



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть: $x \in \mathbb{N}; y \in \mathbb{N}; z \in \mathbb{N}; k \in \mathbb{N}$

также, то: $ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot x$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot y$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot z$$

$$abc = \sqrt{2xyz} \cdot 2^{25} \cdot 7^{32}$$

$$\text{но } ac \neq 7^{37} \text{ и } abc - \text{целое} \Rightarrow \begin{cases} xyz : 2 \\ xyz : (7^5)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xyz = 2 \cdot 7^{10} k$$

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{37} k \Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37} \text{ (т.к. } k \geq 1)$$

Пример

$$a = 2^9 \cdot 7^{20}$$

$$b = 2^6$$

$$c = 2^{11} \cdot 7^{17}$$

$$\text{Проверка: } ab = 2^{15} \cdot 7^{20} : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{17} : 2^{17} \cdot 7^{14}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$abc = 2^{9+6+11} \cdot 7^{20+17} = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

$$\text{Ответ: } 2^{26} \cdot 7^{37}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1/2 $x \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{Z}$ ~~$x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$~~
Обозначим $\gcd(x, y)$ - наибольший общий делитель
чисел x, y , больший нуля

Если $\frac{a}{b}$ - несократима $\Rightarrow (a, b) = 1$
иначе можно сократить дробь на (a, b)

Получим, что, ~~если~~ $\frac{a+b}{a^2+b^2-8ab}$ можно сократить на m

~~$(a, b) : m$ т.е. $m \mid (a, b)$ и при~~
 $\Rightarrow (a+b; (a+b)^2-8ab) : m$, т.е. $m \mid (a+b; (a+b)^2-8ab)$

По алгоритму Евклида: $(a+b; (a+b)^2-8ab) = (a+b; 8ab)$

~~Вся дробь делится на $a+b$~~
Очевидно, что $\frac{4ab}{a+b} \geq 1$ ~~$(a \geq 1; b \geq 1) \Rightarrow$~~
 $\Rightarrow 8ab \geq 2(a+b) \Rightarrow \frac{4ab}{a+b}$

Посмотрим при каких условиях $8ab \geq a+b$:
 $8ab \geq a+b \geq 2\sqrt{ab}$
и то есть $\Rightarrow$ среднее

~~$4ab$~~ $8ab$
Очевидно, что $(4a-1)(2b-1) \geq 0$ т.к. $a \geq 1$
Значит $8ab > 2b + 4a - 1 = a+b + \underbrace{(b+3a-1)}_{\geq 0} > a+b$
 $b \geq 1$

Получим, что $8ab > a+b$ всегда
 ~~$ab \neq 0; a+b \neq 0$~~ $ab \neq 0$ и $a+b \neq 0$

т.к. $(a, b) = 1 \Rightarrow (ab; a+b) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \max((a+b; 8ab)) = \max((a+b; 8)) = 8$

т.к. $(x, y) \leq \max(x, y)$; т.е. $\max(m) = 8$

Пример $\begin{cases} a=1 \\ b=15 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{15}$ - несокр

$$\frac{a+b}{a^2+b^2-8ab} = \frac{1+15}{1+15^2-6 \cdot 15 \cdot 1} = \frac{16}{136} = \frac{8 \cdot 2}{8 \cdot 17} = \frac{2}{17} \text{ несокр}$$

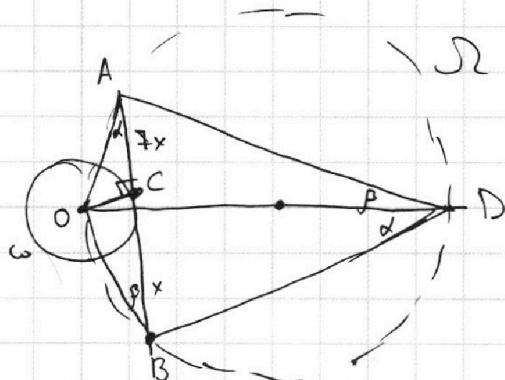
Ответ: $m=8$

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$f(y) = \sin y > 0 \text{ т.к. } 0 < y < \pi$$



Дано: O - центр окр ω

O $\in$ окр Ω ; AB - хорда Ω

AB кас $\omega = C$

AC: CB = 7; $r = 1, R = 5$

радиус ω и Ω соотв

И-ти: AB = ?

