



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N1

$$ab = k \cdot 2^{14} \cdot 4^{10}$$

$$bc = t \cdot 2^{14} \cdot 4^{14}$$

$$ac = \ell \cdot 2^{20} \cdot 4^{34}$$

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 = k^2 t^2 \ell^2 \cdot 2^{14+14+20} \cdot 4^{10+14+34} = k^2 t^2 \ell^2 \cdot 2^{54} \cdot 4^{64}$$

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 \geq 2^{52} \cdot 4^{64} \quad \Leftrightarrow \quad abc \geq 2^{26} \cdot 4^{32}$$

Пусть $a = 2^{a_1} \cdot 4^{a_2}$, $b = 2^{b_1} \cdot 4^{b_2}$, $c = 2^{c_1} \cdot 4^{c_2}$.

При $(a_1=8, b_1=6, c_1=12)$ достигается минимальное x_2 .

$$(abc = 2^{x_1} \cdot 4^{x_2}).$$

Пусть $[x]_4$ - максимальная степень 4, на которую делится x .

$$\text{Получим } [ab]_4 + [bc]_4 \geq [ac]_4 \geq 34$$

$$\Rightarrow [abc]_4 = [ab]_4 + [bc]_4 + [ac]_4 \geq 2[ac]_4 = 2 \cdot 34$$

$$\Rightarrow [abc]_4 \geq 34. \text{ Получается } (a_4=20, b_4=0, c_4=14).$$

$$\begin{cases} a = 2^8 \cdot 4^{20} \\ b = 2^6 \\ c = 2^{12} \cdot 4^{14} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } 2^{26} \cdot 4^{32}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2

~~$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$~~ $\left[\frac{x}{y}\right]$ - максимальное число, на которое
делится x и y $\Rightarrow \max(a+b, 8ab)$
сопоставляется градус.

$$\left[\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}\right] = \left[\frac{a^2-6ab+b^2}{a+b}\right] = \left[\frac{(a+b)^2-8ab}{a+b}\right] = \left[\frac{8ab}{a+b}\right]$$

Уб-ие: $\max(8ab, a+b) = 8$ если $(a, b) = 1$.

Док-во: Пусть можно больше, тогда $(ab, a+b) > 1$,

$$\Rightarrow \exists t > 1: \begin{cases} ab : t \\ a+b : t \end{cases} \Rightarrow \exists k | t: \begin{cases} (a_{\max} b) : k \\ a+b : k \end{cases}$$

$\Rightarrow (a, b) \geq k > 1$ Противоречие

$\Rightarrow \max m = 8$ Пример: $a = 4, b = 1$

$$\left[\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}\right] = \left[\frac{1+4}{1-4+16}\right] = \left[\frac{5}{12}\right] = 0$$

Ответ: 8

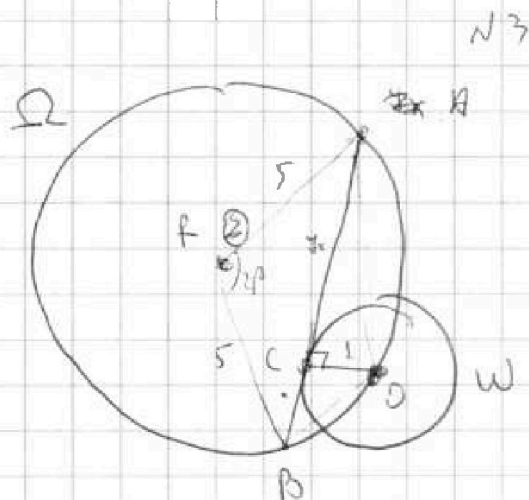
На одной странице можно оформлять **только одну задачу.**

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Пусть $BC = x$, $AC = x$

$$AR = BR = 5 \quad (R - \text{unip } R)$$

0 - yznp w

$$S_{ABO} = \frac{1 \cdot 8x}{1} = 4x$$

$\angle ABO = 2$

$$u_x = S_{ABO} = \frac{BO \cdot AO}{L} \sin \alpha = \frac{\sqrt{(1+x)^2 + (9+x^2)}}{2} \cdot \sin \alpha$$

$$AB^2 = R^2 \quad AR^2 + BR^2 - 2AR \cdot BR \cos \angle BRA$$

$$\angle B \cap A = 2(180 - 2) \quad \cos \angle B \cap A = \cos(360^\circ - 4) = \cos 4$$

