



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-12;24)$ ,  $Q(3;24)$  и  $R(15;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^{14} \cdot 4^{10}$$

$$bc: 2^{14} \cdot 4^{14}$$

$$ac: 2^{20} \cdot 4^{34}$$

Будем обозначать  $\|n\|_p$  -

степенями взаимности простого  $p$   
 $b, n \in \mathbb{N}$

Перемножим 3 делимости и получим, что:

$$a^2 b^2 c^2: 2^{14+14+20} \cdot 4^{10+14+34}$$

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2: 2^{51} \cdot 4^{64}$$

но  $a^2 b^2 c^2$  - полный квадрат, поэтому ст. в произв.  
ния 2 в  $(abc)^2$  чётна.

$$(abc)^2: 2^{51} \Rightarrow (abc)^2: 2^{52}$$

$$\Rightarrow (abc)^2: 2^{52} \cdot 4^{64} = 2^{52} \cdot 2^{128} = 2^{180}$$

$$\Rightarrow abc: 2^{90} \cdot 4^{32}$$

$$\text{Пример, когда } abc = 2^{26} \cdot 4^{32}:$$

$$a = \dots \quad b = \dots \quad c = \dots$$

$$\|ac\|_4 = \|a\|_4 + \|c\|_4 \leq \|a\|_4 + \|b\|_4 + \|b\|_4 + \|c\|_4 =$$

$$= \|ab\|_4 + \|bc\|_4$$

$$\Rightarrow \|ab\|_4 + \|bc\|_4 \geq \|ac\|_4 \geq 34$$

$$\Rightarrow \|a^2 b^2 c^2\|_4 = \|ab\|_4 + \|bc\|_4 + \|ac\|_4 \geq 34 \cdot 2 = 68$$

$$\Rightarrow (a^2 b^2 c^2): 4^{34} \cdot 2^{68} \Rightarrow a^2 b^2 c^2 \geq 4^{34} \cdot 2^{68}$$

$$\Rightarrow abc \geq 4^{34} \cdot 2^{34}$$

$$\text{Пример, когда } abc = 4^{34} \cdot 2^{34}: a = 2^8 \cdot 4^{20} \quad b = 2^6 \cdot 4^{12} \quad c = 2^4 \cdot 4^{14}$$

$$ab = 2^{14} \cdot 4^{20}: 2^{14} \cdot 4^{10} \quad bc = 2^{18} \cdot 4^{14}: 2^{14} \cdot 4^{14} \quad ac = 2^{20} \cdot 4^{34}: 2^{20} \cdot 4^{34}$$

$$abc = 4^{34} \cdot 2^{34} \quad \text{Ответ: } 4^{34} \cdot 2^{34} - \text{min значение } abc$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что  $\frac{a}{b}$  несократима  $\Leftrightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$

Пусть  $u \mid a+b$  и  $u \mid ab$  и  $\text{НОД} > 1$ .

Тогда есть  $p$  простое:  $p \mid (a+b)$ ,  $p \mid ab$

$p \mid ab \Rightarrow p \mid a$  или  $p \mid b$ , т.к.  $\text{НОД}(a, b) = 1$

$$\begin{cases} p \mid a, \text{ и } b \not\mid p \\ p \mid b \text{ и } a \not\mid p \end{cases} \Rightarrow a+b \not\mid p \text{ (как сумма} \\ \text{кратного } p \text{ и некрратного)}$$

Противоречие.

$$\Rightarrow \text{НОД}(a+b, ab) = 1$$

Пусть  $m \mid (a+b)$  и  $m \mid (a^2 - 6ab + b^2)$

$$a^2 - 6ab + b^2 = (a+b)^2 - 8ab$$

$$m \mid (a+b) \Rightarrow m \mid (a+b)^2, m \mid a^2 - 6ab + b^2 \\ \Rightarrow m \mid 8ab \text{ и } m \mid a+b.$$

$$\text{НОД}(ab, a+b) = 1 \Rightarrow m \mid 8 \Rightarrow m \leq 8$$

Пример ~~на~~ на  $m=8$ :  $a=1, b=7$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{7} \text{ несократима} \quad a+b=8, \quad a^2 - 6ab + b^2 =$$

$$= 1 - 42 + 49 = 8, \quad a+b \leq 8, \quad a^2 - 6ab + b^2 \leq 8$$

Пример работает.

Ответ: наибольшее значение  $m$  равно 8.