Пусть $\angle OAB = \alpha$ и

$\angle OBA = \beta$

Пусть AC = 7x; CB = x

Проведем в Ω диаметр, содержащий O; Пусть он пересекает Ω в точке D

Тогда $\angle ADO = \angle ABO = \beta$; $\angle BDO = \angle BAD = \alpha$

Рассм $\triangle C$:

OC $\perp$ AB в т. C т.к. ~~кас~~ точка касания

в $\triangle AOC$: $\tan \alpha = \frac{1}{7x}$; в $\triangle BOC$: $\tan \beta = \frac{1}{x}$ (т.к. OC = r = 1)

По теореме синусов:

$$\frac{AB}{\sin(\alpha + \beta)} = 2R = 10; \quad 8x = 10(\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha)$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{7x} \Rightarrow \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{1}{7x} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{1}{49x^2}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{49x^2}{49x^2 + 1}$$

$$\text{Аналогично: } \cos \beta = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}; \quad \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}; \quad \cos \alpha = \frac{7x}{\sqrt{49x^2 + 1}}; \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{49x^2 + 1}}$$

$$4x = \frac{5}{\sqrt{1 + x^2} \sqrt{49x^2 + 1}} (x + 7x) \quad | : 4x \neq 0$$

$$1 = \frac{5 \cdot 2}{\sqrt{1 + x^2} \sqrt{49x^2 + 1}} \Leftrightarrow (1 + x^2)(49x^2 + 1) = 100$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

По теореме Виета: $\begin{cases} x^2 = 1 - \text{корень} \\ x^2 = -\frac{99}{49} - \text{корень} \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ т.к. } x \geq 0$

$$AB = 8x = 8 \cdot 1 = 8$$

Ответ: AB = 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\frac{(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1})(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = 2 - 7x$$

Область решений не уменьшается тк ~~2x^2 + 2x + 1 > 0~~

тогда имеем: $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0$
 $\begin{matrix} \geq 0 \\ \geq 0 \end{matrix}$

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7} \\ 2 \cdot \frac{2^2}{7^2} + \frac{2 \cdot 2}{7} + 1 > 0 \text{ неверно} \end{cases}$$

Значит переход равносильности

$$\frac{2x^2 - 5x + 3 - (2x^2 + 2x + 1)}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = 2 - 7x$$

$$\frac{2 - 7x}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = 2 - 7x$$

$$(2 - 7x) \left(\frac{1 - (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} \right) = 0$$

$$(1) \begin{cases} 2 - 7x = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \end{cases}$$

$$(1) \quad x = \frac{2}{7}; \quad 0 < \frac{2}{7} < 1 \Rightarrow \log x$$

(2) возведем в квадрат

$$2x^2 - 5x + 3 = 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 2x^2 + 2x + 1$$

$$2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = -1 + 7x \Rightarrow 7x - 1 \geq 0; \quad x \geq \frac{1}{7}$$

возведем в квадрат: $4(2x^2 + 2x + 1) = 49x^2 - 14x + 1$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 11^2 + 41 \cdot 3 = 121 + 123 = 244 = 4(11 + 50) = 4 \cdot 61$$

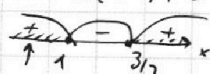
$$x_{1,2} = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}; \quad \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} < \frac{1}{7}; \quad \frac{77 - 14\sqrt{61}}{36} < \frac{1}{7}; \quad \frac{18\sqrt{7\sqrt{61}}}{18^2} < \sqrt{49 \cdot 61}$$

$$\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} > \frac{1}{7}, \text{ верно}$$

значит не подходит

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$(2x - 3)(x - 1) \geq 0$$



$$\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} < \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} = \frac{11 + 16}{41} = \frac{27}{41} < 1 \Rightarrow \log x$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \text{ только при } x \geq 0 \Rightarrow \log x$$

Ответ: $x = \frac{2}{7}$ или $x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

