



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 9 КЛАСС. Вариант 14

1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{14}7^{13}$ ,  $bc$  делится на  $3^{19}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $3^{23}7^{42}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC = 1$  и  $BC = 25$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$5x - y = 3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения  $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклистику на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 36 минут позже мотоциклиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .

7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX = \sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD : DC$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = 3^{19} \cdot 7^{17} k$$

$$\text{згде } k, m, p \in \mathbb{N}$$

$$bc = 3^{10} \cdot 7^{17} m$$

$$ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 = 3^{56} \cdot 7^{34} \cdot k \cdot m \cdot p$$

$$ac = 3^{23} \cdot 7^{42} p$$

$$m, n, a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{abc^2} = |abc| = abc$$

$$m, n, k, m, p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{abc^2} = \sqrt{3^{56} \cdot 7^{34} \cdot k \cdot m \cdot p} =$$

$$= 3^{28} \cdot 7^{17} \sqrt{k \cdot m \cdot p}$$

$$m, n, a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow abc \in \mathbb{N} \Rightarrow m, n 3^{28} \cdot 7^{17} \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{m \cdot n \cdot p} \in \mathbb{N}$$

$$1) \frac{ab \cdot bc}{ac} = b^2 = \frac{3^{10} \cdot k \cdot m}{7^{12} \cdot p} \Rightarrow \cancel{\frac{k \cdot m}{p}} : \cancel{3^{10}} 3^{10} \cdot k \cdot m : 7^{12} \cdot p \in \mathbb{N}$$

$$2) \frac{ab \cdot ac}{bc} = a^2 = \frac{3^{18} \cdot 7^{18} \cdot p \cdot k}{m} \Rightarrow m : 3^{18} \cdot 7^{18} \cdot p \cdot k \in \mathbb{N}$$

$$3) \frac{ac \cdot cb}{ab} = c^2 = \frac{3^{28} \cdot 7^{46} \cdot m \cdot p}{k} \Rightarrow k : 3^{28} \cdot 7^{46} \cdot m \cdot p \in \mathbb{N}$$

Чт 1-20 выразим m-k-m-p в терминах k, m, p

$$\text{так } k \cdot m = 7^{12}; p = 7^{10} \quad (\text{так } k, m, p \in \mathbb{N})$$

$$k \cdot m = 7^{12} \text{ т.к. } 7^{10} \nmid 7^{12}, \quad p = 7^{10} \text{ так } k \cdot m \nmid 7^{12} \nmid 7^{10}$$

$$p = 1 \text{ т.к. тогда } b^2 = \frac{3^{10}}{p} \text{ и } p \text{-миним}$$

Чт 2-20 будем смотреть на то что m-k = 7^n подходит т.к. m \leq 7^{12}

$$m, n \geq 1 \text{ простое } m \text{ и } n = 7^q, k = 7^l \quad \text{так } q, l \in \mathbb{N},$$

$$q + l = 12 \quad \text{т.к. } q \leq 12 \Rightarrow m, n 28 > 12 \text{ и } a^2 = 3^{18} \cdot 7^{28-q+l}$$

$$(m, n, a \in \mathbb{N} \Rightarrow 28-q+l : 2 \Rightarrow 28-q+l \text{ и } q+l = 2t : 2)$$

$$q-l = 2r \quad r \in \mathbb{Z} \quad \text{для } 3-20 \text{ будем } r = 2^8 \cdot 7^{46+q-l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow q-l : 2 \quad \text{следует } k \cdot m = 7^{12}, p = 1 \text{ подходит т.к. } q-l \text{ и } 2 \text{ четные числа}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

*МФТИ*

небережным м.к  $\frac{3}{7} \cdot 2$  (и 3,7 проглядыв.)

$$K \cdot m = 2^{12}, p=1 \Rightarrow \sqrt[3]{K \cdot m \cdot p} = 2^6 \Rightarrow abc = 3^{28} \cdot 2^{36}$$
$$= 3^{28} \cdot 2^{42}$$

Очевидно  $3^{28} \cdot 2^{42}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a \neq b \quad \left( \frac{a}{b} - \text{неконпр-на} \right) \quad a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N} \quad n=?$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} = k \quad \text{если } d \text{ дробь к искомого}$$

сократим на то и  $\frac{1}{k}$  искомого

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} &= \frac{a^2 - 9ab + b^2}{a+b} = a - 10b + \frac{11b^2}{a+b} = \frac{a^2 - 9ab + b^2}{a^2 + ab} \mid \frac{a+b}{a-10b} \\ &= \frac{(a+b)(a-10b) + 9b^2}{a+b} = \frac{-10ab + b^2}{10ab - 10b^2} \\ &= \frac{b^2}{11b^2} \end{aligned}$$

