



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

12

$\frac{a}{b}$ - несократимая, $a, b \in \mathbb{N}$

$$\frac{a+b}{a^2-bab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-3ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-3ab}$$

Предположим $a = mn$, $b = mk$, $m, n, k \in \mathbb{N}$, но тогда $\frac{a}{b} = \frac{mn}{mk} = \frac{n}{k}$ сократима

$$\Rightarrow a+b = mn, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{mn}{(mn)^2-3ab} \text{ делится на сократима } \Rightarrow$$

$$3ab : mn$$

$$\Rightarrow a : m$$

$$ab : \frac{m}{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a : \frac{m}{k} \\ b : \frac{m}{k} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m=1$$

ответ: 1

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

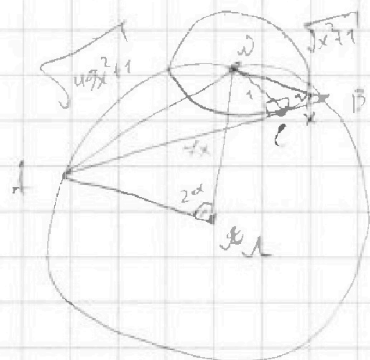
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

13



Решение:

1) Пусть $\begin{cases} CB = x \\ AC = 7x \end{cases}$ 2) р. м $\Delta (BW)$, м. C - т. касания $\Rightarrow \angle C = 90^\circ$
 $\Rightarrow$ По т. Пифагора $WB = \sqrt{x^2 + 1}$

3) Пусть $\angle (BW) = \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

4) $\angle (ABW)$ выражается на $\angle AW$, вписанный $\Rightarrow \angle (ADW) = 2\alpha$
 $\angle (ADW)$ выражается на $\angle AW$, центральный

5) По т. Пифагора в $\Delta (AW)$ - п-угол: $AW = \sqrt{49x^2 + 1}$

6) По т. косинусов в $\Delta (ADW)$: $AW^2 = AD^2 + DW^2 - 2 \cdot AD \cdot DW \cdot \cos 2\alpha$

$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \frac{2x^2}{x^2 + 1} - 1 = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

$\Rightarrow 49x^2 + 1 = 25 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; Пусть $x^2 = t, t > 0$

$49t + 1 = 50 - 50 \frac{t - 1}{t + 1} \mid \cdot t + 1 \neq 0$

$(49t + 1)(t + 1) = 50t + 50 - 50t + 50$

$49t^2 + 50t + 1 = 100 \Rightarrow 49t^2 + 50t - 99 = 0$ при $t = 1 \Rightarrow$ верно

$49 + 50 - 99 = 0$ - верно по т. Виета

$+ \frac{50}{49} t - \frac{99}{49} = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{99}{49} < 0 \Rightarrow \text{н.к.} \end{cases}$

$= t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$

$AB = 7x + x = 8x = 8$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 2x$$

пусть

$$\begin{cases} a = \sqrt{2x^2 - 5x + 3}, a \geq 0 \\ b = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}, b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 2x^2 - 5x + 3, a \geq 0 \\ b^2 = 2x^2 + 2x + 1, b \geq 0 \end{cases} \oplus$$

$$a^2 - b^2 = 2 - 7x$$

$$\Rightarrow a - b = a^2 - b^2; a - b = (a - b)(a + b); (a - b)/(a + b - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b(1), a \geq 0, b \geq 0 \\ a + b = 1(2) \end{cases} \text{ обратная замена:}$$

$$(1): \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \quad \uparrow \quad 2$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x = 2 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{7}}$$

$$(x): D_1 = 1 - 2 = -1 < 0$$

$$D_1 - \text{квадратный трехчлен} \Rightarrow 2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$(2) \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \quad \uparrow \quad 2$$

$$\frac{2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1}{2} + 2 \cdot \sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$2 \underbrace{\sqrt{2x^2 - 5x + 3}}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\sqrt{2x^2 + 2x + 1}}_{\geq 0} = \underbrace{-4x^2 + 3x - 3}_{(xx)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{л.ч. (левая часть)} \geq 0 \\ \text{п.ч. (правая часть)} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{2}{7} \right\}$$

$$(x+) 4x^2 - 3x + 3 = f(x)$$

$$D = 9 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 9 - 48 < 0$$

$$\Rightarrow f(x) > 0$$

$$-4x^2 + 3x - 3 = -f(x)$$

$$\Rightarrow -f(x) < 0$$

$$\Rightarrow -4x^2 + 3x - 3 < 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1/6

$$ax - y + 10b = 0 \quad (2)$$

а: 2 реш.

