



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порица QR-кода недопустима!

$$a, b, c \in \mathbb{N}, \text{ а в: } 2^{15} \cdot 7^{11}, \text{ в с: } 2^{17} \cdot 7^{18}, \text{ а с: } 2^{23} \cdot 7^{39}$$

1) пусть a', b', c' — степени входящие 2 в a, b, c соответственно ($a', b', c' \in \mathbb{Z}, a', b', c' \geq 0$)

Из условия следует, что:

$$\begin{cases} a' + b' \geq 15 \\ b' + c' \geq 17 \\ a' + c' \geq 23 \end{cases}, \text{ значит } a' + b' + c' \geq \frac{15 + 17 + 23}{2} = \frac{55}{2} = 27.5$$

Поскольку a', b', c' — целые, то $a' + b' + c' \geq 28$.

$$a' + b' + c' = 28, \text{ если } a' = 10, b' = 5 \text{ и } c' = 13$$

2) пусть a', b', c' — степени входящие 7 в a, b, c соответственно ($a', b', c' \in \mathbb{Z}, a', b', c' \geq 0$)

Из условия следует, что

$$\begin{cases} a' + b' \geq 11 \\ b' + c' \geq 18 \\ a' + c' \geq 39 \end{cases}, \text{ значит } a' + b' + c' \geq a' + c' \geq 39.$$

$$a' + b' + c' = 39, \text{ если } a' = 11, b' = 0, c' = 28.$$

Значит $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$. (пример, когда достигается равенство: $a = 2^{10} \cdot 7^{11}, b = 2^5, c = 2^{13} \cdot 7^{28}$).

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$(a, b) = \text{НОД}(a, b)$. По условию, $(a, b) = 1$

если дробь $\frac{a+b}{a^2-4ab+b^2}$ можно сократить на m ,

то $(a+b, a^2-4ab+b^2) : m$. Значит наибольшее
такое m — это $(a+b, a^2-4ab+b^2)$.

$$(a+b, a^2-4ab+b^2) = (a+b, (a+b)^2 - 6ab) = \\ = (a+b, 6ab) = m.$$

если $a : p$ (p — простое),
то $b : p$ ($(a, b) = 1$), значит $a+b : p$

то есть $(a+b, 6ab) = 1$, значит

$m = (a+b, 3)$. значит $m \leq 3$.

Пример, когда $m = 3$:

$a = 1, b = 8: (a, b) = 1,$

$$\frac{a+b}{a^2-4ab+b^2} = \frac{8+1}{1+64-4 \cdot 8} = \frac{9}{65-32} = \frac{9}{33} = \frac{3}{11}.$$

Числитель и знаменатель можно поделить
на 3.

Ответ: 3.

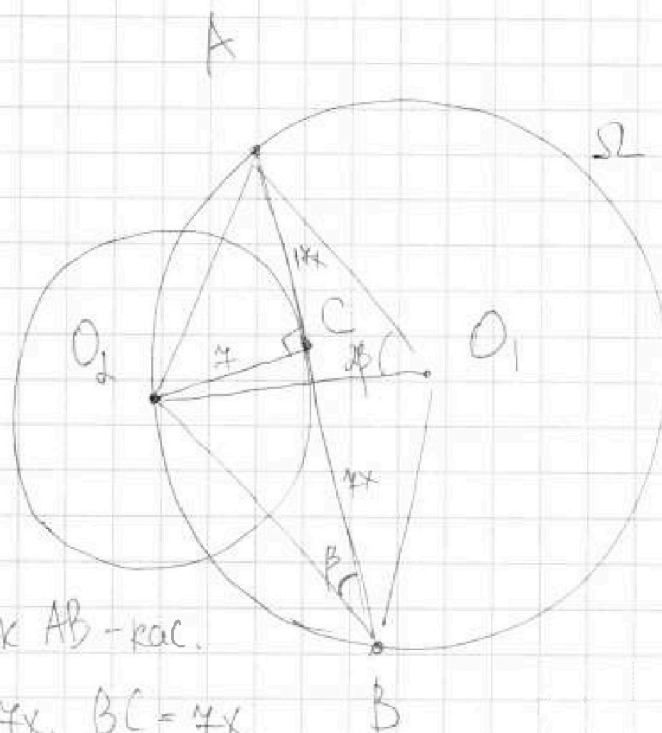
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) $O_1C \perp AB$, т.к. AB — кас.

2) Пусть $AC = 4x$, $BC = 4x$.

3) По т. Пифагора: $O_2B = \sqrt{4^2 + 16x^2} = 4\sqrt{x^2 + 1}$.

4) $\sin \beta = \frac{4}{4\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

5) $\cos \beta = \frac{4x}{4\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

6) $\cos \angle O_1O_2A = \cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta =$
 $= \frac{x^2}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

7) $O_1A^2 = 4^2 + 16x^2$
 по т. Пифагора ($\triangle AOC$)

8) $O_1A^2 = O_1O_2^2 + AO_2^2 - 2O_1O_2 \cdot AO_2 \cdot \cos 2\beta =$
 по т. косинусов $\triangle O_1AO_2$
 $= 2 \cdot 16 - 2 \cdot 16 \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 2 \cdot 16 \left(1 - \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right) =$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$= 2 \cdot 13^2 \left(\frac{x^2 + 1 - x^2 + 1}{x^2 + 1} \right) = \frac{2 \cdot 13^2 \cdot 2}{x^2 + 1} = \frac{26^2}{x^2 + 1} =$$

$$= OA^2 = 4^2 + 17^2 x^2$$

$$26^2 = (x^2 + 1)(49 + 17^2 x^2)$$

$$26^2 = 49x^2 + 49 + 17^2 x^4 + 17^2 x^2$$

$$17^2 x^4 + x^2(49 + 17^2) - (26^2 + 49) = 0$$

$$289x^4 + D = (49 + 17^2)^2 + 4(26^2 - 49) \cdot 17^2 =$$

$$= 49^2 + 17^4 + 2 \cdot 49 \cdot 17^2 + 4 \cdot 17^2 \cdot 26^2 - 4 \cdot 49 \cdot 17^2 =$$

$$= 49^2 + 17^4 + 4 \cdot 17^2 \cdot 26^2 - 2 \cdot 49 \cdot 17^2 =$$

$$= 49^2 + 17^2(17^2 - 98) + 4 \cdot 17^2 \cdot 26^2 =$$

То есть $\frac{26^2}{x^2 + 1} = 49 + 289x^2$

$$26^2 = 13^2 \cdot 4 = 169 \cdot 4 = 676$$

$$\frac{676}{x^2 + 1} = 49 + 289x^2$$

Заметим, что $x = 1$ — корень.