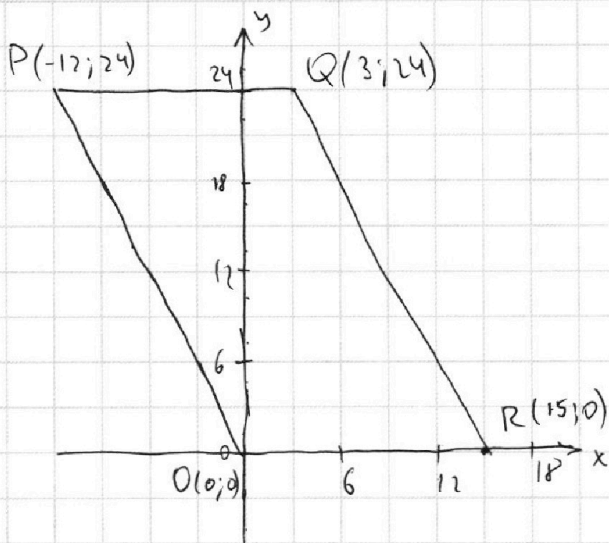
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5



Найдем ур-ие
прямой QR:

$$\frac{x-3}{15-3} = \frac{y-24}{0-24}$$

$$\frac{x-3}{12} = \frac{24-y}{24} \quad | \cdot 24$$

$$2x-6 = 24-y$$

$$2x+y = 30$$

$$PQ: y = 24$$

$$PO: y+2x = 0$$

$$OR: y = 0$$

Получим для всех точек

$$\begin{cases} 0 \leq y+2x \leq 30 \\ 0 \leq y \leq 24 \end{cases}$$

$$(2x_2+y_2) - (2x_1+y_1) = 12 \leftarrow \text{'разность' двух прямых вида}$$

$$2x+y = c$$

где c равно y/y или -12

$$\text{Пусть } 2x_1+y_1 = c \geq 0 \Rightarrow$$

$$2x_2+y_2 = c+12 \leq 30$$

$$\Rightarrow 0 \leq c \leq 18$$

$$\text{при этом, т.к. } \begin{matrix} x_1 \in \mathbb{Z} \\ y_1 \in \mathbb{Z} \\ x_2 \in \mathbb{Z} \\ y_2 \in \mathbb{Z} \end{matrix} \Rightarrow c \in \mathbb{Z}$$

и кол-во пар (x_1, y_1) и (x_2, y_2) равно:

$$\text{кол-во} = \sum_{c=0}^{18} \text{при } c: 2: |x_{\text{на } c} - x_{\text{на } y=24}| + 1; x_{\text{на } c} = \frac{c}{2}$$

$$c: 2: |x_{\text{на } c} - x_{\text{на } y=24}| = \frac{c}{2} - 12$$

$$\text{кол-во} = \sum_{c=0}^{18} \left(\left| \frac{c}{2} - 12 \right| + 1 \right) = \sum_{c=0}^{18} (12 - \frac{c}{2} + 1) = \sum_{c=0}^{18} (13 - \frac{c}{2})$$

В квадрате т.к. для любой точки прямой $2x+y=c$ можно выбрать любую точку прямой $c+12=2x+y$ тогда c четности

$$\text{кол-во} = 9 \cdot 12^2 + 10 \cdot 13^2 = 2986$$

Ответ: 2986

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6 2реш:

(1) $y = ax + 10b$

(2) $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \Leftrightarrow$ ~~линии~~ ^{линии} ~~касания~~ ^{касания} ~~отличаются~~ ^{отличаются} ~~с точностью до совпадения~~ ^{с точностью до совпадения} ~~при равенстве~~ ^{при равенстве}

