



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 9 КЛАСС. Вариант 14

1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{14}7^{13}$ ,  $bc$  делится на  $3^{19}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $3^{23}7^{42}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC = 1$  и  $BC = 25$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$5x - y = 3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения  $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисти на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 36 минут позже ~~велосипедиста~~. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .

*мотоциклиста*

7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX = \sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD : DC$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№

$$a^2 b^2 c \cdot ac \geq 3^{14} \cdot 7^{13} \cdot 3^{19} \cdot 7^{17} \cdot 3^{23} \cdot 7^{42} \geq 3^{56} \cdot 7^{72}$$

$$a^2 b^2 c^2 = (abc)^2 \geq 3^{56} \cdot 7^{72}$$

$$abc \geq \pm \sqrt{3^{56} \cdot 7^{72}}$$

~~abc~~ Т.к.  $a, b$  и  $c$  - натуральные, то  $abc > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow abc \geq + \sqrt{3^{56} \cdot 7^{72}} = 3^{28} \cdot 7^{36}$$

Ответ:  $3^{28} \cdot 7^{36}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1



3



4



5



6



7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N<sub>2</sub>

Т.к. m - это MOP ( $a+b$ ;  $a^2-9ab+b^2$ ), то если

мы перевернем дробь  $\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$ , то m не изм. Тогда

$$\frac{a^2-9ab+b^2}{a+b} = a-10b + \frac{11b^2}{(a+b)};$$

$$\begin{array}{c} \frac{a^2-9ab+b^2}{a^2+ab} \mid a+b \\ -10ab+b^2 \\ -10ab-10b \\ \hline 11b^2 \end{array}$$

Т.к.  $\frac{a}{b}$  - несократ. дробь, то у  
 $a$  и  $b$  ~~нек~~ MOP = 1, а значит  
 $b^2 \nmid (a+b)$ . Тогда може.

так. дроби  $\frac{11b^2}{(a+b)}$  будут 11  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{Максимальный делитель } \frac{a^2-9ab+b^2}{a+b} \text{ будет } 11 \quad \text{т.к. } (a+b) \mid 11,$$
$$11 \left( \frac{a^2-9ab+b^2}{a+b} \right) = \frac{(a+b)(a-10b)+11b^2}{(a+b)}$$

то дробь  $\vdash$  крат 11

Order: 11.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x - 1} = 5 - 6x$$

Пусть  $a = 3x^2 - 5x + 6$ , тогда  $3x^2 + x - 1 = a - 6x + 5$ ;

$$\cancel{3x^2} - \cancel{3x^2 + x - 1} = \cancel{a - 6x + 5}$$

$$a = a - 6x + 5$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{a - 6x + 5} = 5 - 6x$$

$$a + a - 6x + 6x + 5 - 5 = 2\sqrt{a^2 - 6xa + 3a}$$

$$a = \sqrt{a^2 - 6xa + 3a}$$

$$a^2 = a^2 - 6xa + 3a$$

$$6x = 5$$

$$x = \frac{5}{6}$$

$$Otb: \frac{5}{6}.$$



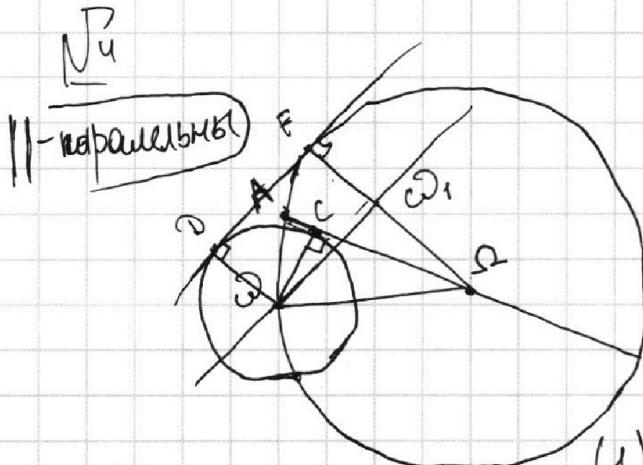
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $D$  и  $F$ -точки  
заданы окружностью  
 $\omega$  и  $\Omega$  с центрами  $O_1$  и  $O_2$   
соответственно.