$$\frac{676}{2} = 338 = 289 + 49$$

Других корней нет, т.к. в трехчлене (относительно x) старший коэффициент свободной > 0

чем < 0 , то есть второй корень < 0 . (т.е. нет)

$$g) AB = 17x + 4x = 24x = 24$$

Ответ: 24.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

Пусть $3x^2 - 6x + 2 = a$ ($a \geq 0$), $3x^2 + 3x + 1 = b$ ($b \geq 0$)

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b.$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1) = 0.$$

$$\begin{cases} \sqrt{a} = \sqrt{b} & (1) \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \end{cases}$$

$$(1) \quad 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 \quad (4 \geq 0)$$

$$9x = 1 \quad \text{Пусть } x = \frac{1}{9} : \quad 3x^2 + 3x + 1 = 3 \cdot \frac{1}{81} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1 > 0$$

$$x = \frac{1}{9}.$$

$$\underline{x = \frac{1}{9}} \quad - \text{ корень}$$

$$(2) \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} & (3) \\ 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$(3) \quad -9x = -2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1) \quad u, \quad x \geq 0 \quad *$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$69x^2 - 2(6x) - 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 36 + 4 \cdot 69 = 312 = 4 \cdot 78 = 4 \cdot 2 \cdot 39$$

$$x_1 = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} > 0$$

$$x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} < 0 \quad - \text{ не подходит } *$$

$$\begin{cases} x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \quad (4) \end{cases}$$

$$(4) \quad 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$D = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 36 - 24 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{cases} x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \frac{6+2\sqrt{48}}{3 \cdot 23} \stackrel{?}{\leq} \frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

$$6+2\sqrt{48} \stackrel{?}{\leq} 3 \cdot 23 - 23\sqrt{3}$$

$$\rightarrow \underbrace{2\sqrt{48}}_{18} + \underbrace{23\sqrt{3}}_{45} \stackrel{?}{\leq} 63$$

$\rightarrow$ не верно.

$$x = \frac{6+2\sqrt{48}}{69} - \text{корень.}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{9}, \frac{6+2\sqrt{48}}{69}.$$

$$2) \frac{6+2\sqrt{48}}{3 \cdot 23} \stackrel{?}{\geq} \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

$$6+2\sqrt{48} \stackrel{?}{\geq} 23 \cdot 3 + 23\sqrt{3}$$

$$\frac{2\sqrt{48}}{69} \stackrel{?}{\geq} 63 + 23\sqrt{3} \rightarrow \text{не верно.}$$

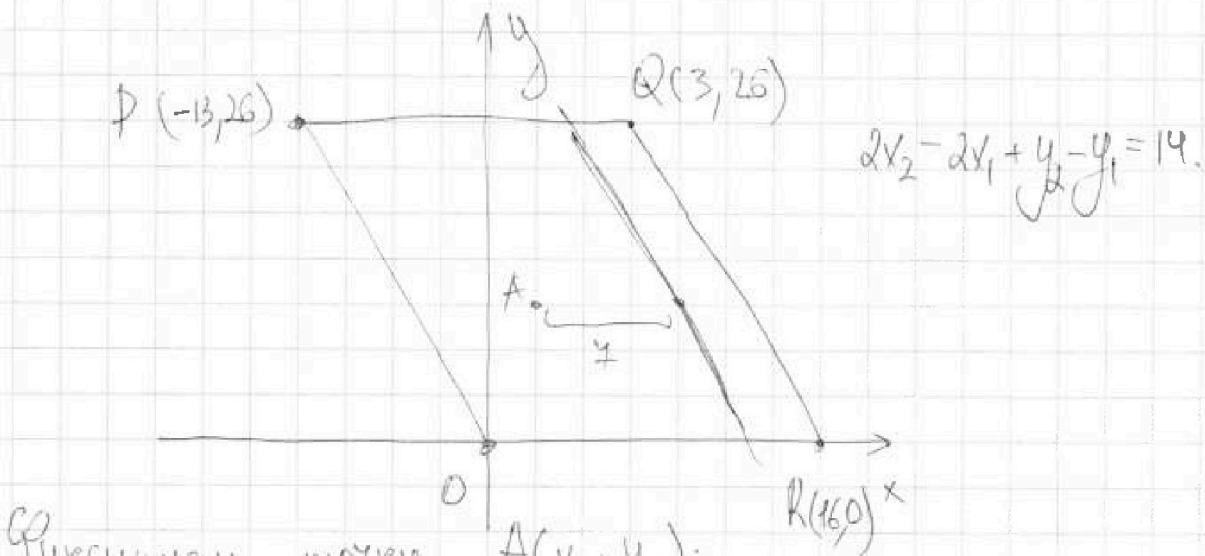
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Фиксируем точку $A(x_1, y_1)$:

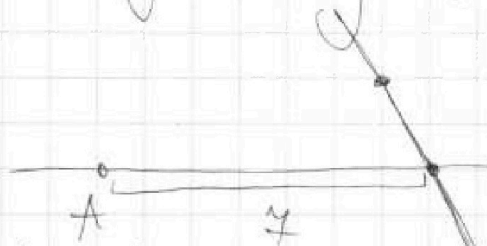
$$2x_2 + y_2 = \frac{14 + 2x_1 + y_1}{\text{const.}} \quad - \text{т.е. это уравнение прямой}$$

Значит все точки B, проходящие где A
лежат на одной прямой, с условием коэффициен-
том -2.

