 4 \cdot 18 < 0 \Rightarrow \text{всегда положительно}$$

$$3x^2 + x + 1 \geq 0$$

~~$$3x^2 + x + 1 = 0 \quad \Delta = 1 - 4 \cdot 3 < 0 \Rightarrow \text{всегда положительно}$$~~

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} = 5 - 6x + \sqrt{3x^2 + x + 1} \quad |^2$$

$$3x^2 - 5x + 6 = (5 - 6x)^2 + 2(5 - 6x)\sqrt{3x^2 + x + 1} + 3x^2 + x + 1$$

$$3x^2 - 5x + 6 - 25 + 60x - 36x^2 - 3x^2 - x - 1 = 2(5 - 6x)\sqrt{3x^2 + x + 1}$$
$$-36x^2 + 54x - 20 = 2(5 - 6x)\sqrt{3x^2 + x + 1}$$

$$-36x^2 + 54x - 20 = -2(18x^2 - 27x + 10)$$

$$18x^2 - 27x + 10 = 0$$

$$X = \frac{27 \pm \sqrt{27^2 - 40 \cdot 18}}{2 \cdot 18} = \frac{27^2 = 3^6 = 729}{40 \cdot 18 = 720}$$

$$= \frac{27 \pm 3}{2 \cdot 18} = \frac{\sqrt{729 - 720} = 3}{3}$$

$$X_1 = \frac{27 + 3}{2 \cdot 18} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6} \quad \left\{ \begin{array}{l} -36x^2 + 54x - 20 = -2 \cdot 18 \left(x - \frac{5}{6} \right) \left(x - \frac{2}{3} \right) \end{array} \right.$$

$$X_2 = \frac{27 - 3}{2 \cdot 18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \quad \left. \begin{array}{l} -36x^2 + 54x - 20 = -2 \cdot 18 \left(x - \frac{5}{6} \right) \left(x - \frac{2}{3} \right) \end{array} \right.$$

$$-2 \cdot 18 \left(x - \frac{5}{6} \right) \left(x - \frac{2}{3} \right) = 2(5 - 6x) \sqrt{3x^2 + x + 1}$$

$$3(5 - 6x) \left(x - \frac{2}{3} \right) = (5 - 6x) \sqrt{3x^2 + x + 1} \quad | : (5 - 6x), \text{ тогда } x = \frac{5}{6}, \text{ либо:}$$

$$(3x - 2) = \sqrt{3x^2 + x + 1}, \quad 3x - 2 \geq 0 \quad x \geq 2/3, \quad |^2$$

$$(3x - 2)^2 = 3x^2 + x + 1$$

$$9x^2 - 12x + 4 = 3x^2 + x + 1$$

$$6x^2 - 13x + 3 = 0$$

$$\Delta = 169 - 4 \cdot 18 = 97$$

$$X = \frac{13 \pm \sqrt{97}}{12} \quad X_1 = \frac{13 + \sqrt{97}}{2} > \frac{2}{3} \Rightarrow \text{не годно.}$$

$$X_2 = \frac{13 - \sqrt{97}}{2} = \frac{13 - 10}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{не годно, потому что}$$

$$\frac{13 - 9}{12} = \frac{1}{3} > x_2$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{5}{6}; \frac{13 + \sqrt{97}}{12} \right\}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

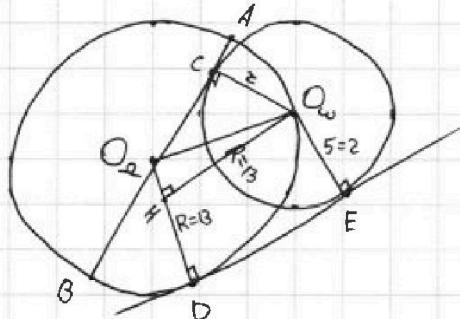
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.