$$(1) \text{ If } d(\text{parent}) = 2 \text{ then } (\text{parent}) =$$

$= 1+25=26$  (slel okp. 52), a zároveň  $p = 13$ .

$$U_3 = \omega C \Omega \text{ no TEOP. Пусть } \omega = \sqrt{r^2 - \Omega^2} = \sqrt{13^2 - (13-1)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

(2) Проверим прямую паралл.  $\Omega F$ . Пусть она пересекает  $\Omega F$  в точке  $\omega_1$ . Так это прямая

так //, то  $\angle FCO_1O = 160^\circ - \angle PFCO_1$ , как односторонний,

тогда  $\angle F\omega_1C = 160^\circ - 50^\circ = 110^\circ$ , а значит  $D\omega_1F$

- преломляющий, тк. все его углы  $= 90^\circ$  ( $\angle FPC = 90^\circ$ ), тк.

$\omega P$ - пайые б токиу даे. ;  $\angle \omega, FP = 90^\circ$ , көнк пайые

$$\text{For } \text{DCM}, \angle F\omega_1\omega = 90^\circ; \angle P\omega_2\omega_1 = 360^\circ - 90^\circ \cdot 3 =$$

$\Rightarrow \omega_1 = 5 \text{ rad/s}$

$\sum \omega_i = 13 - 5 = 8$ , и  $\Delta \omega_i, \omega$  не раб. Плоскогоря.

$$\omega\omega_1 = DF = \sqrt{\omega^2 - \omega_1^2} = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{105}$$

Offset:  $\sqrt{105}.1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N<sub>5</sub>

$$5x - 4z = 3z \quad \cancel{\text{ок}} \quad |$$

$$(1) \quad 5x = 3z + 4z \quad (x = \frac{3z + 4z}{5})$$

$$(2) \quad 25x^2 = 9z^2 + 6yz + y^2$$

$$\text{Поставимо } (2) \quad \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} =$$

$$= \cancel{\frac{(3z^2 + y^2) + 6yz + z^2 - y^2 - z^2}{(3z^2 + y^2)}} =$$

$$= \frac{(3z^2 + y^2) + 6yz + z^2 - y^2 - z^2}{(3z^2 + y^2)} =$$

$$= 1 + \frac{6z^2 - z^2 + 6yz - y^2}{3z^2 + y^2} =$$

$$= \frac{5z^2 + 6yz - y^2}{3z^2 + y^2} + 1$$

Поставимо (3):

$$1 + \frac{5z^2 + 2z^2 - \frac{z^2}{5}}{3z^2 + \frac{z^2}{5}} = \frac{62z^2}{28z^2} + 1 =$$

$$= 1 + \frac{9}{4} = 3 \frac{3}{4}$$

Поставимо (4)

$$\frac{5z^2 - \frac{18z^2}{5} - \frac{9z^2}{25}}{3z^2 + \frac{9z^2}{25}} + 1 = \frac{26z^2}{84z^2} + 1$$

$$= 1 \frac{13}{42} < 3 \frac{3}{4}$$

Отв:  $1 \frac{13}{42}$ .

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{\cancel{5}} \quad (* \text{ все члены} \\ \text{желательно делить на } 5yz)$$

$$8yz + xz = 15xy$$

$$8yz = 15xy - xz$$

$$6yz = 3 \left( \frac{15xy - xz}{4} \right)$$

$$6yz = 3x \left( \frac{15yz - z^2}{4} \right)$$

Поставимо вместо

~~$x = \frac{3z + 4z}{5}$~~   $\Rightarrow$  ~~здесь~~  $\Rightarrow$   $\frac{3z + 4z}{5}$

$$2yz = (3z + y)(15yz - z)$$

$$40yz = 45xy + 15y^2 - 3z^2$$

$$-yz$$

$$15y^2 + 4yz - 3z^2 = 0$$

$$\frac{y^2}{4} = 49z^2 = (7z)^2$$

$$(3) \quad y_1 = -2z + 7z = \left( \frac{z}{3} \right)$$

$$(4) \quad y_2 = -2z - 7z = \left( -\frac{3z}{5} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