$a+b = m \cdot L$  ~~неконпр-на~~

$$a^2 - 9ab + b^2 = a^2 - 9ab + 20,25b^2 - 20,25b^2 =$$

$$= (a - 4,5b)^2 - 20,25b^2 = (a - 4,5b + 6\sqrt{20,25}) \cdot$$

$$\cdot (a - 4,5b + 6\sqrt{20,25}) = m \cdot d$$

$$m \cdot \frac{a}{b} - \text{неконпр-на} \rightarrow a \neq b, b \neq 0 \Rightarrow a = b + q$$

$$rge \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N} \text{ и } a, b \in \mathbb{N}, q < b \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow k &= \frac{b(t+1)+q}{(bt+q)^2 - 9b(bt+q) + b^2} = \frac{b(t+1)+q}{b^2t^2 + 2btq + q^2 - 9bt^2 - 9bq + b^2} \\ &= \frac{b(t+1)+q}{b^2(t^2 - 9t + 1) + q(b^2 - 9b + t)} = \frac{b(t+1)+q}{b^2(t^2 - 9t + 1) + q(b^2 - 9b + t)} \end{aligned}$$

$$b^2(t^2 - 9t + 1) + q(b^2 - 9b + t) = b^2(t^2 - 9t + 1) + q(b^2 - 9b + t)$$

$$b^2(t^2 - 9t + 1) + q(b^2 - 9b + t) = b^2(t^2 - 9t + 1) + q(b^2 - 9b + t)$$

$$m \rightarrow a - 10b \vdash m, \frac{11b^2}{a+b} \text{ искомое соотв-шина}$$

$$m \rightarrow a - 10b \vdash m, \frac{11b^2}{a+b} \text{ искомое соотв-шина}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{a+b}{b^2} = \frac{a}{b^2} + \frac{b}{b^2} \text{ и-и } \frac{a}{b^2} \text{ неконпр-на} \Rightarrow \frac{a}{b^2} \text{ неконпр-на } (a = b + q)$$

$$\frac{b^2}{b^2 + b + q} \text{ и-и } q < b \text{ но } b^2 \nmid b^2 + b + q \text{ и-и } b^2 + b + q \vdash b, aq < b \quad \boxed{\text{Причина } a = 2, b = 2}$$

$$a \neq b \rightarrow m \text{ неконпр-на} \Rightarrow \frac{11b^2}{a+b} \text{ и-и } m = 11 \quad \boxed{\text{Причина } a = 2, b = 2}$$

$$\frac{9+2}{81 - 182 + 4} = \frac{11}{-81 + 4} = -\frac{11}{77} = -\frac{1}{7}$$



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача. Окружность  $\omega$  с центром  $O_1$  и радиусом  $r_1$ .

Окружность  $\Omega_2$  с центром  $O_2$  и радиусом  $r_2$ .

$$\angle C = 25^\circ, AC = 1$$

Линия  $K$  — общая секущая окружности  $\omega$  и  $\Omega_2$ .

Через точку  $A$  проведена прямая  $AB$ , перпендикулярная линии  $K$ .

Через точку  $B$  проведена прямая  $BC$ , перпендикулярная линии  $K$ .

Найти:

$MN$

Решение:

окружность  $\Omega_2 - \Omega_2$  окружность  $\omega - \omega$

$$AB \text{ - секущая } \Omega_2 \text{ и } O_2 \Rightarrow r_2 = 13$$

Радиус  $V_2$  окружности  $\Omega_2$

$$V_2 = BO_2 = O_2A, \text{ так как } A \text{ - середина}$$

$$\Rightarrow O_2C = V_2 - 1 = 12 \text{ (так как } O_2M \perp K, O_2C \perp K)$$

$$O_2N = O_2O_1 + O_1N \text{ так как } O_2N \perp K, O_1N \perp K$$

так как  $K$  — общая секущая окружности  $\omega$  и  $\Omega_2 \Rightarrow O_2N \perp K, O_1M \perp K$

так как  $AH$  — диаметр окружности  $\omega \Rightarrow O_1C \perp AB$

$$\text{в } \triangle O_2C \quad O_2 \perp O_1C \quad O_2C = 13 \Rightarrow \text{по теореме Пифагора} \Rightarrow O_1C = \sqrt{13^2 - 12^2} =$$

$$= \sqrt{O_1O_2^2 - O_2C^2} = 5 = V_1 \quad V_1 - радиус окружности  $\Omega_1$ ,  $O_1C =$$$

$\Rightarrow O_1M = 5$  так как радиусы. Проведем  $O_1H \perp MN \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{так как } O_1M \perp K \text{ и } O_2N \perp K \Rightarrow O_1M \parallel O_2N \quad (\text{если } O_1M \perp K \text{ и } O_2N \perp K \text{ то } \angle O_1MH = \angle O_2NH = 90^\circ)$$