~~Рассмотрим~~

Рассмотрим

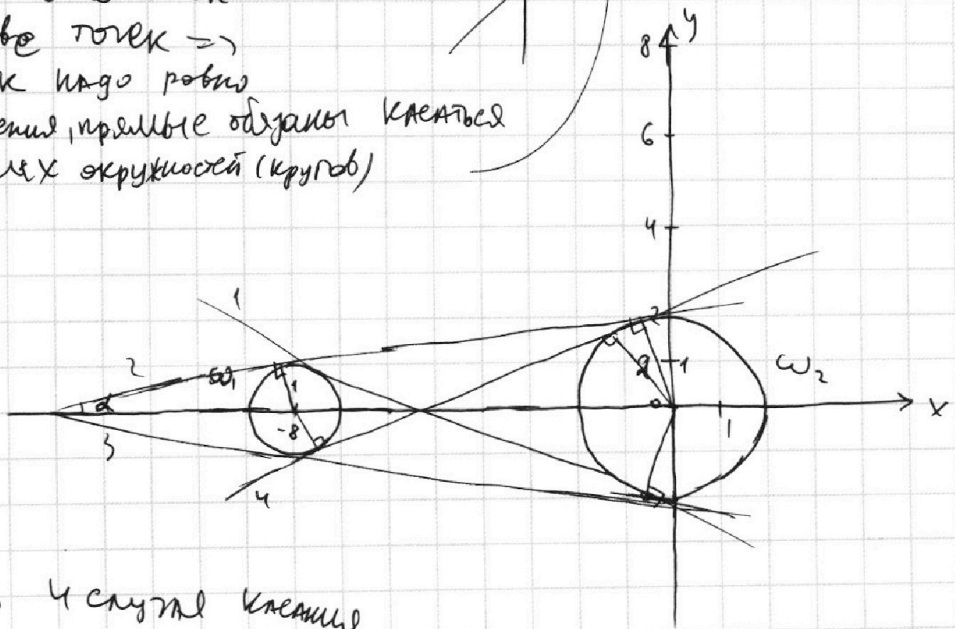
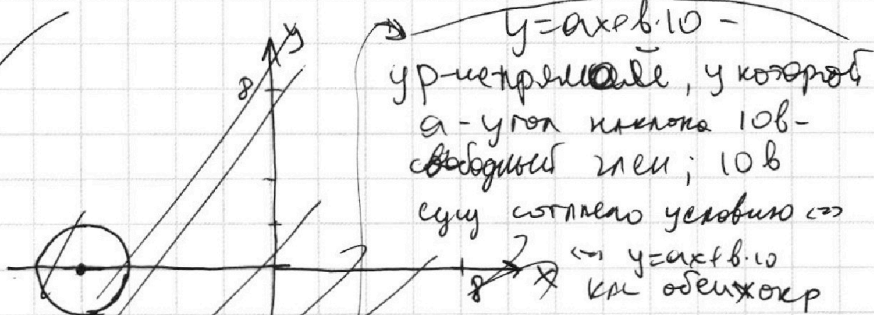
равносильно:

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ (x^2 + y^2) \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Круг } (O(-8; 0); R=1) \\ \text{Круг } (O(0; 0); R=2) \end{cases}$$



Заметим, что
если прямая
не касается ~~линии~~
окружности (круга),
то она пересекает
круг в ~~двух~~ ^{двух}
конечных точках $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ тк надо равно

2 решения, прямые образы касаться
областей окружностей (кругов)



Есть 4 точки касания
2х окружностей
(2 внешние и 2 внутр)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

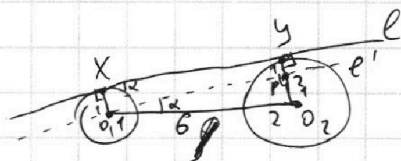


$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{35}}$$

$$\alpha = -\frac{1}{\sqrt{35}}$$

Тк окружности симметричны отн $Ox \Rightarrow$

$\Rightarrow$ можно рассмотреть только 1 внешнюю
и 1 внутреннюю касательную, остальные
два ответа - два ~~прямых~~ с противоположными
знаком, тк в этом случае Ox - биссектриса
углов образованных внешними или
внутренними касательными

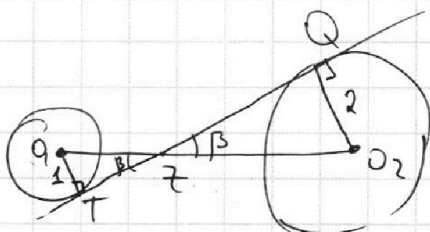


расстояние

и/у центрам: $OP = 8$

$e' \parallel l$; $PO_2 = 2 - 1 = 1 = O_1X - OX$

$$\tan \alpha = \frac{PO_2}{PO_1} = \frac{1}{\sqrt{6^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{35}}$$



$$O_2O_1 = 8$$

$\triangle O_1Tz \sim \triangle O_2Qz$ тк $\angle O_1zT = \angle O_2zQ$ - вертикальные $\Rightarrow$
 $90^\circ = \angle O_2Qz = \angle O_1Tz$

$$\Rightarrow \frac{O_2z}{zO_1} = \frac{QO_2}{TO_1} = \frac{2}{1} \Rightarrow zO_1 = \frac{1}{2} O_2O_1 = \frac{8}{2} = 4$$

$$zO_1 + zO_2 = 3zO_1 = 8 \Rightarrow zO_1 = \frac{8}{3}$$

$$\tan \beta = \frac{O_1T}{zO_1} = \frac{1}{\sqrt{9z^2 - 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{8}{3})^2 - 1}} = \frac{3}{\sqrt{64 - 9}} = \frac{3}{\sqrt{55}}$$