Центр окружностей $\Omega \cup \omega$ —
 $O_\Omega \cup O_\omega$ соответственно

По условию $AC=1$; $BC=25 \Rightarrow$
 $AC+BC=1+25=26$ — диаметр Ω \Rightarrow
 $R=13$ — радиус Ω

Точки касания общей касательной к окружностям $\Omega \cup \omega$ —
 $D \cup E$ соответственно

$$\text{Тогда } O_\alpha D = O_\alpha O_\omega = 13$$

(AB)-касательная к $\omega \Rightarrow O_\omega C \perp AB$; $O_\omega C=r$ — радиус ω

$$O_\alpha C = R - AC = 12$$

Рассмотрим $\triangle O_\omega O_\alpha C$: прямугольный; $O_\omega C=r$
 $O_\omega O_\alpha = 13=R$ $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow$
 $O_\alpha C = 12$

$$\Rightarrow \text{по т. Пифагора } r = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 = O_\omega E$$

$O_\alpha D \perp (ED)$; $O_\omega E \perp (ED) \Rightarrow O_\alpha D \parallel O_\omega E \Rightarrow EO_\omega O_\alpha D$ — прямут. \Rightarrow трапеция

$$\Rightarrow [ED] = h$$

Проведем $O_\omega H \parallel ED$ $H \in O_\alpha D$ — высота трапеции

$$\text{по т. Пифагора для } \triangle O_\alpha HO_\omega: O_\omega H = \sqrt{O_\alpha O_\omega^2 - O_\alpha H^2} = \\ = \sqrt{R^2 - (R-r)^2} = \sqrt{13^2 - (13-5)^2} = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{169-64} = \sqrt{105} = ED$$

- общая касательная к окружностям

Ответ: $\sqrt{105}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

$$\begin{cases} 5x - y = 37 \quad (1) \\ \frac{8}{y} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \end{cases} \quad | \cdot xy$$

$$8yz + xz = 15xy \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} &= \frac{(5x-y)(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = \\ &= \frac{3z(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = z \cdot \frac{3(5x+y) - z}{y^2 + 3z^2} \end{aligned}$$

$$\text{из } (2): z = \frac{15xy}{8y+x}$$

$$\text{из } (1): z = \frac{5x-y}{3}$$

$$45xy = 40xy + 5x^2 - 8y^2 - xy$$

$$5x^2 - 8y^2 - 6xy = 0$$

$$8y^2 + 6xy - 5x^2 = 0$$

$$\Delta = 9x^2 + 40x^2 = (7x)^2$$

$$y = \frac{-3x \pm 7x}{8}$$

$$y_1 = -\frac{5}{4}x \quad y_2 = \frac{x}{2}$$

$$\text{при } y_1: z_1 = \frac{5x-y}{3} = \frac{5x + \frac{5}{4}x}{3} =$$

$$= \boxed{\frac{25}{12}x = z_1}$$

$$\text{при } y_2: z_2 = \frac{5x-y_2}{3} = 1.5x$$

Поставим полученное значение
переменных в первое уравнение:

(x_1, y_1, z_1):

$$\begin{aligned} \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} &= 25x^2 - \left(-\frac{5}{4}x\right)^2 - \left(\frac{25}{12}x\right)^2 = \\ &= \frac{25}{12} \cdot \frac{3(5+(-\frac{5}{4})) - \frac{25}{12}}{(-\frac{5}{4})^2 + 3(\frac{25}{12})^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{25}{12} \cdot \frac{\frac{45}{4} - \frac{25}{12}}{\frac{25}{16} + 3 \cdot \frac{625}{144}} = \frac{25}{12} \cdot \frac{20/3}{25/12 \cdot 7} = \frac{20}{21}$$

(x_1, y_2, z_2):

$$\begin{aligned} \frac{1.5x \cdot (3(5+4_2)x - 1.5x)}{(\frac{x}{2})^2 + 3(1.5x)^2} &= \frac{1.5(16.5 - 1.5)}{\frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{9}{4}} = \\ &= \frac{22.5}{7} > \frac{20}{21} \rightarrow \frac{20}{21} - \text{наим. знаг.} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{20}{21}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