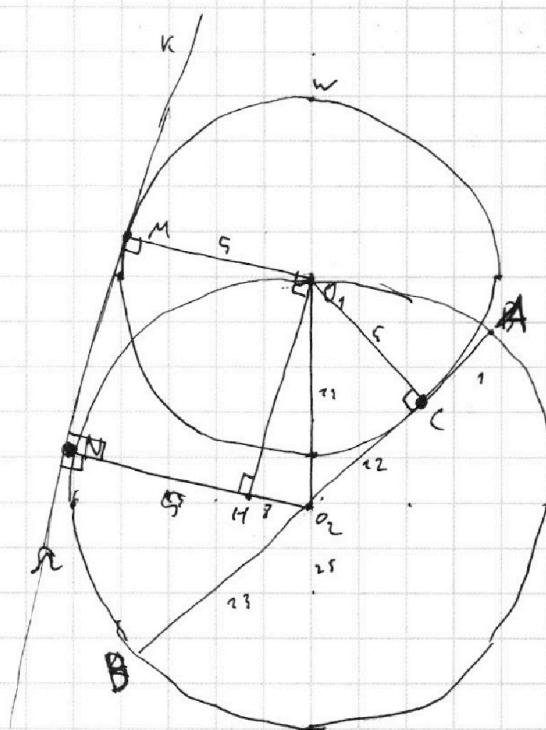
но  $\angle MO_1H = \angle O_2NH = 90^\circ$  (так как  $O_1H \perp MN$ )

$$\Rightarrow M O_1 = NH = 5 \Rightarrow MO_2 = 11 (V_2 - NH = 11 - 5 = 6) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{в } \triangle O_1O_2H \text{ по теореме Пифагора} \Rightarrow O_1H = \sqrt{26^2 - 6^2} =$$

$$= \sqrt{100} \Rightarrow \text{так как } MO_1 = NH = 5 \Rightarrow O_1H = MN = \sqrt{100}$$

Ответ:  $\sqrt{100}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y = 5u - 3z \quad \frac{8}{u} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \Rightarrow \frac{8u + u}{uy} = \frac{15}{z} \Rightarrow$$

$$\therefore 8yz + uz = 15uy \text{ подставим } y = 5u - 3z \Rightarrow$$

$$\therefore 8z(5u - 3z) + uz = 15u(5u - 3z)$$

$$48uz - 24z^2 = 125u^2 - 45uz$$

$$36uz = 75u^2 - 24z^2 - 86uz = 24z^2 = 0$$

$$f = 86u^2 - 24 \cdot 4 \cdot 75u^2 = 84u^2(43^2 - 24 \cdot 25) =$$

$$= 4u^2(1849 - 1800) = 49 \cdot 4u^2$$

$$z_{1,2} = \frac{36u \pm \sqrt{u}}{48} \quad z_{12} = \frac{93u \pm 7u}{24} \quad \frac{556}{24}u; \quad \frac{36}{24}u = \frac{6}{4}u = \frac{3}{2}u$$
$$z_1 = \frac{25}{12}u \quad z_2 = \frac{3}{2}u$$

$$1. \quad z = \frac{25}{12}u \rightarrow y = 5u - \frac{25}{4}u = \cancel{625}u \frac{5}{4}u$$

$$\frac{25u^2 - y^2 - z^2}{y^2 + z^2} = u = \frac{25u^2 - \frac{25}{16}u^2 - \frac{625}{144}u^2}{\frac{25}{16}u^2 + \frac{625}{144}u^2} = \frac{25 \cdot 144u^2 - 25 \cdot 9u^2 - 625u^2}{25 \cdot 9u^2 + 625 \cdot 9u^2} =$$
$$= \frac{3600u^2 - 850u^2}{225u^2 + 1875u^2} = \frac{2750u^2}{2100u^2} = \frac{275}{210} = \cancel{55} \frac{55}{42}$$

$$2. \quad z = \frac{3}{2}u \rightarrow y = 5u - \cancel{3}u = \frac{3}{2}u = \frac{9}{2}u$$

$$\frac{25u^2 - y^2 - z^2}{y^2 + z^2} = \frac{25u^2 - \frac{49}{4}u^2 - \frac{9}{4}u^2}{\frac{49}{4}u^2 + 3 \cdot \frac{9}{4}u^2} = \frac{100u^2 - 49u^2 - 9u^2}{49u^2 + 27u^2} =$$
$$= \frac{52u^2 - 9u^2}{36u^2} = \frac{42}{36} = \frac{21}{18} = \frac{21}{38} < \frac{55}{42}$$

Ответ:  $\frac{21}{38}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

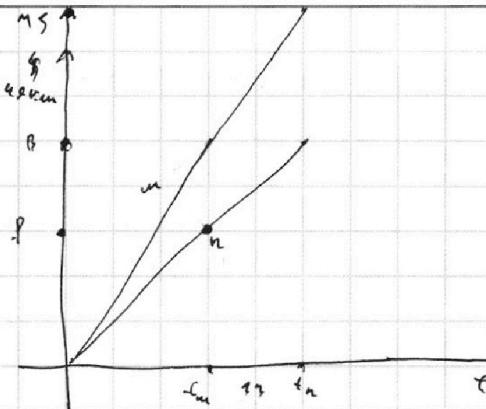
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1. t_m \cdot V_m = (t_m + 1) V_6 \quad \text{или} \quad \frac{36}{60} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad t_m = 48$$