Пусть $y_1 = y_2$ (возьмем такую точку B):

$$2x_2 - 2x_1 = 14$$

$$x_2 - x_1 = 7$$



Т.е. МТ B где $A(x_1, y_1)$ - прямая, проходящая
через $(x_1 + 7, y_1)$ с условием коэффициентом -2.

Такая прямая параллельна PO и QR

Для любой точки A, лежащей из в параллелограмме

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

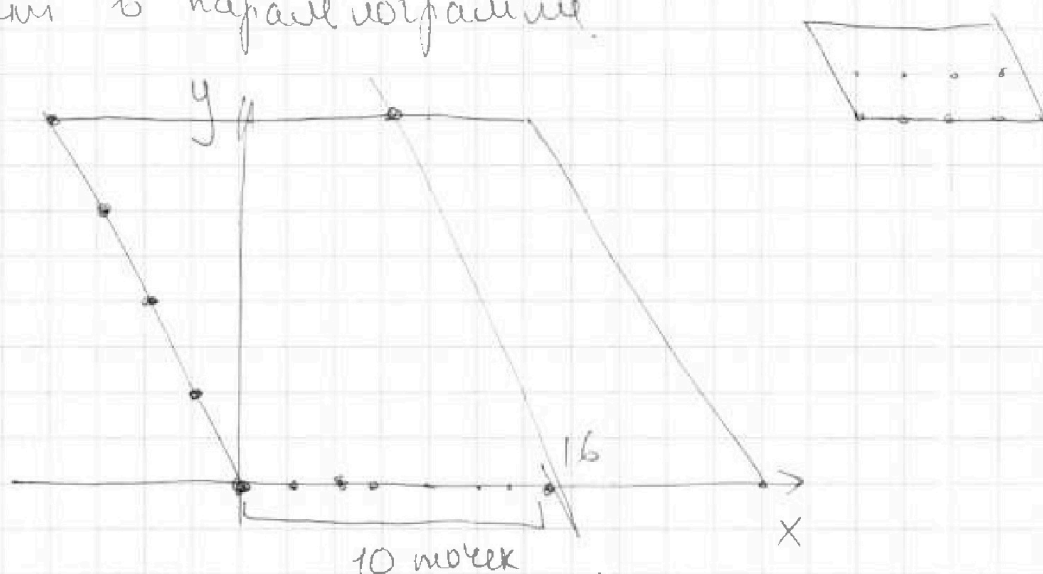
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Поря QR-кода недопустима!

найдется либо 14 точек B , либо 12, если
 y_1 - четно и $x_1 + y_1$ нечетно в параллелограмме,
13 точек B , если y_1 - нечетно и $x_1 + y_1$ нечетно в
параллелограмме, и 0 точек B , если $x_1 + y_1$ не
нечетно в параллелограмме.



проведем прямую через $(3,0)$ параллельно стороне
параллелограмма. Веч точка, лежащая правее
этой прямой, не подходит 0 точек B .

Т.е. точки, которые нас интересуют лежат
на этой прямой или левее.

При четной y -координате таких точек 10,
при нечетной - 8.

То есть всего 18 точек A, B :

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\underbrace{10 \cdot 14}_{\text{клетки } y_1} \cdot 14 + \underbrace{98 \cdot 13}_{\text{клетки } y_1} \cdot 13 = 1960 + 1352 = 3312 + 169 = 3481$$

(покажем, что если (A, B) — подходит, то

(B, A) — не подходит). И.к. выражение $2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1$ меняет знак.

Ответ: 3481.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

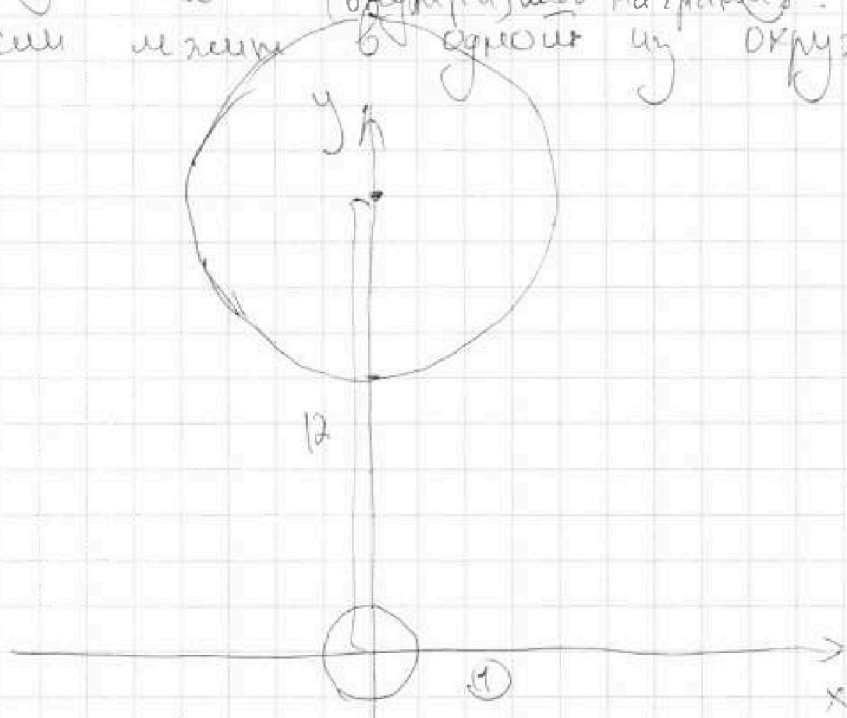
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0. \end{cases}$$

① - окружность с центром $(0,0)$ и радиусом 1

② - окружность с центром $(0,12)$ и радиусом 4.

(x,y) - удовлетворяет второму уравнению,
(внутри) или на границе. Уравнению,
если не лежит в одной из окружностей ① и ②
(① и ② не пересекаются)



$ax+y-8b=0$ - прямая, с условием коэффициентом $-a$.
 $y = -ax + 8b$.