	S, км	v, км/с	t, с
Мотоцикл.	s	v_m	x
Велосипед.	s	v_b	$x+1$

Также по условию:

$$v_b \cdot x + 49 = v_m (x+1)$$

$$(v_b + 7)(y + 0,6) = \cancel{(v_m + 7)} (v_m + 7)y = s$$

s - расстояние между А и В; v_m - скорость мотоциклиста в I случае,
 v_b - скорость велосипедиста в I случае, x - время, затраченное
мотоциклистом на путь в I случае; y - время, затраченное
мотоциклистом на путь во II случае

Согласно условию составим систему уравнений:

$$\begin{cases} (1) v_m \cdot x = v_b \cdot (x+1) = s \\ (2) v_b \cdot x + 49 = v_m (x+1) \\ (3) (v_b + 7)(y + 0,6) = (v_m + 7)y = s \end{cases}$$

$$(2) - (1): 49 - v_b = v_m$$

$$\begin{aligned} (v_m + 7)y &= v_m \cdot x \\ (56 - v_b)y &= (49 - v_b)x \\ \frac{x}{y} &= \frac{56 - v_b}{49 - v_b} \end{aligned}$$

$$(v_b + 7)(y + 0,6) = v_b y + 0,6 v_b + 7y + 4,2 = (v_m + 7)y = v_m y + 7y$$

$$\begin{aligned} (v_m - v_b)y &= 0,6(v_b + 7) \\ (v_m - v_b)x &= (49 - v_m) = v_b \\ \frac{y}{x} &= \frac{0,6(v_b + 7)}{v_b} = \frac{49 - v_b}{56 - v_b} \end{aligned}$$

$$0,6(v_b + 7)(56 - v_b) = (49 - v_b)v_b$$

$$-0,6v_b^2 + 0,6 \cdot 49v_b + 0,6 \cdot 7 \cdot 56 = 49v_b - v_b^2 \Rightarrow 0,4v_b^2 - 0,4 \cdot 49v_b + 0,6 \cdot 7 \cdot 56 = 0$$
$$\Delta = 49^2 - 2 \cdot 56 \cdot 2 = 7^2 \quad 2v_b^2 - 2 \cdot 49v_b + 3 \cdot 7 \cdot 56 = 0$$

$$v_b = \frac{49 \pm 7}{2} \quad v_{b1} = 21 \text{ км/с}$$

$v_{b2} = 28 \text{ км/с}$ т.к. по условию $v_m > v_b$ (из-за того
мотоциклист приезжает быстрее) $\therefore v_m = 49 - v_b$, то

$$v_m = 28 \text{ км/с} \Rightarrow x = \frac{49 - v_m}{v_m - v_b} = 3(2) \Rightarrow S = 3 \cdot 28 \text{ км} = 84 \text{ км} \quad \text{Ответ: } 84 \text{ км}$$

$$v_b = 21 \text{ км/с}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

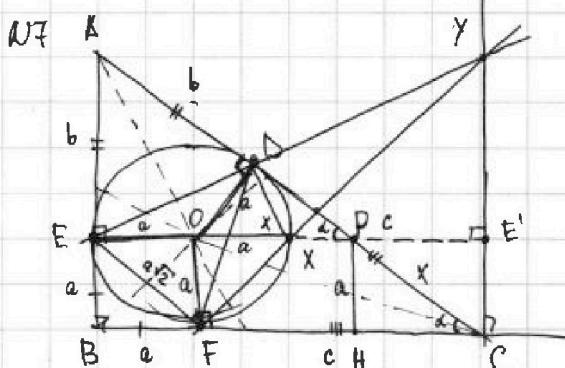
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Центр вписанной окружности ω — точка пересечения биссектрис $\triangle ABC$;
по свойству $AE = AD$; $DC = CF$; $FB = BE$

$$AD : DC = b : c = AE : FC$$

$$b = AD = AE \quad EX = \sqrt{2} XY$$

$a = EB = BF = R$ — радиус окружности
 $c = FC = DC$ (т.к. $\triangle EBF$ — равнобедренный)