$$6hx^2 = 50(1 - \cos 2t)$$

$$64x^2 = (2r_{ABO})^2 = (1+x^4)(49+x^2) \cdot \sin^2 \theta$$

$$1 - \cos 2\theta = 1 - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 2 \sin^2 \theta$$

$$(1+x^1)(49+x^2) \cdot \sin^2 = 100 \sin^2$$

$$\Rightarrow (1+x^2)(49+x^2) = 100 \quad x=1 \quad (x>0)$$

$$\Rightarrow AB = 8x = 8.$$

Our Gen: ~~8~~ 8

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

$$a = 2x^2 - 5x + 3, \quad b = 2x^2 + 2x + 1$$

$$f_a - f_b = 2 - 4x, \quad \text{но } a - b = 2 - 4x$$

$$a - b = (f_a - f_b)(f_a + f_b) = f_a - f_b \Leftrightarrow \begin{cases} f_a - f_b = 0 \\ f_a + f_b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 - 4x = 0 \\ (f_a - f_b) + 2f_b = 0 \end{cases} \quad \text{I: } x = \frac{2}{4}$$

$$2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 4x \Rightarrow 2 \quad x > \frac{2}{4}$$

$$8x^2 + 8x + 4 = 49x^2 - 14x + 4$$

$$41x^2 - 22x = 0 \quad x = 0, \frac{22}{41} \quad 0 < \frac{2}{4}$$

$$\frac{22}{41} \vee \frac{2}{4}$$

$$1104 \vee 41$$

Получили

$$\text{Ответ: } x = \frac{2}{4}, \frac{22}{41}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N5

$$2x_2 - 2x_1 + y_1 - y_2 = 12 \Leftrightarrow 2dx + dy = 12.$$

Примем и плоскости разреза в 2 разга по ох.

Тогда $dx + dy = 12$. Параметрами возьмем:

$(-24, 24)$ $(6, 24)$

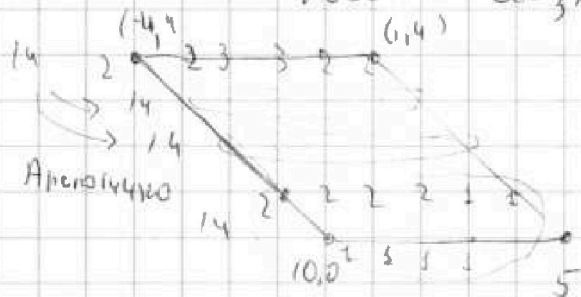
$(9, 0)$

$(30, 0)$

Теперь ~~кривыми~~ ~~схем~~
по ~~большим~~ ~~маленьким~~

Заметим единичный отрезок на 6 раз больше

Тогда в новых обозначениях $dx + dy = 2$.



Теперь можем посчитать
руками. Поднимем в каждой
точке кол-во направлений ей
меньше, не ~~превее~~ ~~нее~~.

Итого: $4 \cdot 14 = 56$.

Ответ: 56.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



МФТИ

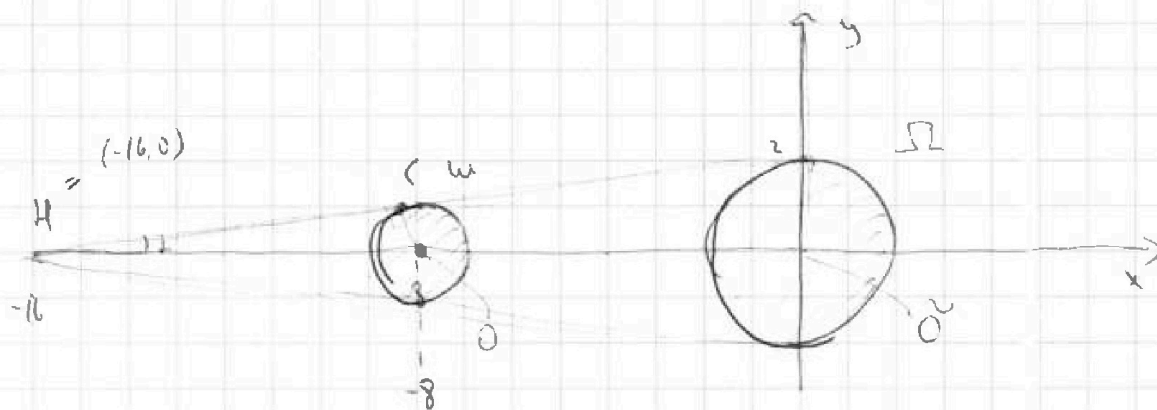
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ax - y + 10b = 0$