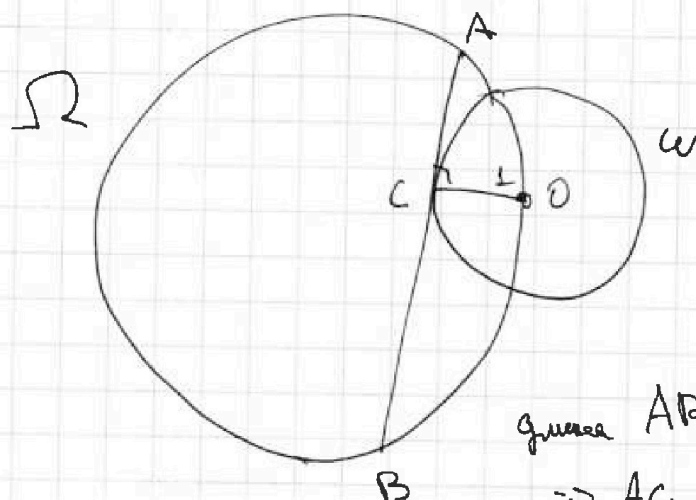
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



центр  $\omega - O$ .

$OC \perp AB$ , т.к.

$AB$  - кас. и  $OC = r$ ,

т.к.  $OC$  - радиус.

длина  $AB = x$

$$\Rightarrow AC = \frac{x}{2}, BC = \frac{x}{2}, \text{ т.к. } \frac{AC}{CB} = 1$$

По т. Пифагора  $OA^2 = 1 + \frac{49}{64}x^2$

$$OB^2 = 1 + \frac{1}{4}x^2$$

$\frac{BO}{\sin \angle BAO} = 2R$  по т. син, здесь  $R$  - радиус  $\Omega$

$\sin \angle BAO = \frac{CO}{AO}$ , т.к.  $\angle ACO = 90^\circ$

$$\Rightarrow \frac{BO}{CO} \cdot AO = BO \cdot AO = 10 \quad (CO=2, R=5)$$

$$\Rightarrow BO^2 \cdot AO^2 = 100$$

$$\Rightarrow \frac{49}{2^{12}} x^4 + \frac{50}{64} x^2 + 1 = 100$$

$$t := x^2$$

$$\frac{49}{2^{12}} t^2 + \frac{50}{64} t - 99 = 0$$

Решим квадрат уравнение.

$$D = \frac{625}{2^{10}} + 4 \cdot \frac{49 \cdot 99}{2^{12}} = \frac{25^2 + (44-25)(44+25)}{2^{10}} = \frac{44^2}{2^{10}} = \left(\frac{44}{2^5}\right)^2$$

Продолжение на обороте





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow t_1 = \frac{-25}{25} + \frac{44}{25} = \frac{2^6(44-25)}{49} = 64$$

$$t_2 = \frac{-25}{25} - \frac{44}{25} < 0, \text{ но } t = x^2 \geq 0$$

(здесь  $t_1$  и  $t_2$  - корни)

$$\Rightarrow t_2 \neq x^2.$$

$$\Rightarrow x^2 = t_1 \Rightarrow x = \sqrt{t_1} = \sqrt{64} = 8$$

Ответ: ~~128~~ длина AB равна 8



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-4x$$

$$2x^2-5x+3 = 2(x-1)(x-1,5) \geq 0$$

$$2x^2+2x+1 > 0 \quad \forall x, \text{ т.к. у этого выражения}$$

дискриминант равен  $2^2-4 \cdot 2 = -4 < 0$ , и старший коэффициент  $> 0$

$$\Rightarrow \text{ОДЗ: } x \in (-\infty; 1] \cup [1,5; +\infty)$$

Заметим, что  $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} > 0$ , т.к.  
 $2x^2+2x+1 > 0$

Заметим,  $\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = \frac{(2x^2-5x+3) - (2x^2+2x+1)}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} =$

$$= \frac{2-4x}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-4x$$

$$\begin{cases} 2-4x=0 \\ \sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1 \end{cases}$$

$$1) 2-4x=0 \quad x = \frac{2}{4} \quad \frac{2}{4} < 1, \quad \frac{2}{4} \in \text{ОДЗ.}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{4} - \text{корень.}$$

$$2) \sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1$$

$$\sqrt{2x^2+2x+1} \leq 1 \Rightarrow x \in [-1; 0]$$

на отрезке  $[-1; 0]$   $2x^2-5x+3$  — монотонно  
убывающая функция, т.к. вершина этой  
параболы имеет абсциссу  $\frac{5}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4}$

$$\Rightarrow 2x^2-5x+3 \geq 2 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 3 = 3.$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x^2-5x+3} \geq \sqrt{3} > 1 \text{ на отрезке } [-1; 0]$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Поставим  $\sqrt{2x^2+5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} \geq$