$$\frac{36 \text{ минут}}{60} = \frac{3}{5}$$

$$2. V_6 \cdot t_m + 49 = V_m (t_m + 1)$$

$$3. (7 + V_m) \cdot t_m = (V_6 + 7) (t_m + \frac{3}{5})$$



$$1. t_m \cdot V_m = V_6 \cdot t_m + V_6$$

~~$$2. V_6 \cdot t_m + 49 = V_m t_m + V_m \Rightarrow V_6 \cdot t_m + V_6 + 49 = V_m t_m + V_m \Rightarrow$$~~

$$\Rightarrow V_6 = 48 \Rightarrow 48 t_m - V_m t_m = -48$$

$$t_m (V_m - 48) = 48 \quad \text{или} \quad t_m = \frac{48}{V_m - 48}$$

$$1. \frac{48}{V_m - 48} \cdot V_m = \left( \frac{48}{V_m - 48} + 1 \right) 48 \quad 3. \frac{(7 + V_m) 48}{V_m - 48} = \left( \frac{48}{V_m - 48} + \frac{7}{5} \right) (48 + 7)$$

$$\frac{48 V_m}{V_m - 48} = \frac{48^2}{V_m - 48} + 48$$

$$48 V_m = 48^2 + 48 V_m$$

$$2. V_6 \cdot t_m + 49 = V_m t_m + V_m \Rightarrow V_m t_m - V_6 t_m = V_m - 49$$

$$1. t_m \cdot V_m = V_m \cdot t_m + V_m + V_6 - 49 \Rightarrow V_m + V_6 = 49 \Rightarrow V_m = 49 - V_6$$

$$2. V_6 \cdot t_m + 49 = 49 t_m - t_m V_6 + t_m - V_6$$

$$2 t_m V_6 - 49 t_m + V_6 = 0$$

$$2 t_m V_6 + V_6 = 49 t_m$$

$$V_6 (2 t_m + 1) = 49 t_m$$

$$V_6 = \frac{49 t_m}{2 t_m + 1}$$

$$3. \left( 56 - \frac{49 t_m}{2 t_m + 1} \right) t_m = \left( \frac{49 t_m}{2 t_m + 1} + 7 \right) (t_m + \frac{3}{5}) \quad t_m = 48$$

$$56 t_m - \frac{49 t_m^2}{2 t_m + 1} = \frac{49 t_m^2}{2 t_m + 1} + 7 t_m + \frac{3 \cdot 49 t_m}{10 t_m + 5} + \frac{21}{5}$$

$$49 t_m - \frac{98 t_m^2}{2 t_m + 1} = \frac{3 \cdot 49 t_m}{10 t_m + 5} + \frac{21}{5} \quad | \cdot 10 t_m + 5 \Rightarrow 490 t_m + 21 = 147 t_m + 21 \Rightarrow t_m \text{ wrong} \rightarrow$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$490n^2 + 245n - 490n^2 = 189n + 42n + 21$$

$$49t_m(10t_m + 5) - 98 \cdot 5t_m^2 = 3 \cdot 49t_m + 21(2t_m + 1)$$

$$490n^2 + 245n - 990n^2 = 189n + 21$$

$$\begin{aligned} 46n = 21 &\rightarrow t_m = \frac{3}{8} \rightarrow V_b = \frac{49 \cdot \frac{3}{8}}{\frac{6}{8} + 1} = \\ &= \frac{147}{8} \cdot \frac{8}{14} = \frac{21}{2} = 10,5 \text{ км/ч} \Rightarrow V_m = 49 - 10,5 = 38,5 \text{ км/ч} \\ \Rightarrow S &= V_m \cdot t_m = 38,5 \cdot \frac{3}{8} = \frac{115}{8} = \frac{231}{16} \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{231}{16}$  км

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Задача: } EX = \sqrt{2} \cdot XY$$

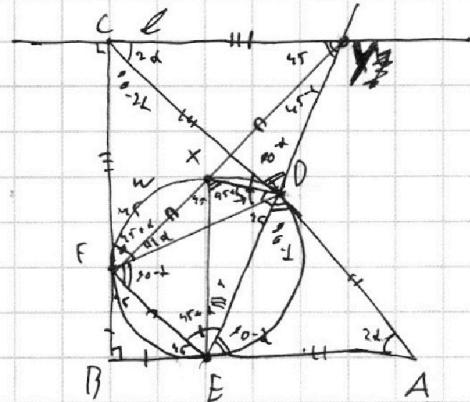
$F(E)$  - искомая кас. к окружности с центром

$ED$  в точке  $E$  и  $\ell \perp BC$ ,  $C \in \ell$

$FY$  и  $W$  вин.  $X$

Решение:

$$\frac{AD}{DC}$$



Доказательство: 1. из теоремы о кас. к окружности из односторонней нормали  $\Rightarrow AD \perp AE$ ,

$BE = BF$ ,  $CF = CY$ ,  $\therefore \angle YCO = \angle CAB = 2L$ , т.к.  $\angle AOB = 4L$ ,  $AD = AE = L$

$\Rightarrow \angle ADE = \angle ABE = 90 - L$  и к ним приложены,  $\angle FOD = \angle COY = L$

$\Rightarrow \angle CYD = 180^\circ - 90^\circ + L - 2L = 90^\circ - L \Rightarrow \angle YD$  (равенство углов между  $CDY$ )

$\Rightarrow \angle CYD = \angle COY = 90^\circ - 2L$ .  $\angle CAB = 90^\circ \Rightarrow \angle BCA = 90^\circ - L$ .