по т. Пифагора для $\triangle ABC$: $(a+b)^2 + (a+c)^2 = (b+c)^2$
 $2a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac = b^2 + 2bc + c^2$
 $a^2 + ab + ac = bc \Rightarrow a(a+b+c) = bc$

Доказательство прямого следствия из теоремы о сумме углов в треугольнике

Видим $EO \parallel BF$ — продолжим $[EO]$ за точку O до пересечения с (CY)
 $(EO) \cap (CY) = E'$, $\angle E' = 90^\circ$; $EE' \cap CD = P$; проведем $PH \perp FC$ в EFC
Тогда $\triangle POD = \triangle PHC$ (по признаку равенства прямых угл.)
 $OD = PH = a$ $\angle PCH = \angle DPO$ $\angle D = \angle H = 90^\circ$

Обозначим за x ипотензую этих треугольников: $x = PO = PC$

Тогда $x + x \cos \alpha = c \Rightarrow$

$$a = x \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin \alpha} + \frac{a}{\tan \alpha} = c \Rightarrow \cancel{\frac{a \sin \alpha + a \cos \alpha}{\sin \alpha}} = \cancel{\frac{a \sin \alpha + a \cos \alpha}{\cos \alpha}} \Rightarrow$$

$$(a+b) = (b+c) \sin \alpha; \frac{a+b}{a+c} = \tan \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a(a+b)}{(b+c)} + \frac{a(a+c)}{a+b} = c = \frac{a((a+b)^2 + (a+c)(b+c))}{(a+b)(b+c)} = a(a^2 + 2ab + b^2 + ab +$$

$$+ ac + bc + c^2) \cdot \frac{1}{(a+b)(b+c)} = \frac{a}{(a+b)(b+c)} (a^2 + 3ab + ac + bc + b^2 + c^2) = c$$

$$a^3 + 3a^2b + a^2c + a^2b + ab^2 + ac^2 = cab + cb^2 + ac^2 + bc^2$$

$$a^2b + c^2 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7 (прогрессивное)

$X \in EE'$ по теорему $\rightarrow \triangle EFK - \text{р/б} ; \text{пропорц.} \Rightarrow EX = 2a - \text{диаметр}$

$$XE' = a + c - 2a = c - a$$

$$\triangle EFX \sim \triangle XYE' \Rightarrow XE' = E'Y = c - a = b$$

$XY = \sqrt{2}b$ - по т. Пифагора где $\triangle XYE'$

$$EX = 2a = \sqrt{2}XY - \text{по ул}$$

$$\sqrt{2}XY = \sqrt{2}b \cdot \sqrt{2} = 2b = 2a \Rightarrow a = b$$

$$c = a + b$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{b}{c} = \frac{a}{a+a} = \frac{1}{2}$$