N6

$f(x, y) = ((x+8)^2 + y^2 - 1)((x^2 + y^2 - 4)) \leq 0$



Закрашенные области соответствуют $f(x, y) \leq 0$,
а граница: $f = 0$. Два решения $\Leftrightarrow$ прямая

$ax - y + 10b$ касается двух окружностей. Таких прямых

4: две внутри, две внеш, но они полностью

симметричны (исходят a и $-a$). Найдем

внеш. Рассмотрим точку с фиксом в H и $k=2$

О перейдет в O' и $2HO = 2HO' \Rightarrow O' = O$, а

т.к. $R_\omega = \frac{1}{2} R_\Omega$, то перейдет в $\Omega \Rightarrow$ внеш

касательная проходит через $H = (-16, 0)$.

Поскольку она касается ω в C . Тогда $HC = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = a \quad \alpha = 2 \angle HO$

$HC = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OC}{HC} = \frac{1}{\sqrt{65}}$

а значит $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{65}} = \frac{1}{\sqrt{65}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

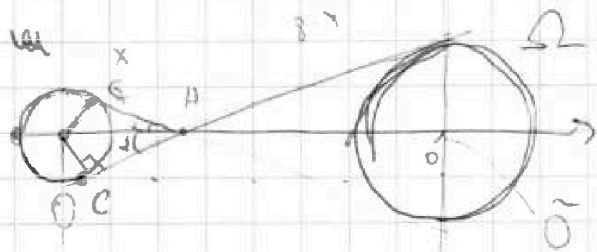
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!



↓ продолжим



$$\text{Пусть } H \in [O, \tilde{O}]$$

$$HO = \frac{8}{3}, \quad H\tilde{O} = \frac{16}{3}$$

Тогда аналогично

помогает в у.Н с $k=-2$ переводит и в Ω

Пусть касание с и в С. $\angle = \angle OHC$

$$\tan \angle = a = \frac{4}{HC} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{64-9}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{55}}$$

Выводим. Поскольку что в силу непрерывности
есть нули в $\forall a$ из этих четырех.

$$\text{Ответ: } a = \pm \frac{1}{\sqrt{63}} \text{ и } \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$$

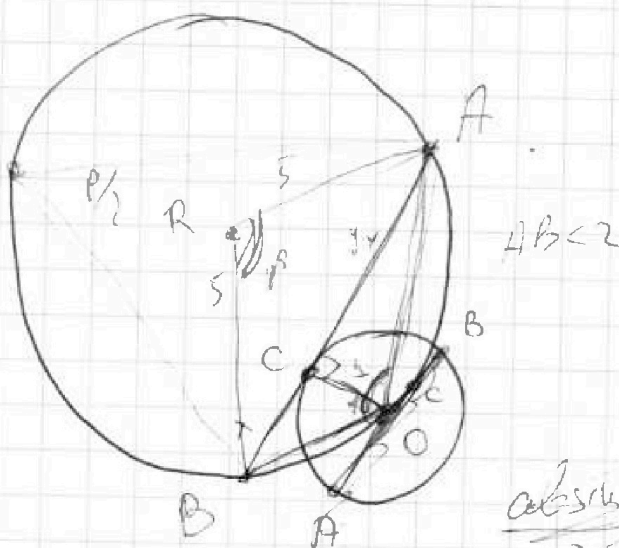


Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



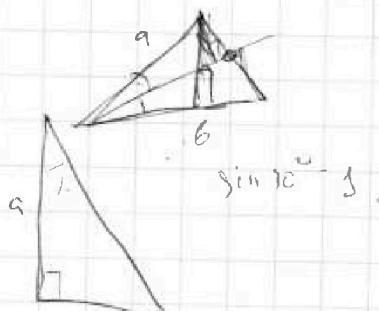
$$\S \quad \angle ABO = 4x = \sqrt{1+x^2}$$