$\geq \sqrt{2x^2+5x+3} \geq \sqrt{3} > 1$  на отрезке  $[-1; 0]$

а  $x \notin [-1; 0] \Rightarrow \sqrt{2x^2+5x+3} \geq \sqrt{3} > 1$

$\sqrt{2x^2+5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} \geq \sqrt{2x^2+2x+1} > 1$

$\Rightarrow x \in \emptyset$  в этом случае

$\Rightarrow$  Уравнение имеет единственный корень  
равный  $\frac{2}{4}$

Ответ:  $x = \frac{2}{4}$ .



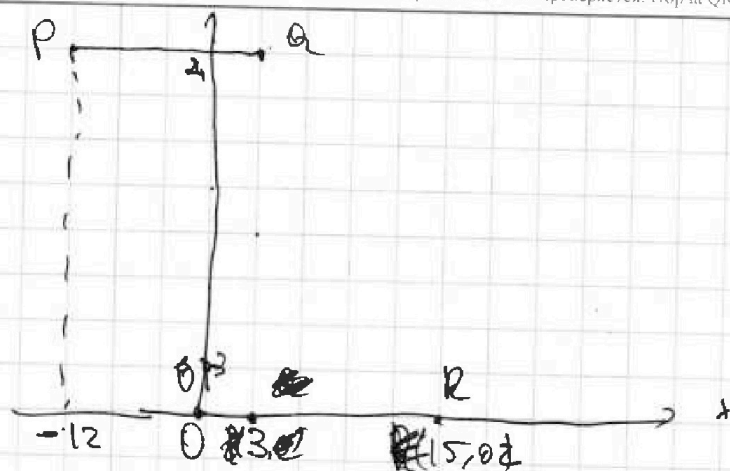
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Поряд QR-кода недопустима!



$$d_x := x_2 - x_1 \quad d_y := y_2 - y_1$$

$$2d_x + d_y = 12 \quad 2d_x \leq 12 \Rightarrow d_x \leq 6$$

$$\Rightarrow d_y \in \{0; 2; 4; \dots; 12\}$$

$$\Rightarrow d_y = 2k \text{ и } k \in \{0; 1; 2; \dots; 6\}$$

$$\text{Поскольку } d_y = 2k \Rightarrow d_x = 6 - k$$

Таким образом,  $x_2, y_2, d_x$  и  $d_y$  однозначно задаются  $x_1$  и  $y_1$ .

При этом от левой границы

$OPQR$  — от  $OP$  до  $x_2$  расстояние по оси  $x$

равно  $d_x$ , от  $OR$  до  $y_2$  расстояние по оси  $y$  равно  $d_y$

Построим для  $y$  при конкретном  $k$

25-26 вариантов. Для  $x$  в четных строках  
(у которых абсцисса: 2)  $16 - (6 - k) = 10 + k$  вариантов,  
в нечетных строках:  $15 - (6 - k) = 9 + k$  вариантов

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$-16a + 10b = 0$$

$$5b = 8a$$

$$ax + 16a = y$$

$$a(x + 16) = y$$

$$a = \frac{y}{x+16} = \frac{y}{\frac{y}{5a} + 16} = \frac{5a^2}{y + 80a}$$

Тогда всего вариантов

$$\sum_{k=0}^6 (10+k)$$

В конкретном  $k$  четных строк всего на 4 больше, чем нечетных, т.к. левый нижний квадрат имеет ординату  $2k+2$ , а правый нижний квадрат имеет ординату  $2k+4$ .