Ответ: $\begin{cases} \alpha = \pm \frac{3}{\sqrt{55}} \\ \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{35}} \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$5+4+6=155$$

$$2x^2 - 5x + 2 \geq 0$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2 \cdot 2} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ 1 \end{cases}$$

$$ab \geq 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc \geq 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac \geq 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{20+16+14+1} \cdot 7^{10+10+30+7} = 2^{41} \cdot 7^{57}$$

$$abc \geq 2^{41} \cdot 7^{57}$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{7}$$

$$\tan \beta = \frac{1}{x}$$

$$ab = x \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = y \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ca = z \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$abc = xyz \cdot (2^{25})^2 \cdot (7^{32})^2 = 2^{50} \cdot 7^{64}$$

$$y = ax + 10b$$

$$abc = \sqrt{2xyz} \cdot 2^{25} \cdot 7^{32}$$

$$a = \sqrt{\frac{2xz}{y}} \cdot 2^8 \cdot 7^5$$

$$b = \sqrt{\frac{2xy}{z}} \cdot 2^5 \cdot 7^5$$

$$c = \sqrt{\frac{2yz}{x}} \cdot 2^{14} \cdot 7^{22}$$

$$\frac{2xy}{z} = 4 \cdot 10 \cdot k^2$$

$$b = 2^6 k$$

$$MI = MA = \frac{4,5}{\sin \gamma}$$

$$AI = 2 \cdot \frac{4,5}{\sin \gamma} \cdot \sin(\alpha + \beta) = 2 \cdot \frac{2}{\sin \beta} \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

$$2 \cdot \frac{2}{\sin \beta} \cdot \sin \beta = 4 \sin \beta$$

$$\sqrt{2xyz} = 2 \cdot 7^5 k^2$$

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{37} k^2$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} k^2$$

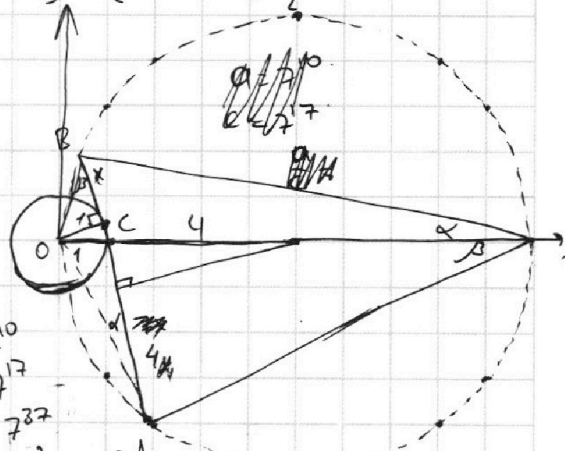
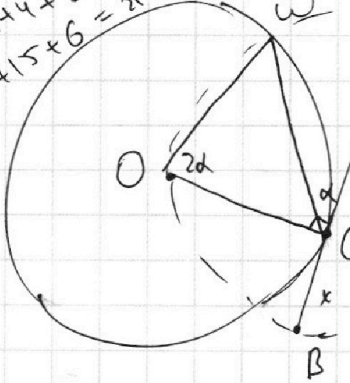
$$a = 2^9 \cdot 7^{20}$$

$$b = 2^6 \Rightarrow c \geq 2^{11} \cdot 7^{17}$$

$$a \geq 2^9 \cdot 7^{10}$$

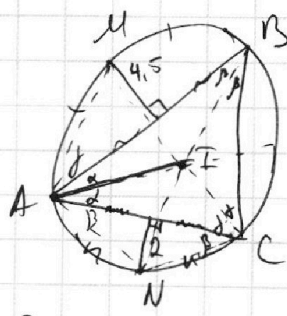
$$8 \times AB = 2R \sin(\alpha + \beta) \times 6 =$$

$$4+4+4+5+5+5 = 21+17 = 38$$



$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ (x+8)^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$$

$$y = ax + 10b$$



$$9 \sin \beta \cos \beta = 4 \cos \gamma \sin \gamma$$

$$9 \sin 2\beta = 4 \sin 2\gamma$$

$$AI = \frac{9 \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{9 \cdot 2}{3} = 6$$