$\frac{1}{2} \times 10 = 5$

$$\sqrt{1+x^2} \sqrt{49+x^2} \sin 2$$

$$8x = \sqrt{(1+x^2)(\log x^4) \sin x} \quad x = 1 \text{ AB}$$

$$P_x = \frac{1}{\sqrt{1 + 64x^2 + x^4}}$$



$$2 \cdot 5^2 - 2 \cdot 5^2 \cos \beta = (8 \times 10^3)^2 + 2 = 1 \times 10^6$$

$$\beta = 2(180 - 2)$$

$$80(1 - \cos 2t) = 64x^2$$

$$\cos(360 - 21) = \cos(21)$$

$$\frac{64x^2}{(1+x^2)(49+x^2)} = \frac{\sin^2 2}{(1+x^2)}$$

(c) 4

$$50(1 - \cos 2) = \sin^2 2 (1 + x^2)(49 + x^2)$$

$$1 - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 2\sin^2 \theta$$

$$100 \sin^2 \theta = \sin^2 \delta$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 14 \\ b_2 + c_2 = 18 \\ a_2 + c_2 = 20 \end{cases}$$

$$a_2 = 8, b_2 = 6, c_2 = 12$$

$$2a_2^2 = 14 + 20 - 18$$

$$a_2 = 8 + 10 - 9 = 8$$

$$(ab, a \cdot b)$$

$$ab \cdot K \Rightarrow a \cdot b : K$$

$$\begin{cases} a_y + b_y = 20 \\ b_y + c_y = 17 \\ a_y + c_y = 34 \end{cases}$$

$$2b_y = 10$$

$$\frac{a \cdot b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a \cdot b}{(a-b)^2 - 4ab}$$

$$\frac{a^2 - 6ab + b^2}{a+b}$$

$$\frac{1+b}{b^2 - 6b + 1}$$

$$\frac{(ab)^2 - 8ab}{a+b} \Rightarrow (8ab, aab) > 1.$$

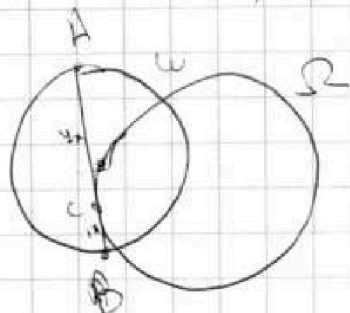
$$(a, b) = 1.$$

$$(3a+1)(b+1)$$

$$ab(a+b)$$

$$(a+1)(b+1) = ab + a + b + 1$$

$$(a+1)(b+1) - 1, a \neq b$$



$$\frac{1+y}{1-6 \cdot 4+y^2} = \frac{8}{1-42+44} = \frac{8}{5-3}$$

$$2x^2 - 3x + 2$$

$$(2x-1)(x-2)$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{9-16}}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



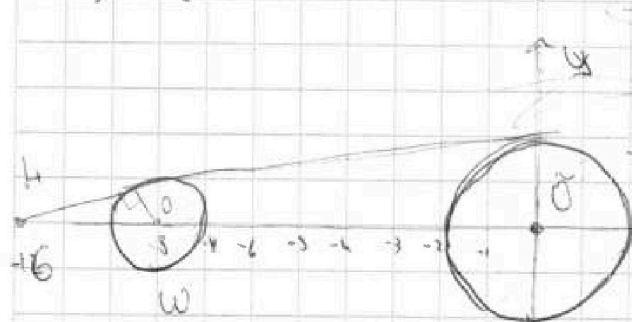
$$x - y + 10 = 0.$$

$$dx = -a dy = 0$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dy} = x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$



$$2x = 8 - x$$

$$x dx = dy$$

$$\frac{dy}{dx} = x$$

Закрытые области
- те, в которых $f < 0$.
На контуре $f = 0$.

Ровно два решения $\exists$ только если две касательные
к обеим окружностям. Таких 4, но поскольку
обе окружности имеют центр в 0 по y
можно искать только 2 (а и -а под углом).

Гомология с центром в $O'(H, 0)$ и $k=1$

переводит одну точку $u \rightarrow \Omega$ т.к.

$$HO = 8, \Rightarrow HO' = 16 \Rightarrow O' = \vec{0}, \text{ а } 2R_u = R_\Omega.$$

$\Rightarrow$ касательная окружностям внешняя касательная проходит
через M .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten solutions on grid paper:

Top Left: A circle with center \$O\$ and radius \$r\$. Points \$N\$ and \$M\$ are on the circle. A horizontal line segment \$NM\$ is drawn. The distance from \$O\$ to \$NM\$ is \$2\$. The distance from \$O\$ to \$M\$ is \$r\$. The distance from \$O\$ to \$N\$ is \$r\$. The distance from \$O\$ to the midpoint of \$NM\$ is \$2\$. The distance from \$O\$ to the midpoint of \$NM\$ is \$2\$. The distance from \$O\$ to the midpoint of \$NM\$ is \$2\$.