Система имеет 2 решения, если прямая
имеет 2 точки пересечения с кругами,
но есть касается обеих окружностей.

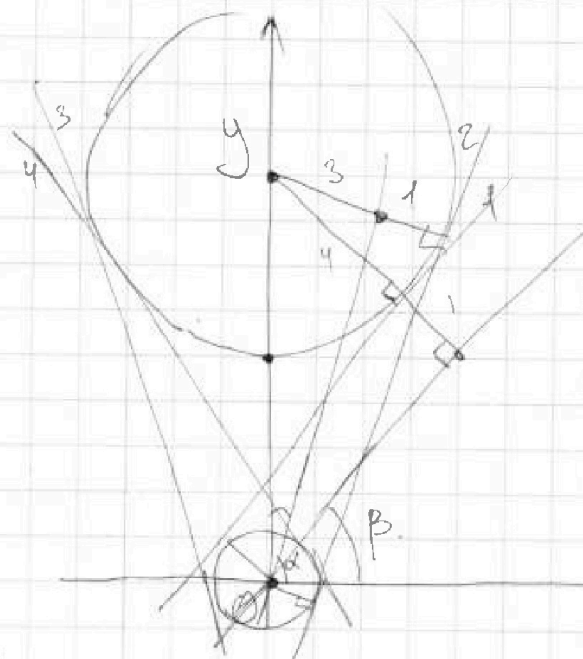
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Найдем угловые коэффициенты a касательных, параллельных перпендикуляру OB . Это можно сделать так, что такая прямая совпадет с касательной.

Очевидно, что $a_4 = -a_1$, $a_3 = -a_2$ (в силу симметрии относительно Oy).

1) Через точку O проведем прямую, параллельную 2.

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{4}\right), a_2 = \tan \alpha = \tan\left(\arccos\frac{1}{4}\right) = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}} = \sqrt{15}.$$

2) Через точку O проведем прямую, параллельную 1.

$$\cos \beta = \sin(90^\circ - \beta) = \frac{5}{12}$$

$$a_1 = \tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2}}{\frac{5}{12}} = \frac{\frac{\sqrt{144 - 25}}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{\sqrt{144 - 25}}{5}.$$

$$= \sqrt{\frac{119}{5}}; -\sqrt{\frac{119}{5}}; \sqrt{15}; -\sqrt{15}.$$

Ответ:

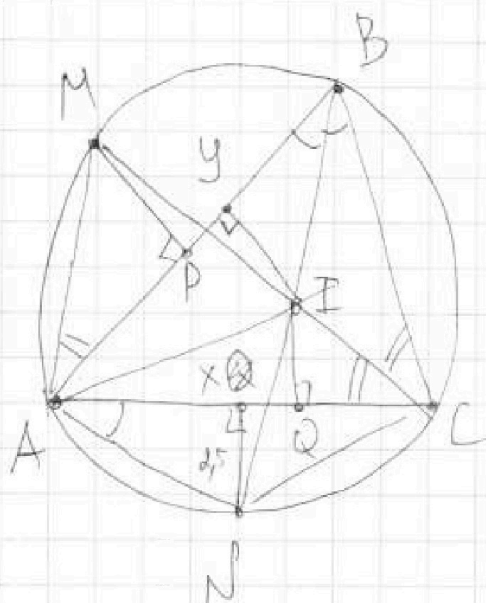
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



- 1) M, I, C - лежат на биссектрисе $\angle C$.
- 2) B, I, N - лежат на биссектрисе $\angle B$.
- 3) $\angle MAB = \angle MCB$
- 4) $\angle NAC = \angle NBC$
- 5) $\triangle AMP \sim \triangle CIQ$, значит $\frac{MP}{R} = \frac{AM}{CI}$
(R - радиус
внеш. окр.)
- 6) Аналогично $\triangle ANX \sim \triangle BUI$: $\frac{XN}{R} = \frac{AN}{BI}$
- 7) По теореме о трезубце: $AN = NI = QN$
- 8) По теореме о трезубце: $AM = MI = BN$
- Значит
- 9) $\deg(I, \text{отнес. окр.}) = BI \cdot IN = MI \cdot CI$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

10) Значит $\frac{AM}{AN} = \frac{BI}{CI}$

11) $\frac{MP}{\cancel{AN}} = \frac{AM \cdot BI}{AN \cdot CI} = \frac{5}{2,5} = 2 = \left(\frac{AM}{AN}\right)^2$

$$\frac{AM}{AN} = \sqrt{2}$$

12) $\frac{AM}{AN} = \frac{\sin \angle ABN}{\sin \angle ACM} = \sqrt{2}$ по м. синусов ($\triangle ABC$)

13)