Пусть  $x$  км/ч -  $v$  бензином (B),  
 $y$  км/ч -  $v$  моторным маслом (M)  
 $S$  км - расстояние  $AB$

Т.к. В этот раз  $v$  разные чем  $M$ , то

$$\frac{S}{x} = \frac{S}{y} + 1$$

~~Из~~ Из второго условия получаем, что

$$\frac{xS}{y} = \frac{yS}{x} - 49.$$

Из третьего условия получаем, что

$$\frac{S}{x+7} = \frac{S}{y+7} + 0,6$$

Тогда мы получаем систему:

$$\frac{S}{x} = \frac{S}{y} + 1$$

$$\frac{xS}{y} = \frac{yS}{x} - 49$$

$$\frac{S}{x+7} = \frac{S}{y+7} + 0,6$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$S = \frac{xy}{y-x}$$

$$xy = 4$$

$$S = \frac{49xy}{y^2-x^2}$$

$$121 - y-x = V.$$

$$\text{то } y^2-x^2 = V^2 + 2u$$

$$y^2-x^2 = 49(y-x)$$

$$\sqrt{a^2 - \sqrt{a^2 - 6ab + 5}} = 5 - 6b$$

$$a + a - 6b + 5 -$$
  
$$-2\sqrt{a^2 - 6ab + 5a}$$

$$2a = 2\sqrt{a^2 - 6ab + 5a}$$

~~$$4a^2 = 4a^2 - 6ab + 5a$$~~

~~$$4a - a = 5 - 6b$$~~

~~$$9b^2 - 15b + 18 - 5a + 6b = 0$$~~

~~$$9b^2 - 9b + 18 = 0$$~~

~~$$4a^2 = 4a^2 - 24ab + 20a$$~~

~~$$24ab = 20a$$~~

$$b = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$$

$$\left. \begin{aligned} S &= 0,6 \cdot (b+7)(y+7) \\ &= 0,6 \cancel{xy} + 0,6(7b+7y) + \frac{6 \cdot 49}{w} \\ &\quad \cancel{y-x} \end{aligned} \right\}$$

$$\sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} - \frac{25}{6} + 6} =$$

$$- \sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} + \frac{5}{6} + 1}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N<sub>3</sub>

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

Пусть  $a = 3x^2 - 5x + 6$ , тогда  $3x^2 + x + 1 = a - 6x + 5$ :

$$\sqrt{a} - \sqrt{a - 6x + 5} = 5 - 6x$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{a - 6x + 5})^2 = (5 - 6x)^2$$

$$a + a - 6x + 5 - 2\sqrt{a^2 - 6xa + 5a} = 25 - 60x + 36x^2$$

$$2a + 54x - 20 - 36x^2 = 2\sqrt{a^2 - 6xa + 5a}$$

$$6x^2 - 10x + 12 + 54x - 20 - 36x^2 = 44x - 30x^2 - 8$$

$$6x^2 - 4x + 7 - 36x^2 + 60x - 25 = 2\sqrt{\dots}$$

$$56x - 30x^2 - 18 = 2\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)}$$

$$28x - 15x^2 - 9 = \sqrt{\dots}$$

$$3x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$+ 5x + 21 - 3x = \sqrt{a(a + 6x - 5)}$$

$$25x^2 + 105x - 15x + 21^2 - 63x + 9x = \sqrt{a(a + 6x - 5)}$$

~~$$25x^2 + 105x - 15x^2 + 21^2 - 63x + 9x$$~~

$$(3x^2 + 6) - \frac{15}{4} = (3x^2 + \frac{15}{8})$$



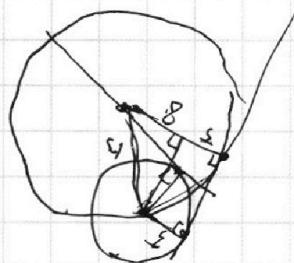
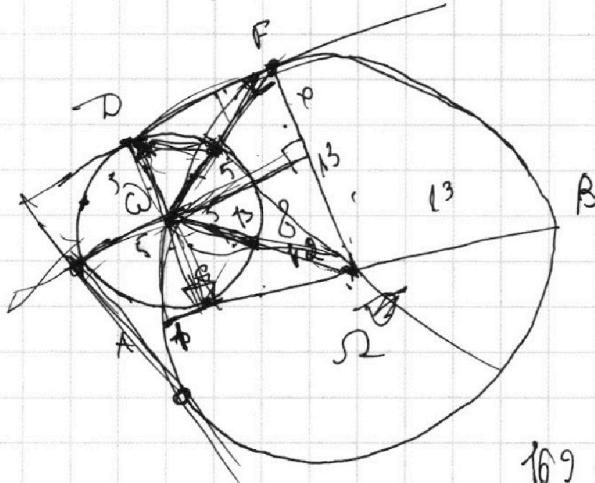
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