$\Rightarrow$  Всего вариантов выбора такой пары

$$\sum_{k=0}^6 (13-k)(10+k) + \sum_{k=0}^6 (12-k)(9+k) =$$

$$= 13 \cdot 10 + 12 \cdot 11 + 10 \cdot 13 + 9 \cdot 14 + 8 \cdot 15 + 7 \cdot 16 + 6 \cdot 17 + 5 \cdot 18 + 4 \cdot 19 + 3 \cdot 20 =$$

$$= 4 \cdot 130 + 4 \cdot 12 \cdot 9 + 2 \sum_{k=0}^6 k^2 + \sum_{k=0}^6 (10k + 13k - 9k - 12k) =$$

$$= 4(130 + 108) + 6 \cdot \sum_{k=0}^6 k - 2 \sum_{k=0}^6 k^2 =$$

$$= 4 \cdot 148 + 6 \cdot \frac{6 \cdot 4}{2} - 2 \cdot \frac{6 \cdot 4 \cdot 13}{6} =$$

$$= 4(148 + 18 - 26) = 4 \cdot 140 = 560$$

Ответ: 560 пар.

(Используем формулы  $\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$  и  $\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ )

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

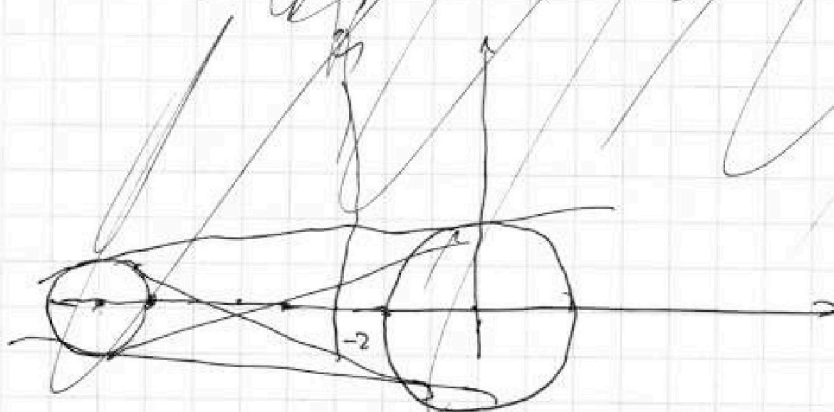


$$y = ax + 10b$$

$$(x+8)^2 + (y+10b)^2 - 1 = 0 \quad x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 20abx + 100b^2 - 4 = x^2 + y^2 - 4$$

картинка, из  
картинка...



$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0$  - окружность с центром в  $(-8; 0)$  и радиусом 1

$x^2 + y^2 - 4 = 0$  - окр-сть с центром в  $(0, 0)$  и радиусом 2.

Эти окр-сти не пересекаются, т.к. расстояние между центрами  $(8) >$  сумме радиусов  $(1+2=3)$

$$\Rightarrow ((x+8)^2 + y^2 - 1) / (x^2 + y^2 - 4) \leq 0, \text{ когда}$$

точка  $(x, y)$  лежит внутри одного из кругов, ограничивающих эти окр-сти (возможно на пересечении круга)

При этом  $(x, y) \in$  прямой  $ax - y + 10b = 0$

и эта прямая обладает допустимыми положениями точек  $(x, y)$  равно в 2-х точках.

Из этого следует, что  $ax - y + 10b = 0$  - уравнение одной касательной к окр-стям



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

с центрами  $O(0,0)$  и  $O_1(-8,0)$  и радиусами

2 и 1 соответственно.

Найти внешние касательные. Даны 2 линии центров-  
ов  $X$  - в центре невыпуклой геометрии  $A$ ,  
этих окружностей.

$$O_2(0,0) \quad O_1(-8,0) \quad \text{окружность } A \text{ радиус } 0, \\ r_2=2 \quad r_1=1 \quad \text{т.к. } A \in O_1O_2$$

$$\frac{AO_2}{AO_1} = \frac{r_2}{r_1} = 2 \Rightarrow \text{у } A \text{ координаты } (-16,0) \\ \Rightarrow AO_1=8$$

Отрезок касательной из  $A$  к окружности с центром  $O_1$  и радиусом  $r_1$  равен  $\sqrt{AO_1^2 - r_1^2} = \sqrt{63}$

$$\Rightarrow \text{Точки касания таковы, что} \begin{cases} (x-8)^2 + y^2 = 1 \\ (x+16)^2 + y^2 = 63 \end{cases}$$

Выведем из второго уравнения:

$$\Rightarrow 16x + 256 - 64 = 62 \\ \Leftrightarrow 16x = -130 \Rightarrow x = -\frac{65}{8} = -8\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow y^2 = 1 - \frac{1}{64} \quad y = \pm \frac{\sqrt{63}}{8}$$