и к ним  $\angle CYD = \angle COY = 90^\circ - 2L$  приложены  $\Rightarrow \angle FED = \angle COD = \frac{180^\circ - 90^\circ + L}{2} = 45^\circ + L$

2. и к ним  $CY = CF \Rightarrow \angle FCY$  равенство  $\Rightarrow \angle CYF = \angle CFE = 45^\circ$  и  $\angle CCY = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CYF = \angle CFD - \angle CFY = 45 + L - 45 = L$ ,  $\angle FYD = \angle CYD - \angle CYF =$

$$= 90 - L - 45 = 45 - L$$

4.  $\cos \angle FUE = \cos \angle BEF = \cos \angle BGE$ ,  $\angle B = 90^\circ \Rightarrow \angle BEF = \angle BGF = 45^\circ$

5. и к ним  $\angle YCO = \angle DAE$ ,  $\angle EDY = \angle COY = L \Rightarrow \angle YCO \approx \angle DAE \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{YE}{YD}$$

6.  $\angle DFE = 180^\circ - 45 - L - 45 = 90^\circ - L$ ,  $\angle DEF = 180^\circ - 90 + L - 45 =$

$$= 90 - 45 + L$$

7. и к ним  $\angle XED$  одинаков  $\angle XED = \angle XFD$  и  $\angle XFD = \angle XFE$

(из теоремы о касательной к окружности)  $\angle XED = 2L$ ,  $\angle XFD = 45^\circ + L - 2 = 45^\circ$ , а и к ним  $\angle XFE = 90 + L + L = 90 + 2L$

$\Rightarrow XE = FE$ ,  $\angle FXE = \angle FEF = 90^\circ$ , и к ним  $\angle XEF$ .

→ Составлено решение

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{н.к } \angle XFE = 90^\circ \Rightarrow FX - FE = \frac{XY}{\sqrt{2}} = \frac{XY\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = XY \Rightarrow$$

$$\text{н.к } FY = 2XY \quad XY = n \quad FY = 2n$$

$$8. \angle YXE = 180^\circ - \angle FXE = 135^\circ \Rightarrow \triangle YXE \sim \triangle YDF$$

$$\text{н.д.с } XY \text{ от - одинарн, } \angle YDF = 90^\circ - 45^\circ + 2 = 135^\circ = \angle YXE$$

$$9. \text{ (одн. XUD) } \Rightarrow FDX \text{ биссектриса} \Rightarrow \angle XFE = 90^\circ = \angle XDE \Rightarrow,$$

$$\Rightarrow \angle EXD = 45^\circ + 45^\circ - 2 = 45^\circ = 90^\circ - 2$$

$$\text{т.к. } \text{н.д.с } 8 \Rightarrow \frac{YD}{YX} = \frac{DF}{XE}, \text{ а } FE = XY\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{YD}{YX} = \frac{DF}{YX\sqrt{2}} \Rightarrow DF = YD\sqrt{2}, \text{ н.д.с } n. 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{YD}{YX} = \frac{FE}{YE} \quad FE = 2XY - (n \cdot 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{YD}{Yn} = \frac{2XY}{YE} \quad \frac{YD}{n} = \frac{2n}{YE} \quad YE = \sqrt{4n^2 + n^2} = n\sqrt{5}$$

$$\text{н.к } \angle YFE = 90^\circ \text{ (по теореме Пифагора)}.$$

$$11. \frac{2n}{n\sqrt{5}} = \frac{YD}{n} \Rightarrow YD = \frac{2n}{\cancel{n}\sqrt{5}} \cdot \frac{2n}{\cancel{n}} \cdot \sqrt{5} = n\sqrt{5}, DE = \frac{3n}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} =$$

$$- YD = n\sqrt{5} - \frac{2n}{\sqrt{5}} = \frac{5n}{\sqrt{5}} - \frac{2n}{\sqrt{5}} = \frac{3n}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{DE}{DY} = \frac{3n}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2n} =$$
$$= \frac{3}{2}$$

$$12. \text{ } \triangle DCY \sim \triangle DAE \text{ по глубин умнож (} \angle EDA = \angle CDY,$$

$$\angle YCD = \angle ADE \text{ н.к } CD \perp CB \text{ и } AD \perp CB \text{ (н.д.с (УАР))} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{DE}{DY} = \frac{3}{2}$$