Top Right: A circle with center \$O\$ and radius \$r\$. Points \$N\$ and \$M\$ are on the circle. A horizontal line segment \$NM\$ is drawn. The distance from \$O\$ to \$NM\$ is \$2\$. The distance from \$O\$ to \$M\$ is \$r\$. The distance from \$O\$ to \$N\$ is \$r\$. The distance from \$O\$ to the midpoint of \$NM\$ is \$2\$. The distance from \$O\$ to the midpoint of \$NM\$ is \$2\$. The distance from \$O\$ to the midpoint of \$NM\$ is \$2\$.

Middle Left: A circle with center \$O\$ and radius \$r\$. Points \$N\$ and \$M\$ are on the circle. A horizontal line segment \$NM\$ is drawn. The distance from \$O\$ to \$NM\$ is \$2\$. The distance from \$O\$ to \$M\$ is \$r\$. The distance from \$O\$ to \$N\$ is \$r\$. The distance from \$O\$ to the midpoint of \$NM\$ is \$2\$. The distance from \$O\$ to the midpoint of \$NM\$ is \$2\$. The distance from \$O\$ to the midpoint of \$NM\$ is \$2\$.

Middle Right: A circle with center \$O\$ and radius \$r\$. Points \$N\$ and \$M\$ are on the circle. A horizontal line segment \$NM\$ is drawn. The distance from \$O\$ to \$NM\$ is \$2\$. The distance from \$O\$ to \$M\$ is \$r\$. The distance from \$O\$ to \$N\$ is \$r\$. The distance from \$O\$ to the midpoint of \$NM\$ is \$2\$. The distance from \$O\$ to the midpoint of \$NM\$ is \$2\$. The distance from \$O\$ to the midpoint of \$NM\$ is \$2\$.

Bottom Left: A circle with center \$O\$ and radius \$r\$. Points \$N\$ and \$M\$ are on the circle. A horizontal line segment \$NM\$ is drawn. The distance from \$O\$ to \$NM\$ is \$2\$. The distance from \$O\$ to \$M\$ is \$r\$. The distance from \$O\$ to \$N\$ is \$r\$. The distance from \$O\$ to the midpoint of \$NM\$ is \$2\$. The distance from \$O\$ to the midpoint of \$NM\$ is \$2\$. The distance from \$O\$ to the midpoint of \$NM\$ is \$2\$.

Bottom Right: A circle with center \$O\$ and radius \$r\$. Points \$N\$ and \$M\$ are on the circle. A horizontal line segment \$NM\$ is drawn. The distance from \$O\$ to \$NM\$ is \$2\$. The distance from \$O\$ to \$M\$ is \$r\$. The distance from \$O\$ to \$N\$ is \$r\$. The distance from \$O\$ to the midpoint of \$NM\$ is \$2\$. The distance from \$O\$ to the midpoint of \$NM\$ is \$2\$. The distance from \$O\$ to the midpoint of \$NM\$ is \$2\$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$6x - y + 106 = 0 \quad (x+1)(2x)(x-1)$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1) (x^2 + y^2 - 4) \leq 0.$$