Внешние касательные проходят через точку  $(-16,0)$ ,  
поэтому эти ~~заданы~~ уравнением  $-16a + 16b = 0$   
 $\Rightarrow 16b = 16a$

$\Rightarrow a(x+16) = y \Rightarrow$  Уравнение касательной имеет  
вид  $(x+16)a = y$

У одной из внешних касательных  
наклон равен:  $a_1 = \frac{\sqrt{63}/8}{-16 - 8\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{63}}{63} = \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{1}{3\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{21}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. Внешние касательные симметричны относительно  $OX$ , поэтому  
у второй вн. касат. наклон будет  $a_2 = -a_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$   
 $\Rightarrow -\frac{1}{3\sqrt{4}}$ . Для  $a_1, a_2 \Rightarrow b = \frac{8}{5}a_1$ . ( $a_2 = -\frac{\sqrt{4}}{2}$ )

Рассмотрим внутренние касательные.

Они пересекаются в центре отрицательной полуоси  $B$  этих окр-стей. Радиус  $B$  равен 0, т.к.  $B \in OX$

$$\frac{BO_2}{BO_1} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}} = -2 \Rightarrow \text{у } B \text{ координата } (-\frac{2}{3} \cdot 8, 0)$$

$$\text{т.е. } (-\frac{16}{3}, 0) \quad (-\frac{16}{3}, 0) \quad \text{т.е. } (-5\frac{1}{3}, 0)$$

$$BO_2 = 5\frac{1}{3} \Rightarrow BO_1 = 2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

Отрезок касательной из  $B$  к окр-сти с центром  $(-8, 0)$  и радиусом 1 равен  $\sqrt{BO_2^2 - r^2} =$

$$= \sqrt{\frac{256}{9} - 1} = \sqrt{\frac{256-9}{9}} = \sqrt{\frac{247}{9}} = \frac{\sqrt{247}}{3}$$

Тогда точки касания с внутр. общей касательной

$$\text{таковы, что } \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 = 1 \\ (x+5\frac{1}{3})^2 + y^2 = \frac{247}{9} \end{cases}$$

Вычитаем из одного уравнения другое и получим:

$$16x + 63 - \frac{32}{3}x - \frac{256-247}{9} = 0$$

$$16x + 63 - \frac{32}{3}x - \frac{9}{9} = 0$$

$$\frac{16}{3}x + 63 - \frac{201}{9} = \frac{16}{3}x + 63 - \frac{64}{3} = 0$$

$$16x + 189 - 64 = 16x + 122 = 0. \quad x = -\frac{122}{16} = -\frac{61}{8}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+8)^2 + y^2 = 1$$

$$x+8 = \frac{3}{8}$$

$$y^2 = 1 - \frac{9}{64} = \frac{55}{64}$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{55}}{8}$$

Внутр. касательные проходят через

точку  $(-\frac{16}{3}, 0)$ , поэтому  $-\frac{16}{3}a + 10b = 0$

$$10b = \frac{16}{3}a$$

У внутр. касательных уравнение  $a(x + \frac{16}{3}) = y$

подставим  $x = -\frac{61}{8}$

$$\text{Для } y = \frac{\sqrt{55}}{8} \rightarrow a = \frac{\sqrt{55}/8}{3(-\frac{61}{8} + \frac{16}{3})} = \frac{\sqrt{55}}{\frac{128 - 61 \cdot 3}{3}} = \frac{-3\sqrt{55}}{55}$$

$$\text{Для } y = -\frac{\sqrt{55}}{8} \quad a = \frac{-\sqrt{55}/8}{3(-\frac{61}{8} + \frac{16}{3})} = \frac{3\sqrt{55}}{55}$$

$$\text{Для } a_3, a_4 \quad b_i = \frac{8}{15} a_i \quad \text{при } i = 3, 4$$

$$\text{Для } a_i \quad b_i = \frac{8}{15} a_i \quad \text{при } i = 3, 4$$

$$\text{Ответ: } a \in \left\{ -\frac{\sqrt{4}}{21}; \frac{\sqrt{4}}{21}; -\frac{3\sqrt{55}}{55}; \frac{3\sqrt{55}}{55} \right\}$$