$$(x^2 + y^2 - 1) / (x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 & (-8; 0; R=1) \\ x^2 + y^2 \geq 4 & (0; 0; R=2) \end{cases}$$

образы на координатной плоскости;

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 & (-8; 0; R=1) \\ x^2 + y^2 \leq 4 & (0; 0; R=2) \end{cases}$$

Решение первой системы

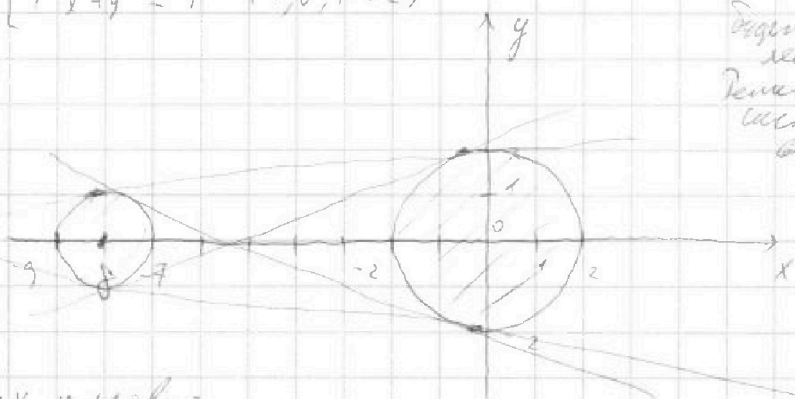
будет площадь внутри

левой окружности

Решение второй

системы будет площадь

внутри правой окружности



$$(2) ax - y + 10b = 0$$

$$y = ax + 10b$$

функция линейная
график прямой

Если прямая пересекает окружности,
то будет бесконечное множество
решений $\Rightarrow$ ответ отрицателен.
касается одна окружность,
Всего есть единственное решение
и две окружности касаются.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

11.1

Решение:

Дано:

$$\begin{aligned} a, b, c &\in \mathbb{N} \\ ab &= 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc &= 2^{14} \cdot 7^{12} \cdot n \\ ac &= 2^{20} \cdot 7^{32} \cdot n \end{aligned}$$

$$\min(ab, c) = ?$$

Перепишем три уравнения:

$$abc = 2^{54} \cdot 7^{22} \cdot n$$

$$abc = 7^{32} \sqrt{2^{54} \cdot n} \quad \begin{aligned} & n, m \in \mathbb{N} \\ & \text{т.к. } a, b, c \in \mathbb{N} \\ & \Rightarrow abc \in \mathbb{N}; kmn \in \mathbb{N} \\ & \Rightarrow \sqrt{2^{54} \cdot kmn} \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Если $k \cdot m \cdot n = 1$, то корни нашего уравнения целые $\Rightarrow kmn$ - минимальное или $k \cdot m \cdot n = 2$

$$\Rightarrow abc = 7^{32} \cdot \sqrt{2^{54} \cdot 2} = 7^{32} \cdot 2^{26}$$

$$\text{Ответ: } 7^{32} \cdot 2^{26}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

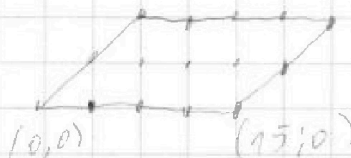


Черновики

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

CZ CZ



$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{8} \quad \frac{1+4-12}{8} = \frac{-7}{8}$$