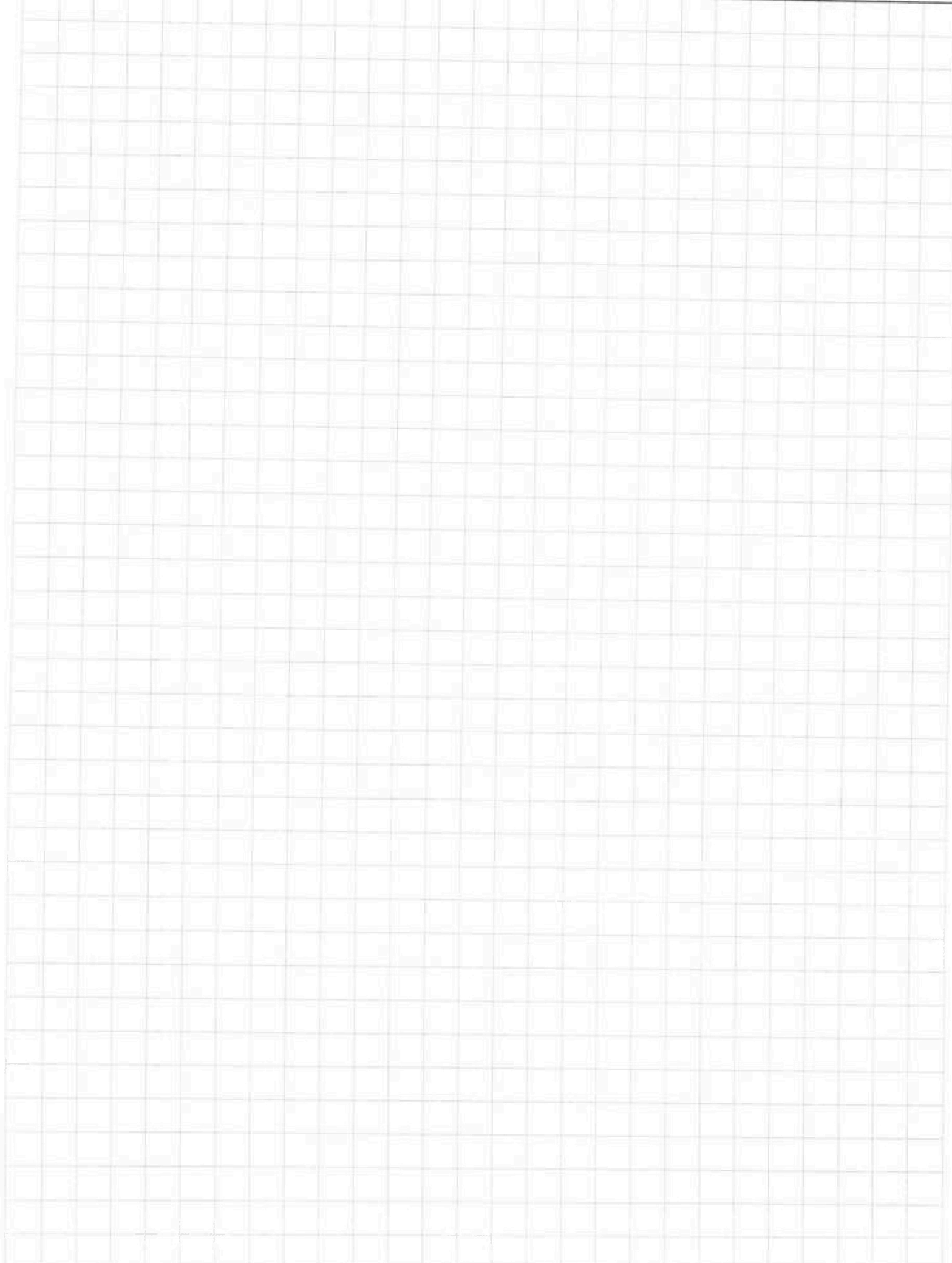
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





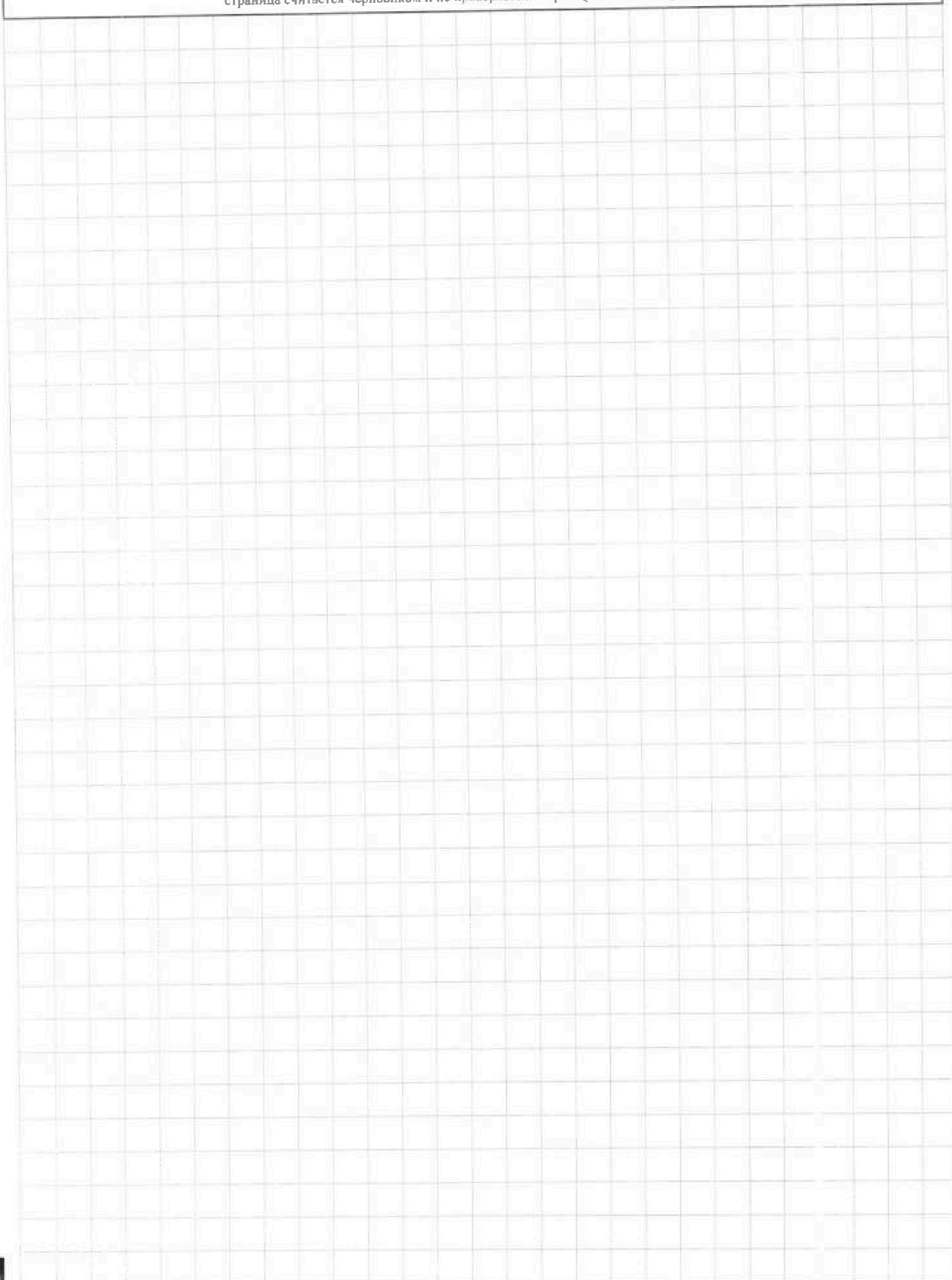
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$ax + y - 8b = 0$$