Ответ:  $\frac{3}{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

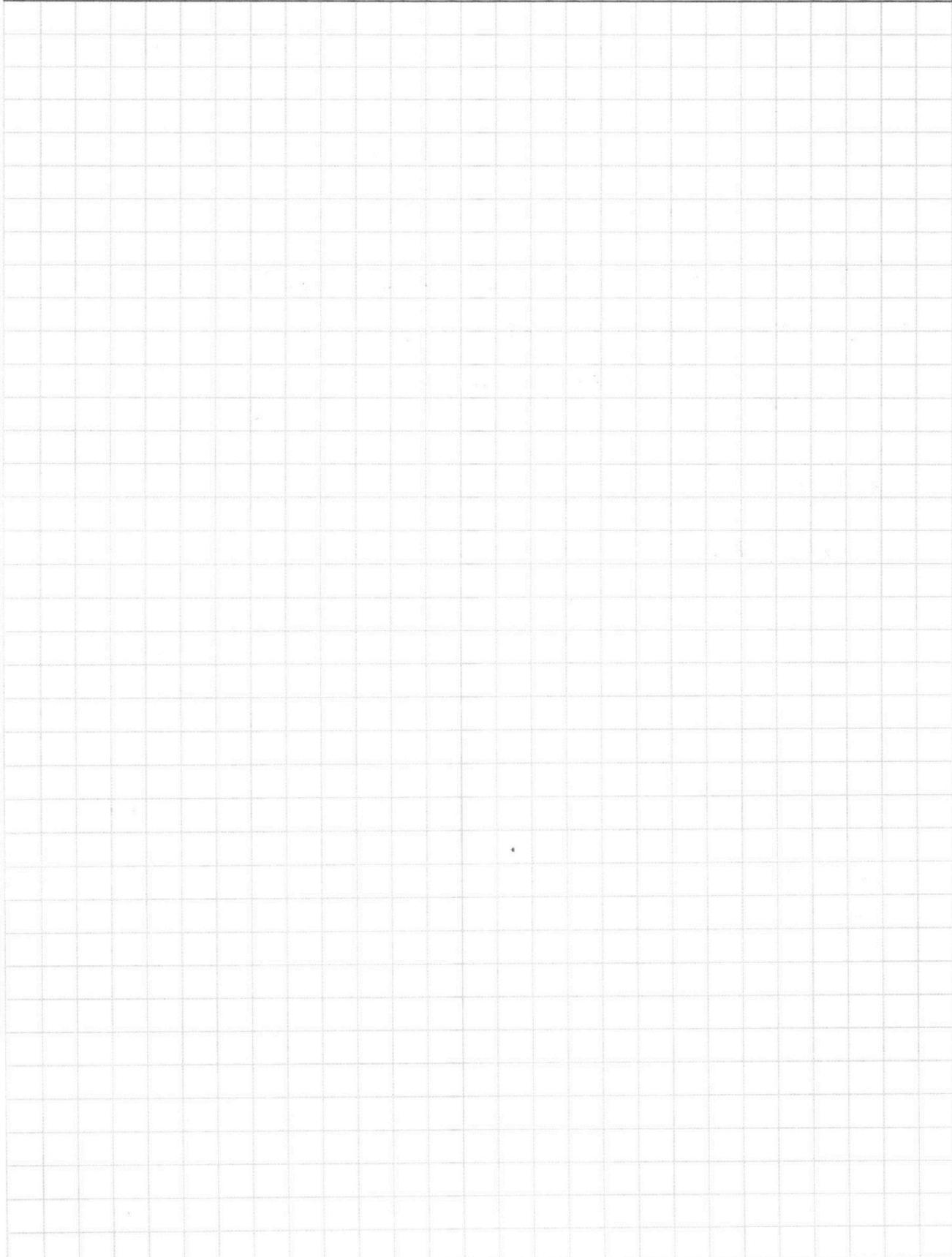
5

6

7

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                                     |                                     |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{49t_m}{(7+4x-t_m)t_m} = \frac{49t}{t_m}$$

$$(7+4x - \frac{49t_m}{2t_m+1})t_m = \left(\frac{49t_m}{2t_m+1} + 7\right)\left(t_m + \frac{7}{5}\right)$$

$$56t_m - \frac{49t_m^2}{2t_m+1} = \frac{49t_m^2}{2t_m+1} + 7t_m + \frac{3 \cdot 49t_m}{10t_m+5} + \frac{21}{5}$$

$$49t_m - \frac{98t_m^2}{2t_m+1} = \frac{3 \cdot 49t_m}{10t_m+5} + \frac{21}{5}$$

$$49t_m(2t_m+1) - 98t_m^2 = 3 \cdot 49t_m + 21(2t_m+1)$$

$$490n^2 + 245n - 490n^2 = 189n + 42n + 21 \quad t_m = n$$

$$245n - 189n = 21$$

$$56n = 21 \quad n = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}$$

$$49 \cdot \frac{3}{8} : \frac{6}{8} = \frac{49}{8}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 7 \cancel{\times} \\ \hline 389 \\ \times 7 \cancel{\times} \\ \hline 245 \end{array}$$

$$\frac{147}{8} \cdot \frac{8}{19} \quad \frac{147}{19} = \frac{147}{19} \quad \frac{21}{2} = 10,5 \quad \frac{147}{74} \mid \frac{7}{21}$$