Ответ: 1:2

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



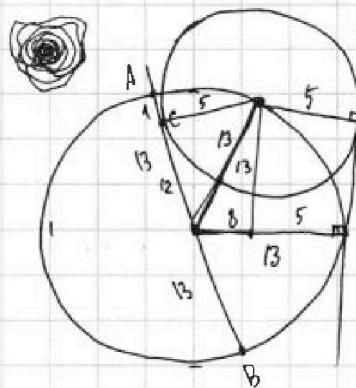
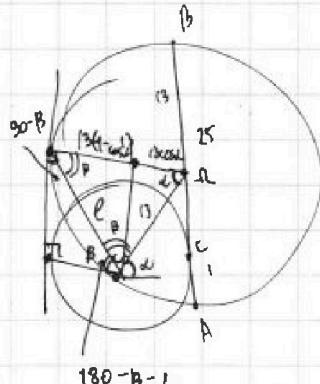
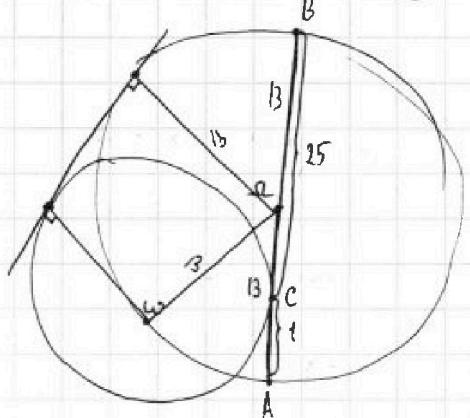
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N2 \quad \frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} = \frac{\frac{a}{b} + 1}{b \left(\left(\frac{a}{b} \right)^2 - 9 \left(\frac{a}{b} \right) + 1 \right)} = \frac{\frac{a}{b} + 1}{b}$$

N4



$$13 \cdot \sin \alpha \cdot \sqrt{169 + 64} =$$

$$13(1 - \cos \alpha) \cdot \sin \alpha = 13 \sin \alpha$$

$$90\beta + 180 - \beta - d = 90$$

$$270 - 2\beta - d = 90$$

$$2\beta + d = 180 \checkmark$$

$$2 \cdot 13^2 - 2 \cos \alpha \cdot 13^2 = l^2 \quad l = 13 \sqrt{2(1 - \cos \alpha)}$$

$$\beta = \frac{180 - d}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2}$$

$$l \cdot \sin \beta = l \sin(90 - \frac{\alpha}{2}) = l \cos \frac{\alpha}{2} = 13 \cdot \sin \alpha$$

$$13 \sqrt{2(1 - \cos \alpha)} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = 13 \cdot \sin \alpha$$

$$2(1 - \cos \alpha) \cdot (\cos \frac{\alpha}{2})^2 = \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

~~$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$~~

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos \alpha + 1}{2}$$

$$2(1 - \cos \alpha) \left(\frac{1 + \cos \alpha}{2} \right) = (1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)$$

$$1 + \cos \alpha = 1 + \cos \alpha$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{c+1}{b(c^2-9c+1)}$$

$c+1 = b \cdot 9$

$$\frac{9a^2-9ab+b^2}{2} \quad \text{Числитель}$$

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}}a - \frac{3}{\sqrt{2}}b\right)^2 =$$

$$= 9 \cdot 5a^2 - 9ab + 4,5b^2$$

$$a^2-9ab+b^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}(a-b)^2\right)$$

$$a^2+2ab+b^2-11ab = (a+b)^2-11ab$$

$$\frac{a^2-9ab+b^2}{a+b} = f + g$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{ll} \text{вел.} & S \\ & \frac{5}{U_B} \\ \text{мат.} & \frac{5}{U_M} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \frac{x}{x+1} \\ & x \end{array}$$

(N6V)

(2) - (1) :

$$\begin{cases} U_B(x+1) = U_M x = S - ? \quad (1) \\ U_B x + U_B = U_M(x+1) \quad (2) \\ (U_B + 7)(y + 0.6) = (U_M + 7)y \quad (3) = S \end{cases}$$

$$\begin{aligned} U_M &= 49 - U_B \\ (U_B - U_M)x &= U_B \\ (49 - 2U_B)x &= U_B \\ (49 - 2U_B)x &= U_B \end{aligned}$$