$$(2x-3)/(x+1)$$

$$\frac{9}{2} + 3 + 1(1 \cos \alpha) =$$

$$x^2 + y^2 \leq R^2$$

$$-2 \quad 3$$

$$8 + 10 + 3$$

$$(-2 \sin \alpha, 2 \cos \alpha)$$

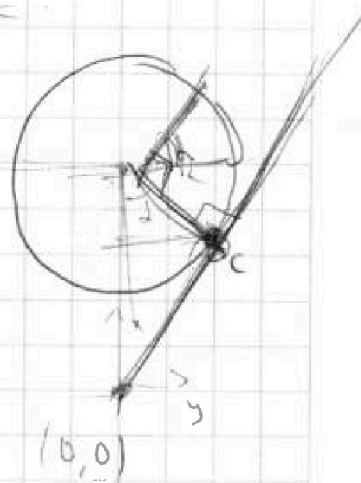
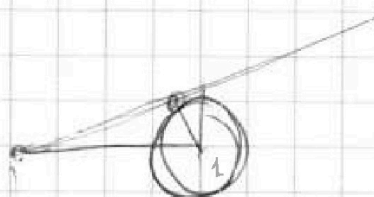
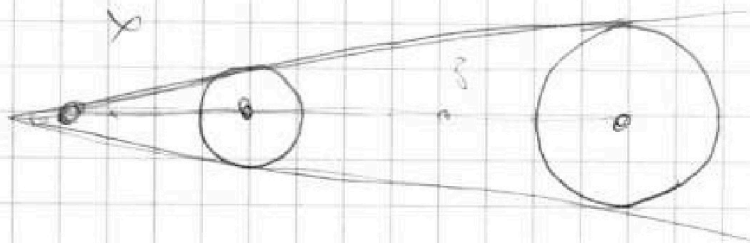
$$\left(\frac{5}{9}, 0\right) \quad \left(0, \frac{5}{9}\right)$$

$$x_A \left(\frac{3}{2}, 2\right)$$

$$2(8 - \sin \alpha)$$

$$9x^2 - 5x \leq 0 \quad x + 8 = 2x$$

$$x =$$



$$y_2 = \frac{8 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$C = (e - R \cos \alpha, R \sin \alpha)$$

$$a = \frac{dy}{dx} = \frac{R \sin \alpha}{e - R \cos \alpha} = \cot \alpha$$

$$x = -1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

$\sqrt{4+9x}$
 $\neq 28$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{(2x-3)(x-1)(2x^2+2x+1)} =$$

$$= 4 + 49x^2 - 28x$$

$$45x^2 - 25x = -2\sqrt{(2x-3)(x-1)(2x^2+2x+1)}$$

$$25x^2(9x-5)^2 = 4(2x-3)(x-1)(2x^2+2x+1)(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)$$

$$45x^2 - 25x \leq 0 \quad 2x \leq 5 \quad 9x^2 - 5x \leq 0$$

$$x \in [0, \frac{5}{9}]$$

$$25x^2(81x^2 - 90x + 25) = 4(4x^4 - 10x^3 + 6x^2 + 4x^3 - 10x^2 + 6x + 2x^2 - 5x + 3)$$

$$-20 + 4x^3 - 10x^2 \quad 105 - 18 = 87 \quad 144 - 84$$

$$120 + 21$$

$$25x^2(81x^2 - 90x + 25) = 4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)$$

$$= 4(4x^4 - 10x^3 + 6x^2 + 4x^3 - 10x^2 + 6x + 2x^2 - 5x + 3)$$

$$= 4(4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3) = 25x^2(81x^2 - 90x + 25)$$

$$\Leftrightarrow (2025 - 16)x^4 + (-2250 + 24)x^3 + (625 + 8)x^2$$

$$105 - 18$$

$$150 - 3 - 40 - 35 + 18.$$

$$105 - 105 + 18 = -90$$

$$60 - 18 + 42 + 49 \sqrt{108}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4(2x^2 - 5x + 3) = 3 - 4x \quad 100$$

$$8x^2 - 20x + 12 = 3 - 4x$$

$$8x^2 - 13x + 9 = 0$$

$8x$

$$100 - 32.9$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

Пусть $2x^2 - 5x + 3 = a$, $2x^2 + 2x + 1 = b$.

Тогда $a - b = 2 - 4x = \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

$$a = b$$

$$2 - 4x = 1$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$4x = 3$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{3}{4}$$

Проверяем, что оба выражения

$$2x^2 + 2x + 1 > 0 \quad \forall x$$

$$2x^2 - 5x + 3 = (2x - 3)(x - 1) \geq 0 \quad \text{при } x \in [1, \frac{3}{2}]$$

$$\sqrt{2 \cdot \frac{9}{16} - \frac{15}{4} + 3} = \sqrt{2 \cdot \frac{9}{16} + \frac{6}{4} + 1} = -1$$

$$\sqrt{\frac{18 - 15 \cdot 4 + 3 \cdot 16}{4}} = \sqrt{\frac{18 + 6 \cdot 4 + 16}{4}} = -1$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

II

$$\begin{aligned} \sqrt{a} - \sqrt{b} &= 2 - 4x \\ 1 &= \sqrt{a} + \sqrt{b} = 2 - 4x + 2\sqrt{b} \end{aligned}$$

$$1 = 2 - 4x + 2\sqrt{b}$$

$$4x - 1 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \Rightarrow 49x^2 - 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 4$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