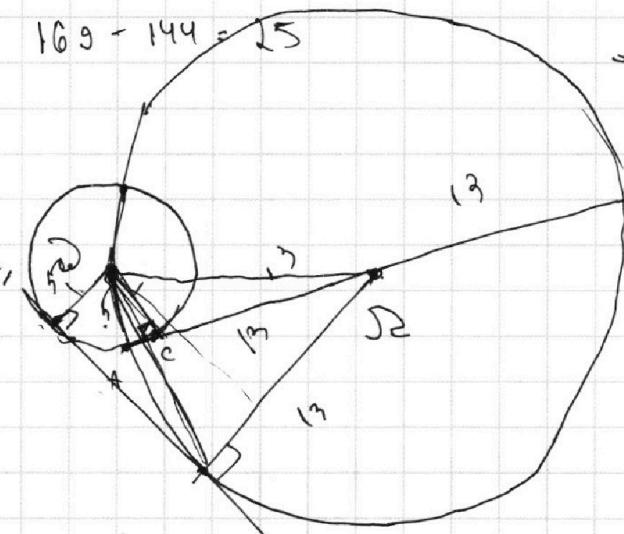
- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

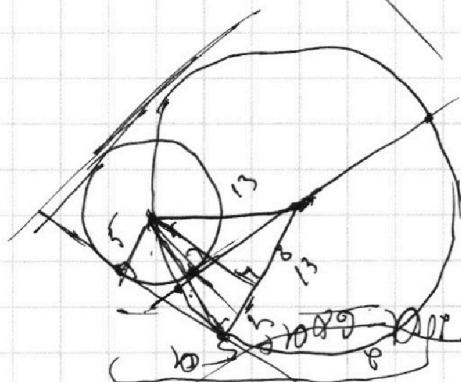
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$169 - 169 + 26x - \Delta^2 -$$



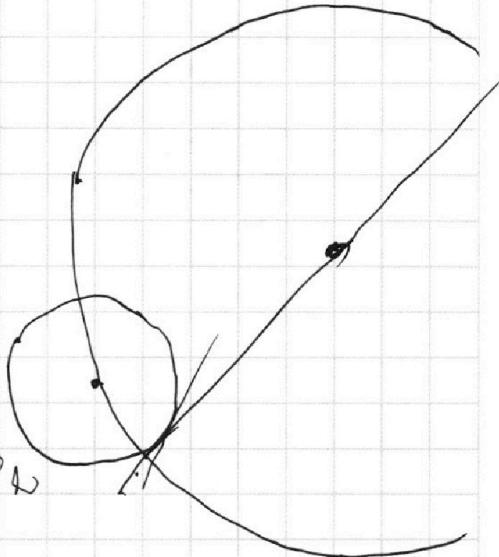
$$169 - 144 = 25$$
$$\Delta \cdot S = 50$$
$$-2Q\gamma = 39 - 69 = 85 \cdot 2$$



$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 10$$

$$5 + 90 - 10 = 85$$

5



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$8yz^2 + xz = 15xy$$

$$6yz^2 = 3 \cdot (15xy - xz)$$

$$25x^2 = y^2 + 3z^2 + 6yz$$

$$6yz^2 = 3 \cdot (3z - y)(15y - z)$$

$$1 - \frac{6yz - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$40xy = 45yz + 15y^2 - 3z^2 - 6yz$$
$$-4yz = 15y^2 - 3z^2$$