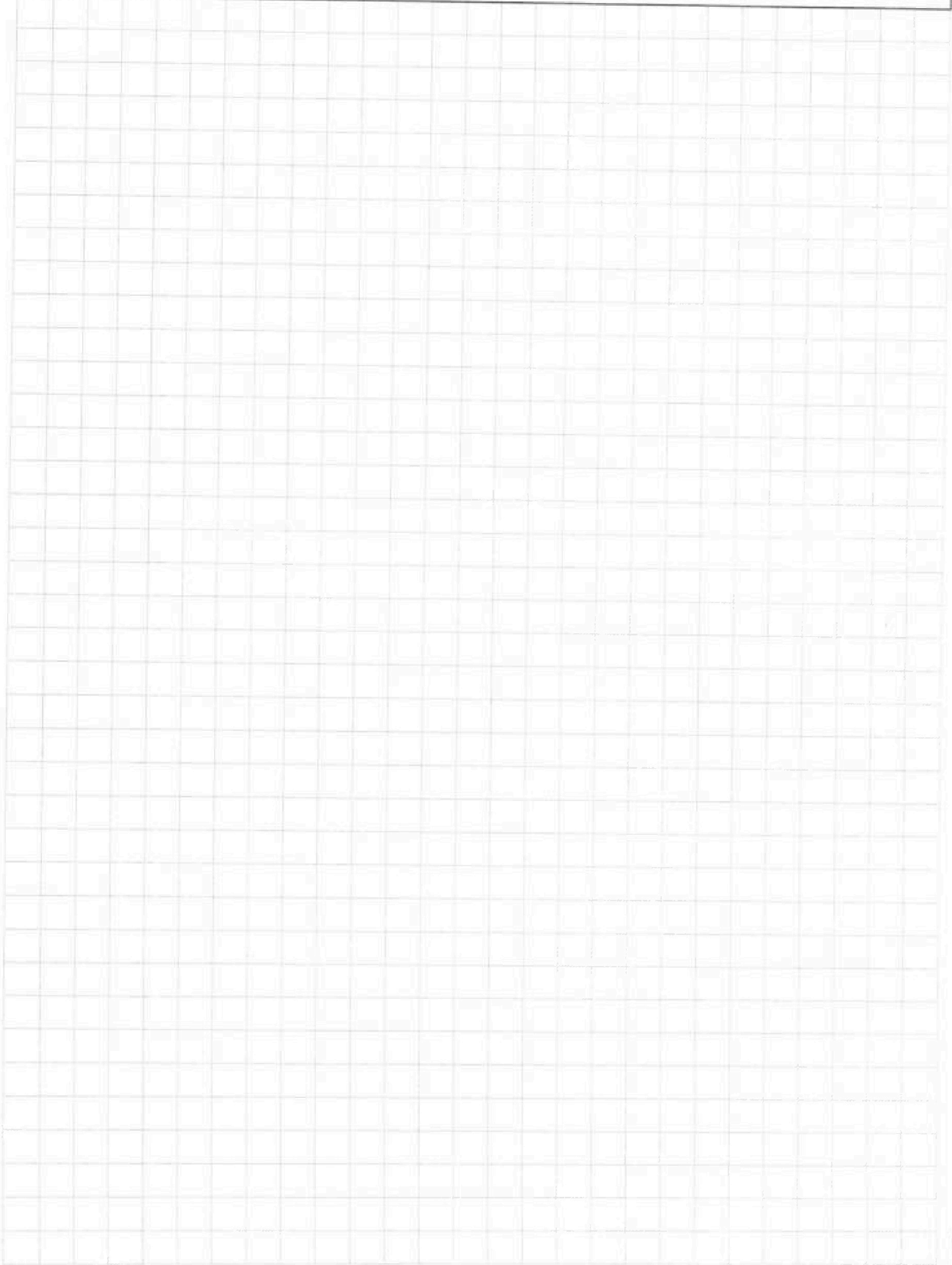
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