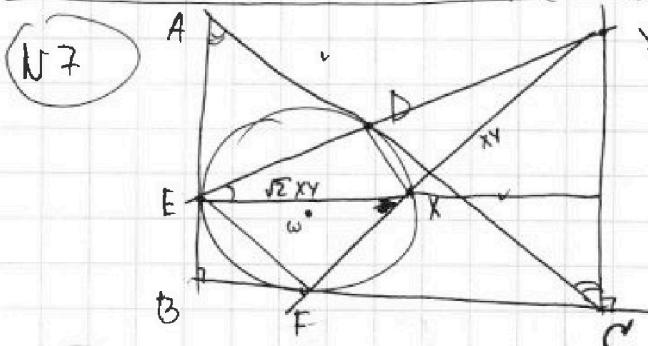
$$(U_B + 7)(y + 0.6) = (56 - U_B)y = (49 - U_B)x = U_B(x+1) \quad U_B = 21 \\ U_M = 28$$

$$y = \frac{49 - U_B}{56 - U_B} x \quad (U_M - U_B)x = 49 - U_M$$

$$7x = 49 - 28 = 21$$

$$(U_B + 7) \left(\frac{49 - U_B}{56 - U_B} x + 0.6 \right) = U_B(x+1) \quad x = 3 \quad S = 28 \cdot 3 = \underline{\underline{84 \text{ км}}}$$

$$(U_B + 7)((49 - U_B)x + 0.6(56 - U_B)) = U_B(x+1)(56 - U_B)$$



т. косинусов $\triangle EYX$:

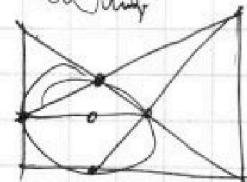
$$2(xy)^2 + (xy)^2$$

$$2(xy)^2 + (xy)^2 + 2\cos\alpha \cdot \sqrt{2}(xy)^2 = EY^2$$

$$(a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2}xy)^2$$

$$2a^2 + 2a^2 = 2xy^2$$

$$xy = \sqrt{2}a$$



$$N5 \quad 5x - y = 3z \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$8yz + xz = 15xy$$

$$z = \frac{15xy}{8y+x}$$

$$5x - y = \frac{45xy}{8y+x}$$

$$(5x-y)(8y+x) = 45xy$$

$$40xy + 5x^2 - 8y^2 - xy = 45xy \quad (a+b)(b+c) = ab + b^2 + ac + bc$$

$$5x^2 - 8y^2 - 6xy = 0$$

$$8y^2 + 6xy - 5x^2 = 0$$

$$y = \frac{-3x \pm \sqrt{9x^2 + 40x^2}}{8} =$$

$$(a+b)(b+c) =$$

$$ab + b^2 + ac + bc = ab + b^2 + ac + bc$$

$$\begin{aligned} & (25x^2 - y^2)(8y+x)^2 - (15xy)^2 \\ & y^2(8y+x)^2 + 3 \cdot (15xy)^2 \end{aligned}$$

$$(5x-y)(8y+x) = 45xy$$

$$40xy + 5x^2 - 8y^2 - xy = 45xy$$

$$5x^2 - 8y^2 - 6xy = 0$$

$$8y^2 + 6xy - 5x^2 = 0$$

$$y = \frac{-3x \pm \sqrt{9x^2 + 40x^2}}{8} =$$

$$\frac{ac}{b+c} + a \frac{(a+c)}{c} = c = \frac{a(c^2 + a + c)}{(b+c)c} = c = \frac{-3x \pm 7x}{8}$$

$$\begin{cases} y_1 = x/2 \\ y_2 = -5/4 x \end{cases}$$

$$a(c^2 + a + c) = c^2(b + c)$$

$$ac^2 + a^2 + ac = c^2b + c^3$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