$$ax + y - 8b = 6$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$$

① ②

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{x_1 y_1 - \text{точка}}{b \text{ (ортогональности)}} = \frac{1}{4}$$

$$① ② > 0$$

$$c^2 = 12^2 - 3^2 = 144 - 9 = 135 \quad y = -ax + 8b$$

ровно 2 решения

4 касания

1 корень

$$x^2 + (y - 12)^2 = 16$$

$$x^2 + (ax + b - 12)^2 =$$

$$= x^2 + a^2 x^2 + b^2 + 144 +$$

$$+ 2abx - 24b - 24ax - 16 = 0$$

$$a^2 (x^2 + (y - 12)^2) + x(2ab - 24a) + b^2 - 24b + 144 - 16 = 0$$

$$= x^2 (a^2 + 1) + 2x(ab - 12a) + b^2 - 24b + 128 = 0$$

$$a^2 - b^2 + 4 = 0$$

1 корень

$$\frac{D}{4} = (ab - 12a)^2 - (b^2 - 24b + 128)$$

$$\begin{array}{r} \times 5 \ 5 \ 1 \\ 9 \ 4 \ 9 \\ 6 \ 4 \ 6 \\ + 6 \ 4 \ 6 \\ \hline 1 \ 1 \ 4 \\ \times 1 \ 6 \ 9 \\ \hline 2 \ 3 \end{array}$$

$$8 \cdot 8 = 64 \quad 6 \cdot 8 = 48$$

$$\begin{array}{r} \times 5 \ 5 \ 1 \\ 8 \\ 5 \ 9 \ 8 \\ \hline 5 \ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 9 \ 6 \ 1 \\ 1 \ 4 \\ + 5 \ 6 \\ \hline 1 \ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \ 8 \ 1 \ 8 \\ 1 \ 3 \ 5 \ 2 \\ + 1 \ 9 \ 6 \ 0 \\ \hline 1 \ 1 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ 78 35+8
2 8



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

умножим на $\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}$

$$(1 - 9x) = (1 - 9x)$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$= 1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 0 \quad D = 9 - 4 \cdot 3 < 0.$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 1 \quad \text{т.к. } \sqrt{a} \geq 0$$

$$a + 1 \geq 2\sqrt{a}$$

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{2} + \frac{3x^2 + 3x + 2}{2} \geq 1$$

$$\sqrt{a} \leq \frac{a+1}{2}$$

$$\frac{3(x-1)^2}{2}$$

$$\text{при } x = \frac{1}{9}$$

$$3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} - \frac{6}{9} + 1 = \frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{27} + \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

$$a + b + 2\sqrt{ab} = 1$$

ат 1



$$\sqrt{(3(x^2 - 1)^2 - 1)} + \sqrt{3(x-1)^2 + (9x-2)}$$

$$\sqrt{9x-2}$$

$$x_2 = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2 \cdot 6}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$\sqrt{a+b} = 1$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1})^2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$6x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$9x^2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$6x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 6 = 24 + 9 = 33$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1})(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}) =$$

$$= (1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

не 0: $\begin{cases} 3x^2-6x+2=0 \\ 3x^2+3x+1=0 \end{cases}$ $1-9x=0$ не 0. $x = \frac{1}{9}$

при $x = \frac{1}{9}$: $3 \cdot \frac{1}{9} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2$

$$= \frac{3}{81} - \frac{6 \cdot 9}{81} + 2 = \frac{3-54}{81} + 2 = \frac{3-54+2 \cdot 81}{81} \neq 0.$$

$(1-9x) \quad x \neq \frac{1}{9}$:

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$$

$$3x^2+3x+1$$

выясним: $\frac{6}{2 \cdot 3} = 1$

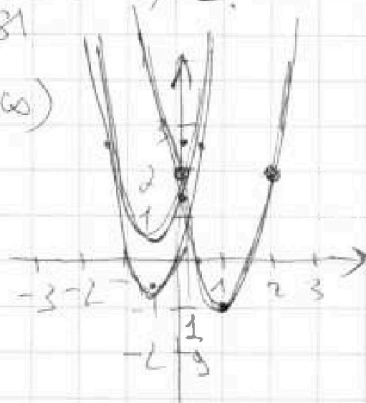
выясн: $\frac{-3}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{2}$ 1: $3-6+2 = -1$

$f(-\frac{1}{2})$: $\frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 1 = -\frac{3}{4} + 1 = -\frac{3}{2} + \frac{2}{2} = -\frac{1}{2}$

$$3x^2-6x+3 = a$$

$$3(x^2-1)^2 = a$$

$$\sqrt{a+1} + \sqrt{3(x-1)^2+1} + \sqrt{3(x-1)^2+3x-2} = 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