$$\frac{5z^2 + 2z^2 - \frac{y^2}{9}}{3z^2 + \frac{z^2}{9}} =$$

$$15y^2 + 4yz - 3z^2 = 0$$
$$\Delta = 16z^2 - 4z^2 + 45z^2 =$$
$$= 49z^2$$

$$= \frac{62z^2}{28z^2} = \sqrt{\frac{31}{14}}$$

$$y_1 = -\frac{2z + 7z}{15} = \frac{z}{3}$$

$$5z^2 - \frac{18z^2}{5} - \frac{9z^2}{25}$$

$$y_2 = -\frac{2z - 7z}{15} = -\frac{3z}{5}$$

$$3z^2 + \frac{9z^2}{25} =$$

=

$$= \frac{125z^2 - 90z^2 + 9z^2}{75z^2 + 9z^2}$$

$$= \frac{13z^2}{84z^2} = \frac{13}{84}$$

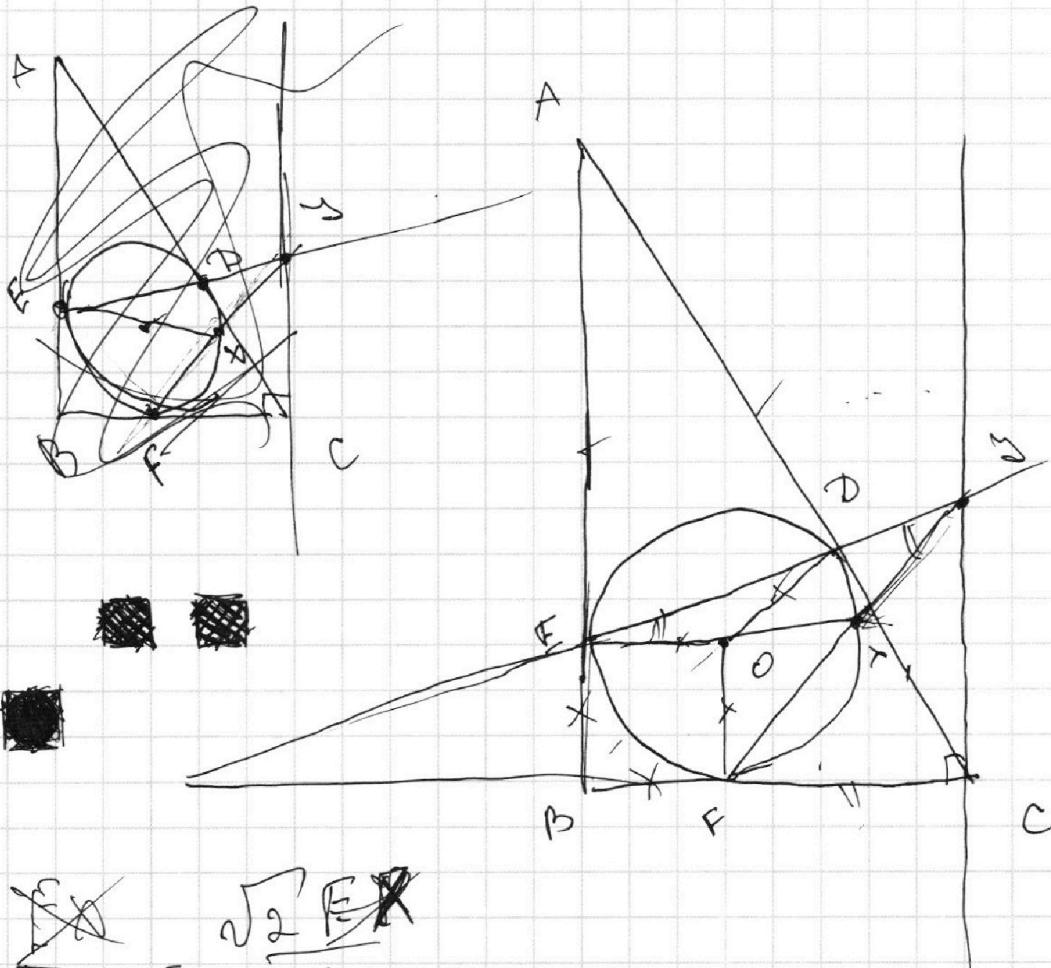
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{\sin_1}{\sin_2} = \frac{\sqrt{2} E}{\sin_2}$$

$$\frac{\sin_2}{\sin_1} > \sqrt{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!