$$v_m = 38,5$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 21 \end{array}$$

$$18,5 \cdot 3$$

$$3,5 \cdot 11 \cdot 3$$

$$10,5 \cdot 11$$

$$3,5$$

$$\frac{38,5 \cdot 3}{8} = \frac{11}{8} \cdot 10,5$$

$$231 \mid \underline{18} \quad 16$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 21 \\ \hline 43 \\ 43 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ 3 \\ \hline 93 \\ 7 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$38,5 \cdot 2 = \frac{87}{2} \quad \frac{77}{7}$$

$$\frac{21}{2} \cdot \frac{3}{8} + 49 = \frac{32}{2} \cdot \frac{21}{8} \quad \frac{231}{26} \cdot \frac{2}{21} = \frac{21}{8}$$

$$\begin{array}{r} 38,5 \\ \times 2 \\ \hline 770 \end{array}$$

$$\frac{231}{26} \cdot \frac{2}{21} = \frac{21}{8} \quad \frac{231}{16} \cdot \frac{2}{97} = \frac{3}{8}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                                     |                                     |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$48 \cdot 7 = 55$$

$$(V_m + 7) \cdot f_m =$$

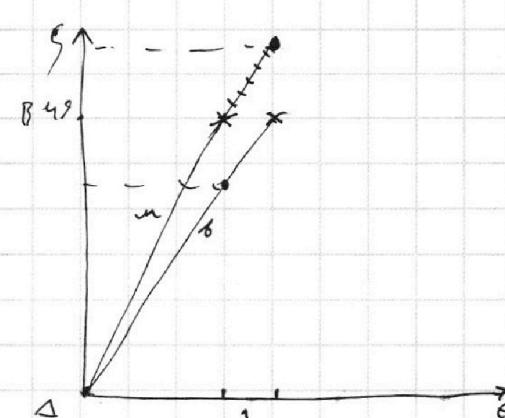
$$\approx (V_m + 7) \cdot \left( f_m + \frac{3}{7} \right)$$

$$\frac{60}{36} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{f_m}{6}$$

$$28 \cdot 5$$

$$33$$



$$\begin{aligned} 8y_{\text{чел}} &\approx 2 \\ 82y_{\text{чел}} &= 15 \text{ и } y = 12 \\ 82y_{\text{чел}} + 2u &= 15 \text{ и } y = 12 \\ 8u - 48 &= 15 \end{aligned}$$

$$\frac{336 + 48V_m + t}{V_m - 48} = \frac{48}{V_m - 48} + \frac{3V_m - 144}{5V_m - 48 \cdot 5} \cdot \frac{55(\cancel{12})}{V_m - 48}$$

$$336 \cdot \cancel{12} + 48 \cdot \cancel{12} V_m = (48 \cdot 5 + 7V_m - 144) \cdot 55 \cancel{12}$$

$$1680 + 240V_m = (240 + 7V_m - 144) \cdot 5525$$

57.11

$$1680 + 240V_m = 2640 \cdot 25 + 33 \cdot 25V_m - 1584 \cdot 25$$

$$96 \cdot 25 +$$

$$1680 - 96 \cdot 25 = 5448 \cdot 5(165V_m - 48V_m)$$

$$336 - 96 \cdot 8$$

$$33 \cdot 5$$

$$V_6 \cdot f_m = V_m f_m - 48$$

$$\frac{2u}{\sqrt{n}v} \quad \frac{2u}{\sqrt{5}} = \frac{y}{n}$$

$$n\sqrt{t} - \frac{2u}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{2u}{\sqrt{5}} \quad \frac{5n - 2u}{\sqrt{t}} = \frac{3u}{\sqrt{t}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                                     |                                     |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3n^2 - 5n + 6} - \sqrt{3n^2 + n + 1} = 5 - 6n$$

$$3n^2 - 5n + 6 \quad 4 \\ 3n^2 - 5n + 6$$

$$d = 25 - 24 - 2 \cancel{5} \quad d = 2 - 5$$

$$n < 0 \quad \begin{array}{r} 25 \\ 86 \\ \cdot 8 \\ 680 \end{array}$$

$$(5 - 6n)(5 - 6n) = \\ - 25 - 70x - 30x + 36$$

$$25 - 60n + 36n^2$$

$$3n^2 - 5n + 6 + 3n^2 + n + 1 - 2\sqrt{(3n^2 - 5n + 6)(3n^2 + n + 1)} = 5 - 6n$$

$$6n^2 - 4n + 8 - 25 + 60x - 36n = 2\sqrt{(3n^2 - 5n + 6)(3n^2 + n + 1)} \quad \cancel{- 7}$$