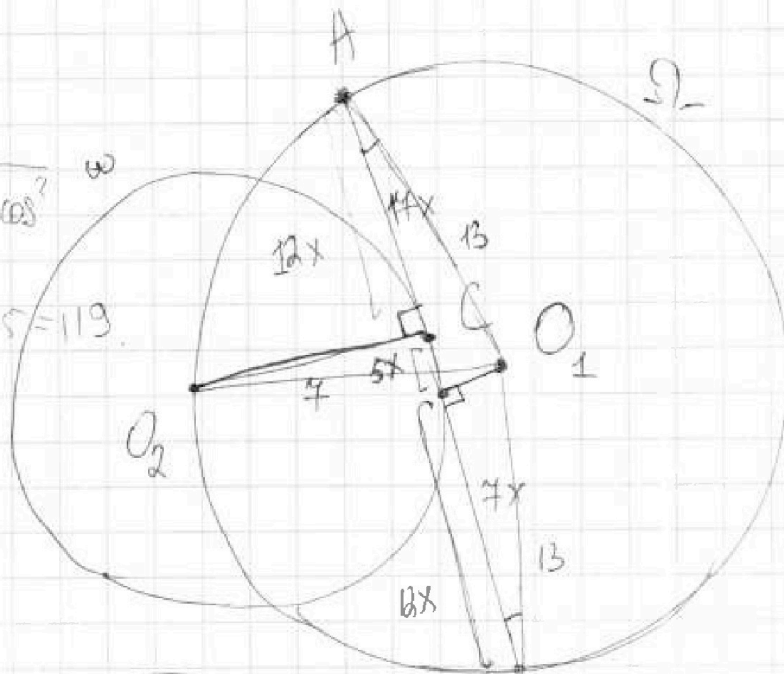
3) $AC:CB = 17:7$

$AB = 17x + 7x = 24x$

$\sin \arccos \frac{1}{4}$

$\cos \alpha = \frac{1}{4} \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$

$144 - 25 = 124 - 5 = 119$



$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$

$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = 1 - 9x$

To solve.

$$\frac{1 - 9x}{\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}} = 1 - 9x$$

$$(r - x\delta + r)(1 + r) \sqrt{r} = r - x\delta + r$$

$$T = \frac{(r - x\delta + r)(1 + r) \sqrt{r}}{r - x\delta + r + r + x\delta + r}$$

$$T = \frac{2 + x\delta + r}{1 + r}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{\Delta QAB} = \frac{7 \cdot 24x}{2} = 7 \cdot 12x$$

$$AB^2 = 2 \cdot B^2 - 2 \cdot B^2 \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$Q_2 B^2 = 49 + 49x^2$$

$$Q_2 A^2 = 49 + 17^2 x^2$$

$$\alpha =$$

$$\cos \angle A Q_2 B = \cos \left(\frac{360^\circ - \alpha}{2} \right) =$$

$$= \cos \left(\frac{180^\circ}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = -\cos \left(\frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{12x}{13}$$

$$AB^2 = 49 + 17^2 x^2 + 49 + 49x^2 + 2 \sqrt{49 + 17^2 x^2} \cdot \sqrt{49 + 49x^2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

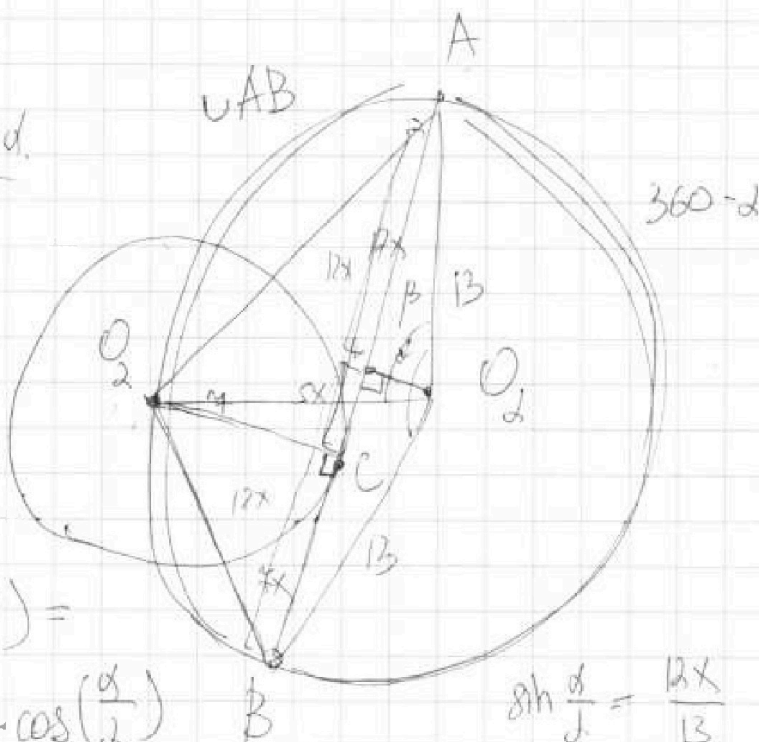
$$= \sqrt{169 - 144x^2} + 13$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \frac{144x^2}{13^2}} =$$

$$7^2 + 13^2 - 2 \cdot 7 \cdot 13 \cos \beta = 49 + 17^2 x^2$$

$$49 + 169 - 14 \cdot 13 \cos \beta = 49 + 17^2 x^2$$

$$169 - 14 \cdot 13 \cos \beta = 17^2 x^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

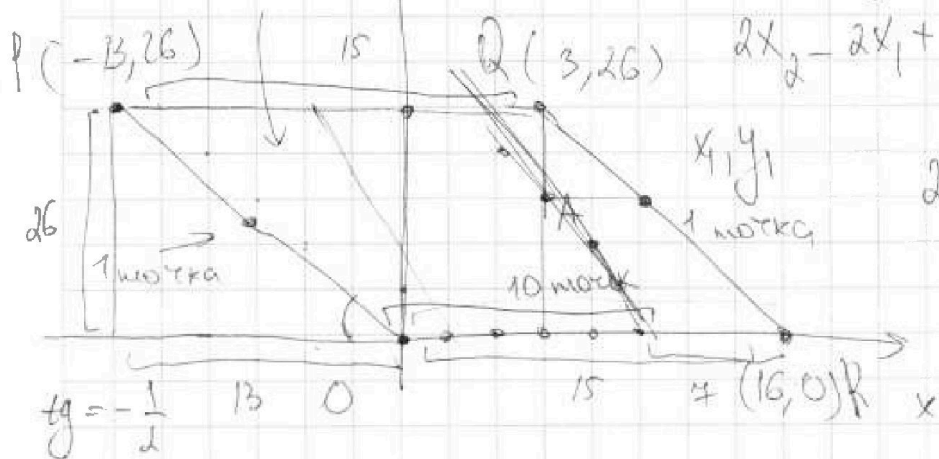
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$8 \cdot 24 + 14 + 14 = y \quad (8 \cdot 24 + 28) \cdot 14$$