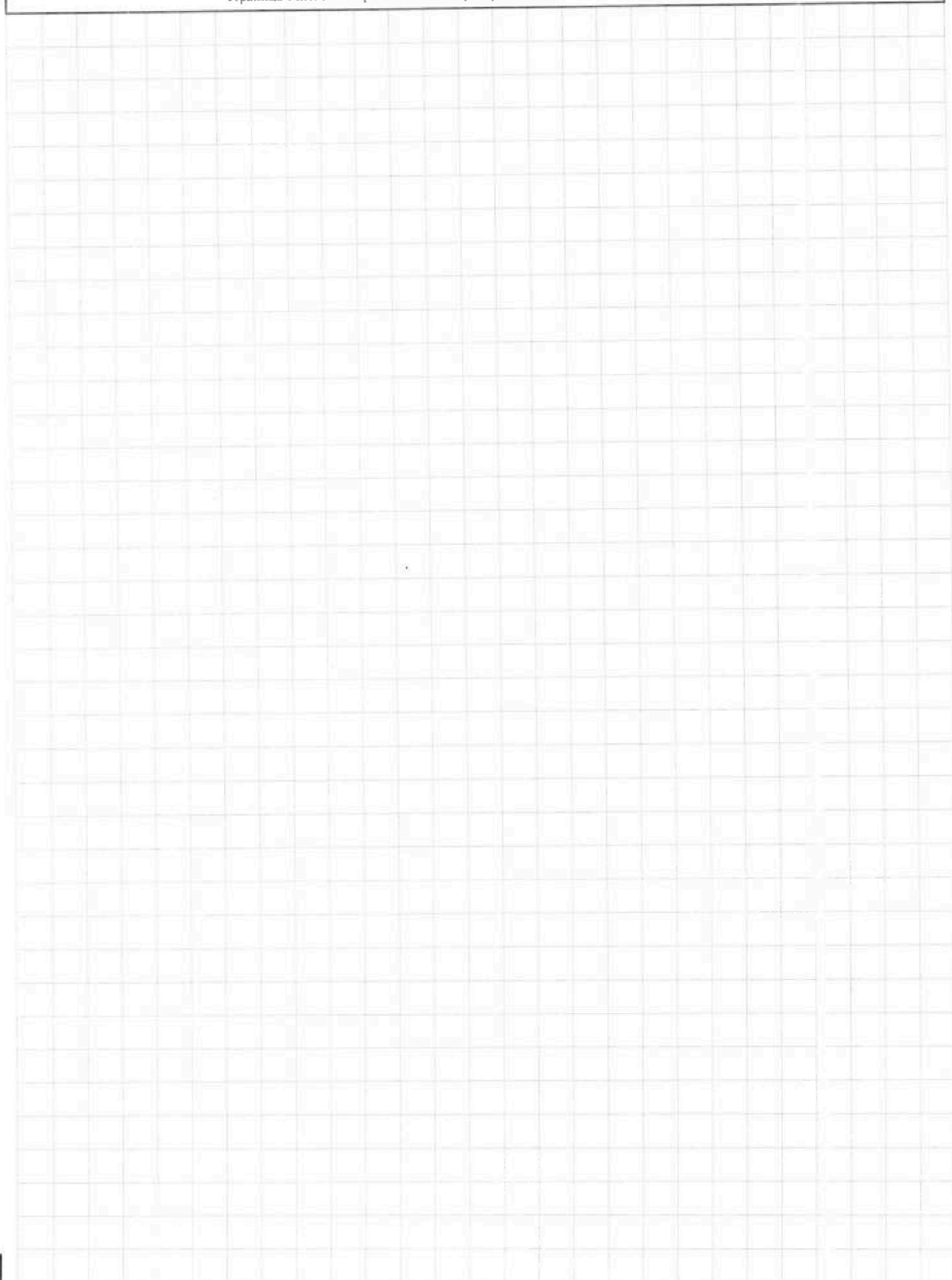
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода непустыма!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 4x$$

$$2x^2 - 5x + 3 = (2x^2 + 2x + 1)(x - 1) = \frac{2}{x} (x - 1) \geq 0$$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$

$2x^2 + 2x + 1 \neq 0$  при  $\forall x$ , т.к. дискриминант  
равен  $2^2 - 2 \cdot 4 = -4 < 0$ , а старший коэффициент  $> 0$

$$\Rightarrow 0 \leq 3: x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} =$$

$$= \frac{2x^2 - 5x + 3 - (2x^2 + 2x + 1)}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} =$$

$$\neq \left( \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \neq 0, \text{ т.к. } 2x^2 + 2x + 1 \text{ строго } > 0 \right)$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = \frac{2 - 4x}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} =$$

$$= 2 - 4x$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \text{ или } 2 - 4x = 0,$$

Рассмотрим случаи  $\Rightarrow x = \frac{2}{4} \in 0 \leq 3 \Rightarrow x = \frac{2}{4}$  - корни