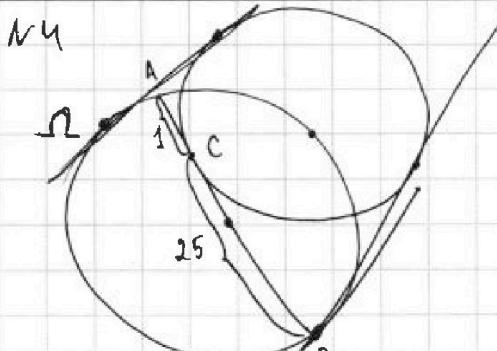
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

$$3x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

$$\delta = 25 - 4 \cdot 18 \Rightarrow \text{внеш вспомогатель}$$

$$3x^2 + x + 1 \geq 1$$

$$\delta = 1 - 3 \cdot 4 \Rightarrow \text{внеш}$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} = 5 - 6x + \sqrt{3x^2 + x + 1} \quad ^2$$

$$3x^2 - 5x + 6 = (5 - 6x)^2 + 2(5 - 6x)\sqrt{3x^2 + x + 1} + 3x^2 + x + 1$$

$$3x^2 - 5x + 6 = 25 - 60x + 36x^2 + 2(5 - 6x)\sqrt{3x^2 + x + 1} + 3x^2 + x + 1$$

$$36x^2 - 54x + 20 + 2(5 - 6x)\sqrt{3x^2 + x + 1} = 0$$

4 уравнения

$$2(18x^2 - 27x + 10) \quad 27 = 3^3 \Rightarrow 3^6 = 729$$

$$\delta = 27^2 - 4 \cdot 18 \cdot 10 = 9 = 3^2 \quad 81 \quad 243$$

$$x = \frac{27 \pm 3}{2 \cdot 18} \Rightarrow x_1 = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

$$x_2 = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \quad \frac{5}{6} + \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 2}{3}$$

$$2(5 - 6x)\sqrt{3x^2 + x + 1} + 2 \cdot 18\left(x - \frac{5}{6}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) = 0 \quad x^2 - \frac{9}{6}x + \frac{10}{18}$$

$$6 \cdot 2\left(\frac{5}{6} - x\right)\sqrt{3x^2 + x + 1} + 2 \cdot 18 \overset{(1)}{\left(x - \frac{5}{6}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)} = 0$$

$$x = \frac{5}{6} \text{ или}$$

$$\sqrt{3x^2 + x + 1} = 3\left(x - \frac{2}{3}\right) = (3x - 2)$$

$$3x - 2 \geq 0 \quad x \geq \frac{2}{3} \quad \sqrt{97}$$

$$97 \approx 10$$

$$6x^2 - 13x + 3 = 0$$

$$\delta = 169 - 18 \cdot 4 = 97$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{97}}{12} = \frac{13 \pm \sqrt{97}}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \times$$

$$\boxed{\frac{23}{72} = 2} V$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(5x-y)^2(8y+x)^2 = 15(xy)^2 =$$

$$= \frac{(5x-y)(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{3z(5x+y) - z^2}{(5x)^2 - 6yz} =$$

$$y^2 + 3z^2 = (y+3z)^2 - 6yz$$

$$= \frac{3(5x+y) - z}{z} = \frac{15x + 3y - z}{25x^2 - 6yz} =$$

~~нр 1~~

~~нр 2~~ при y_1 :

$$\frac{15x \cdot x/2}{8 \cdot \frac{x}{2} + x} = \frac{7,5x^2}{5x} = \frac{1,5x}{1} = z$$

при y_2 :

$$\frac{15x \cdot 5/4 x}{8 \cdot \frac{5}{4} x + x} =$$

$$= \frac{75/4 \cdot x}{10x + x} = \frac{75}{44} x$$

при y_1 :

$$\frac{25x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{3x}{2}\right)^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{3x}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{100x^2 - x^2 - 9x^2}{x^2 + 27x^2} = \frac{90x^2}{28x^2} = \boxed{\frac{90}{28}} = \boxed{\frac{45}{14}}$$