$$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2)$$



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

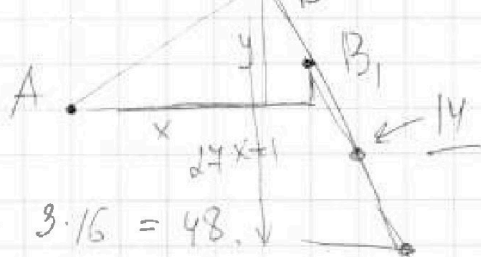
$$2(x_2 - x_1) = 14x$$

$$+ (y_2 - y_1) = 14$$

$$x_1 = y_1 = 0 \quad 2x_2 + y_2 = 14$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$



$$2x + y = 14$$

$$2(x+1) + y - 2 = 2x + y = 14$$

$$S = 3 \cdot 16 = 48$$

$$S = \frac{15 + 15 + 4 + 2}{2} + \text{количество точек} - 1$$

$$\frac{36}{2} + \text{количество точек} - 1 = 48$$

$$18 + x + 1 = 48$$

$$x = 48 - 18 + 1 = 31$$

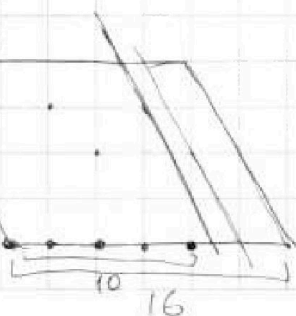
$$2 \cdot 6 + 2 = 14$$

$$y_1 = y_2$$

$$x_2 - x_1 = 7$$

если x_1 - цел, то y_1 и y_2 - цел.

$$\begin{array}{r} 3312 \\ + 169 \\ \hline 3481 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$abc - ?$$

по 2: суммарная степень вхождения ≥ 23 .

$$\text{значит } abc: 2^{23}$$

по 7: суммарная степень вхождения ≥ 39 .

$$\text{значит } abc: 7^{39}$$

$$abc \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\text{по 2: } \begin{cases} a' + b' \geq 15 \\ b' + c' \geq 17 \\ a' + c' \geq 23 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 17 \\ \hline 23 \\ + 40 \\ \hline 15 \\ \hline 55 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ + 39 \\ \hline 11 \\ \hline 50 \end{array}$$

$$a' = 7 \quad b' = 8$$

$$c' = 16$$

$$a' + b' + c' \geq \frac{15 + 17 + 23}{2} = \frac{55}{2} = 27,5$$

$$a' + b' + c' \geq 28$$

$$a' = 7, b' = 8, c' = 13$$

$$a' = 10, b' = 5, c' = 13$$

$$a' = 10, b' = 5, c' = 13 \quad 15 + 13 = 28$$

$$c' = 13$$

$$\begin{array}{ccc} a' = 10 & b' = 5 & c' = 13 \\ \hline 15 & 18 & 23 \end{array}$$

по 7:

$$\begin{cases} a' + b' \geq 11 \\ b' + c' \geq 18 \\ a' + c' \geq 39 \end{cases}$$

$$a' + b' + c' \geq \frac{11 + 18 + 39}{2} = \frac{68}{2} = 34$$

$$a' = 8 \quad 11$$

$$b' = 3 \quad 0$$

$$c' = 31 \quad 28$$

$$\text{Вариант: } abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$$

[illegible]

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 4 \\ 17 \\ \times 17 \\ \hline + 119 \\ 74 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$+ 289$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 289 \\ 49 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ 36 \\ \times 338 \\ \hline 2404 \\ + 1014 \\ \hline 1014 \\ 114244 \end{array}$$

$$(26-4)(26+4) = 19 \cdot 33 = 4 \cdot 17^2$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 19 \\ \times 33 \\ \hline 57 \\ 57 \\ \hline 624 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 169 \\ \times 4 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$26 : 13 = 2$$

$$x^2 + 1 : 13$$

$$\begin{array}{r} 676 : 2 \\ \hline 338 \\ \hline 4 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$\frac{676}{\times 41} = 16 + 289 \times \frac{1}{41}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sin \alpha}{AN} = \frac{\sin \beta}{AM}$$

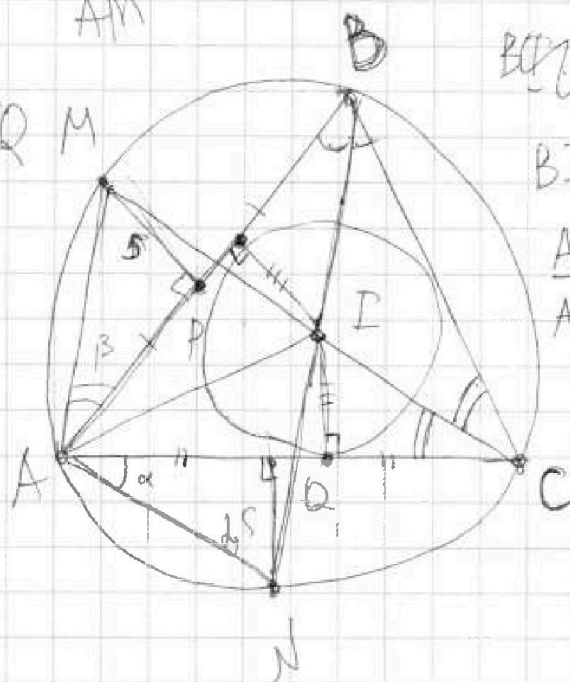
$$\triangle AMP \sim \triangle CQ$$

$$\frac{MP}{R} = \frac{AM}{CI}$$

$$\frac{QN}{R} = \frac{AN}{BI}$$

$$2 = \frac{MP}{QN} = \frac{AM \cdot BI}{CI \cdot AN}$$

$$\frac{AM}{AN} = \sqrt{2}$$



$$BI \cdot AN = AM \cdot CI$$

$$\frac{AM}{AN} = \frac{BI}{CI}$$