$$15$$

$$\frac{3}{8} \quad 9 - 4 \cdot 2$$

$$9 - 4x = -8$$

$$7x = 4x \quad x = \frac{17}{3}$$

$$2x + y = 12$$

$$x_0 = 5$$

$$y_0 = 2$$

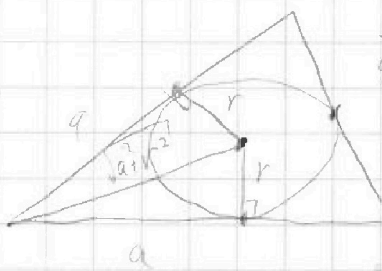
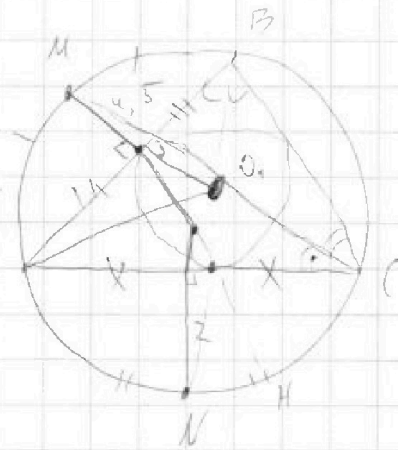
$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$$

$$x = 5$$

$$y = 2$$

$$x = 6$$

$$y = 0$$



$$4,5 \cdot x = a^2$$

$$a = \frac{8^2 - 5 \cdot 2}{2 \cdot 9} = a^2$$

$$2 \cdot y = 8^2$$

$$8^2 = 2x + 5$$

$$9a^2 = 8^2 - 5$$

$$4,5 + x = 2,5$$

$$x = \frac{8^2 - 5}{2}$$

$$x = y - 2,5$$

$$y = x + 2,5$$

$a+b: m$, a, b взаимно просты

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} \rightarrow \frac{mn}{m^2 - 4ab} = km = a \quad \frac{a}{b} = k \quad a+b: m$$

$$(a+b)^2 - 4ab = \frac{mn}{m^2 - 4(m \cdot b \cdot b) \cdot b} \quad a+b = m(k+n) \quad a+b: m$$

$$a+b = mn$$

$$a = mn - b$$

$$4ab: m$$

$$ab: \frac{m}{4}$$

$$= \frac{mn}{m^2 m^2 - 4mn + 9b^2}$$

$$m^2 n^2 - 6(m \cdot b \cdot b) \cdot b + b^2$$

$$m^2 n^2 - 6mn + 9b^2 + b^2$$

$$m^2 n^2 - 6mn + 9b^2$$

$$b = \sqrt{m} \cdot k$$

$$4b^2: m \quad 4b^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$4b^2$$

$$m^2 n^2 - 6mn \sqrt{m} \cdot k + m k^2$$

$$4b^2: m$$

$$b: \sqrt{m}$$

$$a: \sqrt{m}$$

$$ab: m$$

$$\frac{a}{b^2} + \frac{1}{b}$$

$$a: b^2$$

$$\frac{a^2}{b^2} - 6 \frac{a}{b} + 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

№6

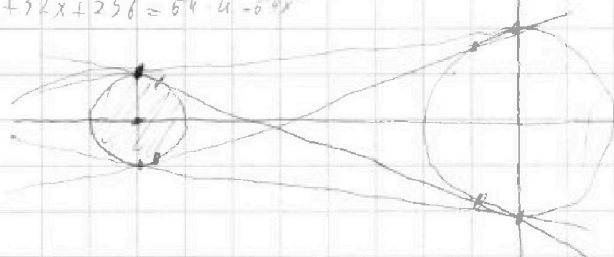
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+b)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$6\sqrt{x^2 + 32x} = 0 \quad x = 0$$