при y_2 :

$$\frac{25x^2 - \left(\frac{5x}{4}\right)^2 - \left(\frac{75}{44}x\right)^2}{\left(\frac{5x}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{75}{44}x\right)^2} = \frac{400 - 25 - (75/11)^2}{25 + 3 \cdot (75/11)^2} =$$

$$\frac{400 - 25 - 49}{25 + 3 \cdot 49} =$$

$$= \frac{326}{172} \approx 2$$

$$\frac{75}{4} \approx 7 \quad \frac{75}{44} \approx 1,7 \quad \frac{25}{172} \approx 0,147$$

N4

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$a^4 - 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 11ab}$$

$$= \frac{a+b}{(a-b)^2 - 7ab}$$

$$a+b = m \cdot q$$

$$\frac{a}{b} + 1$$

$$\frac{a^2 - 9ab + b^2}{b} = \frac{a}{b} + 1$$

$$=$$

$$\frac{9a}{b} = 4,5 \cdot 2 \cdot \frac{a}{b}$$

$$4,5 \approx 5$$

$$a^2 - 9ab + b^2 =$$

$$= a^2 - 9ab + 20,25b^2 - 19,25b^2$$

$$81 \cdot 25$$

$$\frac{225}{45} = 24,25$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = 3^{14} \cdot 7^{13} \cdot p$$

$$bc = 3^{19} \cdot 7^{17} \cdot q$$

$$ac = 3^{23} \cdot 7^{42} \cdot r$$

$$abc = \sqrt{3^{14} \cdot 7^{13} \cdot p \cdot 3^{19} \cdot 7^{17} \cdot q \cdot 3^{23} \cdot 7^{42}}$$

$$\text{нрн } p, q, r = 1$$

$$ab = 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$bc = 3^{19} \cdot 7^{17}$$

$$ac = 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{3^5 \cdot 7^4}$$

$$c = 3^5 \cdot 7^4 a$$

$$b = \frac{3^{14} \cdot 7^{13}}{a}$$

$$a^2 \cdot 3^5 \cdot 7^4 = 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$a = \sqrt{3^{18} \cdot 7^{38}} = 3^9 \cdot 7^{19}$$

$$c = 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$b = \frac{3^{14} \cdot 7^{13}}{7^6} \quad abc = \frac{3^9 \cdot 7^{19} \cdot 3^{14} \cdot 7^{13} \cdot 3^5}{7^6} = 3^{28} \cdot 7^{36}$$

№1

1 16
3
5

$$U_M = 49 - U_B$$

$$U_B - U_M \quad (U_M - U_B) y = 0,6(U_B + 7)$$

$$(U_M - U_B) x = 49 - U_M = U_B$$

$$\frac{y}{x} = \frac{0,6(U_B + 7)}{U_B}$$

$$y = 0,6 \cdot \frac{U_B + 7}{U_B} \quad x = \frac{49 - U_B}{56 - U_B}$$

$$0,6(U_B + 7)(56 - U_B) = (49 - U_B)U_B$$

$$56U_B - U_B^2 + 7 \cdot 56 - 7U_B = \\ = -U_B^2 + 49U_B + 7 \cdot 56$$

$$-0,6U_B^2 + 0,6 \cdot 49U_B + 0,6 \cdot 7 \cdot 56 = 49U_B - U_B^2$$

$$0,4U_B^2 - 0,4 \cdot 49U_B + 0,6 \cdot 7 \cdot 56 = 0$$

$$40U_B^2 - 2 \cdot 49U_B + 21 \cdot 56 = 0$$

$$U_B^2 = 21 \quad 0 = 49^2 - 4 \cdot 21 \cdot 56 \cdot 2 = 7^2$$

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 - 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 2 =$$

$$= 7^2(7 \cdot 7 - 3 \cdot 8 \cdot 2) = 7^2$$

$$U_B = \frac{49 \pm 7}{2} \Rightarrow U_{B1} = 28 \\ U_{B2} = 21$$

$$U_{M1} = 49 - 28 = 21$$

$$U_{M2} = 49 - 21 = 28 \quad \text{т.к. } U_M > U_B$$