$$-(10n^2 + 56n + 17) = 2(3n^2 - 5n + 6)(3n^2 + n + 1) \quad 86$$

$$744 = 16 \cdot 9$$

$$4n - y = 12$$

$$\frac{8}{n} = \frac{1}{4} = \frac{15}{2}$$

$$\frac{25n^2 - 47 - 2}{y^2 + 722} - \frac{516}{7396}$$

$$y = 5n - 12$$

$$\frac{8y + n}{ny} = \frac{15}{2}$$

$$\frac{48}{43} \quad \begin{array}{r} 36 \\ 36 \end{array}$$

ст

$$y = 5n - 32$$

$$8y^2 + ny = 25ny$$

$$\begin{array}{r} 43 \\ 43 \end{array}$$

$$\frac{8}{n} + \frac{1}{5n - 32} = \frac{15}{2}$$

$$40n^2 - 2482 + n^2 = 75n(5n - 32)$$

$$\begin{array}{r} 43 \\ + 720 \end{array}$$

$$2(40n - 248) = 25n \cdot 125n^2 - 800n \cdot 720$$

$$\begin{array}{r} 1849 \\ 1849 \end{array}$$

$$- \frac{25}{20} \frac{1}{4} \frac{1}{6,15}$$

$$2 - \frac{125n^2 - 800n}{4n^2 - 298}$$

$$y = 5n - 32$$

$$25n^2 - 25$$

$$\frac{8(5n - 32) + n}{(5n - 32)n} = \frac{15}{2}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ 24 \\ + 320 \end{array}$$

$$86 \leftarrow 4$$

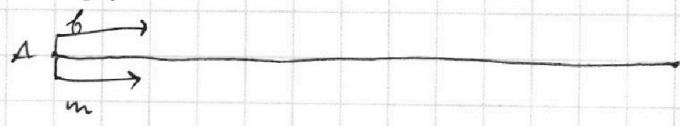
$$8402n - 242^2 + n^2 = 15n(5n - 32)^2 \leftarrow 0$$

$$412n - 242^2 = + 45n^2 - 45n \cdot 720$$

$$75n^2 - 86n^2 + 242^2 = 0$$

$$8 =$$

$$\frac{72}{48}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                                     |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$28 \cdot 9 \quad 180 + 95 \quad 225$$

$$a^2 b^2 c = 3^3 \cdot 7^{10} \cdot \text{к.м.} \cdot 6^{25}$$

$$a^2 c = 28^3 \cdot 7^{42} \cdot p$$

$$b^2 = \frac{3^{10} \cdot \text{к.м}}{7^{12} \cdot p}$$

$$\frac{a^2 b^2 c}{b^2 c} = \frac{3^7 \cdot 7^{55} \cdot p \cdot \text{к}}{3^{20} \cdot 7^{22} \cdot \text{м}}$$

$$r \cdot m \cdot 7^{12} \cdot t$$

$$p \cdot 3^{10} \cdot q$$

$$4 \cdot 4 \cdot 9$$

$$-225 \left| \begin{array}{l} 5 \\ 45 \end{array} \right.$$

$$= \frac{a}{b^2} + \frac{1}{b}$$

$$3^{10} \cdot 7^{20} \cdot p \cdot \text{к} : \text{м}$$

$$\frac{a}{b} \text{ кв.м} \cdot 7^{12}$$

$$871 - 210 \left| \begin{array}{l} 5 \\ 42 \end{array} \right.$$

$$\frac{2+9}{4-162+81}$$

$$\frac{a+b}{b^2} = -\frac{11}{71}$$

$$= \frac{a}{b^2} + \frac{1}{b}$$

$$\frac{a^2 b^2}{ab} = \frac{3^{42} \cdot 7^{59}}{3^{19} \cdot 7^{12} \cdot K} = 3^{23} \cdot 7^{37} \cdot \text{м.р} : K$$

$$a+b = \text{к.м}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = \text{к.м}$$

$$K = 1 \cdot 2 \cdot 2$$

$$3^{14} \cdot 7^{13} - 7^{11}$$

$$m=?$$

$$m=1, K=1$$

$$a+b : m$$

$$a^2 - 2ab + b^2 : m \left( a - b \left( \frac{a-\sqrt{2ab}}{2} \right) \right) \left( a - b \left( \frac{a+\sqrt{2ab}}{2} \right) \right)$$

$$a+b \neq b^2 ?$$

$$78 \cdot 9$$

$$a+b = \text{к.м}$$

$$K = 7^{12}, m=1, p = 7^{10}$$

$$f = 876^2 - 76^2 = 728^2$$

$$K = 7^6, K = 7^6$$

$$a_{112} = \frac{16 \pm \sqrt{97}}{2}$$

$$a+b = 116^2$$

$$116^2 - b - a = 0$$

$$(a-10b)(a+b) = a^2 - 10ab + ab - 10b^2 + 10b^2$$

$$\frac{a^2 - 9ab + b^2}{a^2 + ab} \left| \begin{array}{l} a+b \\ a-10b \end{array} \right.$$

$$-10ab + b^2$$

$$= 10ab - 10b^2$$

$$116^2 : a+b$$

$$116^2$$

$$a - 10b + \frac{116^2}{a+b}$$

$$g = a+b$$

$$\frac{6}{72}$$

$$\frac{27}{6}$$

$$-109 \left| \begin{array}{l} 3 \\ 15 \end{array} \right.$$

$$2 \cdot 5 \cdot 7$$