$$\frac{1}{8}x + 2 = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{Реш}$$

$$x + 16 = 8\sqrt{4 - x^2} \quad \text{Реш}$$

$$x^2 + 32x + 256 = 64 - 4 - 64x^2$$



$$\frac{1}{8}x + 2 = x^2 + y^2 - 4 \quad (0; 2) \quad \text{Реш}$$

$$x^2 - \frac{1}{8}x + y^2 - 6 = 0 \quad z =$$

$$\frac{1}{8}x + 2 = \sqrt{4 - x^2}$$

$$a^2x^2 + 2akx + k^2 = 4 - x^2$$

$$a^2x^2 + 2akx + k^2 = 4 - x^2$$

$$a^2k^2 - a^2k^2 - 4a^2 - 4 + k^2 = 0$$

$$4a^2 - 4 = k^2$$

$$k = 2\sqrt{a^2 - 1}$$

$$ax + k = \sqrt{1 - (x+b)^2}$$

$$ax^2 + 2abx + b^2 = 1 - (x+b)^2$$

$$x^2 + 10bx + 4$$

$$x^2(a^2 + 1) + 2abx + b^2 + k^2 + 63 = 0$$

$$\Delta_1 = a^2k^2 + 25abk + 64 - a^2k^2 - k^2 - 63a^2 - 63 = 0$$

$$16ak + 1 - k^2 - 63a^2 = 0 \quad \text{Реш}$$

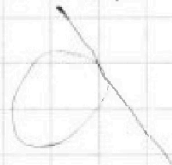
(1)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ (x+b)^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4 \\ (x+b)^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$25x + 54 + 10b = 0$$

$$\begin{aligned} (x+b)^2 &\leq x^2 \\ \sqrt{4 - x^2} &= \sqrt{1 - (x+b)^2} \\ 4 - x^2 &= 1 - (x+b)^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (x, y) &= (x, y) \\ (0, 2) &= (x, y) \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 10b} &= \sqrt{x^2 + y^2 - 10b} \\ &= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (x_0^2 + y_0^2 - 10b) \end{aligned}$$

$$y = ax + 10b$$

$$y = \frac{1}{8}x + 2 \quad \begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ b = \frac{1}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{8} \\ b = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$(1; 8) \quad 1 = 1 + 2 \quad \text{Реш}$$

$$(0, 2) \quad 0 = 0 + 2 \quad \text{Реш}$$

$$y = \frac{3}{8}x + 2 \quad 3 = -3 + 2 \quad \text{Реш}$$

$$(1; 8) \quad 1 = 1 + 2 \quad \text{Реш}$$

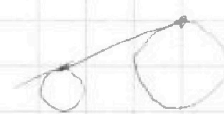
$$y^2 = k_1^2$$

$$y = \pm \sqrt{k_1^2}$$

$$\frac{1}{16}x + 26$$

$$k^2 - 16ak - 1 + 63a^2 = 0 \quad | 4 - 32a - 1 + 63a^2 = 0$$

$$4a^2 - 16a + 25a^2 - 1 + 63a^2 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

N1

$$a, b, c \in \mathbb{N}: ab = 2^{14} \cdot 7^{10}; bc = 2^{17} \cdot 7^{11}; ac = 2^{20} \cdot 7^{17}$$

$$\begin{cases} ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \text{ км} \\ bc = 2^{17} \cdot 7^{11} \text{ м} \\ ac = 2^{20} \cdot 7^{17} \text{ н} \end{cases}$$

$$x \Rightarrow a^2 b^2 c^2 = 2^{51} \cdot 7^{84} \text{ км м н}$$

$$\begin{aligned} abc &= \sqrt{2^{51} \cdot 7^{84}} \text{ км м н} \in \mathbb{N} \\ &= 7^{32} \sqrt{2^{51} \text{ км м н}} \\ &\quad \text{км м н с н} \end{aligned}$$

$$\sqrt{2^{51}} = 2^{25}$$

значит можно
было найти число
корней км м н: 2
м н (км м н): км м н: 2
км м н = 2
при км м н = 7 корень
существенно

N2

$\frac{a}{b}$ несократимая дробь ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$)

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

$$a^2 - 6ab + b^2 = (a+b) \cdot m$$

$$D_1 = 9b^2 - c^2 = 4b^2$$

$$a_{1,2} = \frac{3b \pm 2b}{2}$$

$$ab = k \cdot m$$

$$a^2 - 6ab + b^2 = n \cdot m$$

$$a^2 - 6ab + b^2 \mid a+b$$

$$\begin{aligned} a+b &= x & x^2 &= a^2 + b^2 + 2xy \\ ab &= y & x^2 - 8y &= 2am \\ \frac{x}{x^2 - 8y} &= \frac{k \cdot m}{k^2 m^2 - 8nm} \\ &= \frac{k}{k^2 m - 8n} \end{aligned}$$