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \quad \text{Возведем в}$$

квадрат -

$$2x^2 - 5x + 3 = 1 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

Продолжение на обороте.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Перенесём всё что не под корнем  
вправо и слева возведём в квадрат.

$$(1-4x)^2 = (-2\sqrt{2x^3+2x+1})^2$$

$$49x^2 - 14x + 1 = 8x^3 + 8x + 4$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 22^2 + 3 \cdot 41 \cdot 4 = 16 \cdot 61$$

$$x_{1,2} = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{2 \cdot 41} = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$$

$$x_1 = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} < 0, \text{ т.к. } 11 < 2\sqrt{61}, \text{ т.к. } 121 < 4 \cdot 61$$

$$x_2 = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$$

$$20,5 \sqrt{2\sqrt{61}} - 11$$

$$31,5 \sqrt{2\sqrt{61}} \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}, \text{ т.к. } \sqrt{61} \approx 7,8$$

$$22 + 4\sqrt{61} \sqrt{3 \cdot 41} = 123$$

$$4\sqrt{61} < 123 - 22 = 101, \text{ т.к. } 16 < 101 \text{ и } 16 \cdot 61 < 101^2$$

$$\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \sqrt{123} \Rightarrow 2\sqrt{61} \sqrt{30}, \sqrt{61} \sqrt{15}$$

Проверим, что  $x_2 \in (0, 1/3)$ .  $15 > 8 > \sqrt{64} > \sqrt{61}$

$$\Rightarrow 30 > 2\sqrt{61} \Rightarrow 41 > 2\sqrt{61} + 11 \Rightarrow 1 > \frac{2\sqrt{61} + 11}{41} = x_2$$

$$\Rightarrow x_2 \in (0, 1/3). \quad x_2 > \frac{11}{41} > \frac{11}{44} > \frac{1}{4} > \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow 1 - 4x_2 < 0 \Rightarrow (1 - 4x_2)^2 = (-2\sqrt{2x^3+2x+1})^2$$

$$\Rightarrow 1 - 4x_2 = -2\sqrt{2x^3+2x+1}$$

Смет!

$$\begin{array}{r} 41 \\ \times 12 \\ \hline 82 \\ 41 \\ \hline 492 \end{array} \quad \begin{array}{r} 22 \\ \times 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 484 \end{array}$$

$$1000 - 8 - 16 = 1000 - 24 = 976$$

$$\begin{array}{r} 976 \\ - 96 \\ \hline 880 \end{array}$$

123 + 55 =

183  
123



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$l: ax + by + c = 0$$

$$d(x, y, l) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

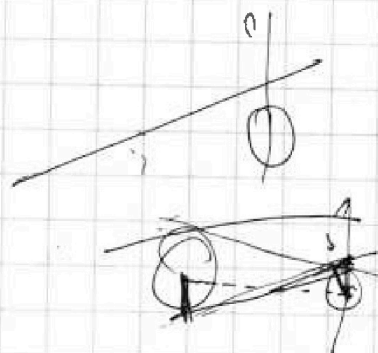
$$ax - y + 10b = 0$$

$$(-8; 0) \quad \frac{|-8a + 10b|}{a^2 + 1} = 1$$

$$(0; 0) \quad \frac{|10b|}{a^2 + 1} = 2$$

$$\frac{8}{4a} - \frac{10}{4} + 3 =$$

$$= \frac{8}{4a}$$



$$|10b| = 2a^2 + 2$$

$$|-8a + 10b| = a^2 + 1$$

$$1) b \geq 0, -8a + 10b \geq 0$$

$$-8a = a^2 - 1$$

$$a^2 - 8a + 1 = 0$$

$$D = 64 - 4 = 60$$

$$a = \frac{8 \pm 2\sqrt{15}}{2} = 4 \pm \sqrt{15}$$

$$2x_2^2 + 2x_2 + 1 = 0$$

$$\begin{cases} 100b^2 + 160ab + 64a^2 = a^2 + 1 \\ 100b^2 = 4a^2 + 4 \end{cases}$$

$$25b^2 = a^2 + 1$$

$$b = \pm \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5}$$

$$b > 0$$

$$b = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5}$$

$$64a^2 + 3 \pm \frac{160}{5}a\sqrt{a^2 + 1} = 0$$

$$64a^2 + 3 = 32a\sqrt{a^2 + 1}$$

$$64a^2 + 3 = 32a\sqrt{a^2 + 1}$$

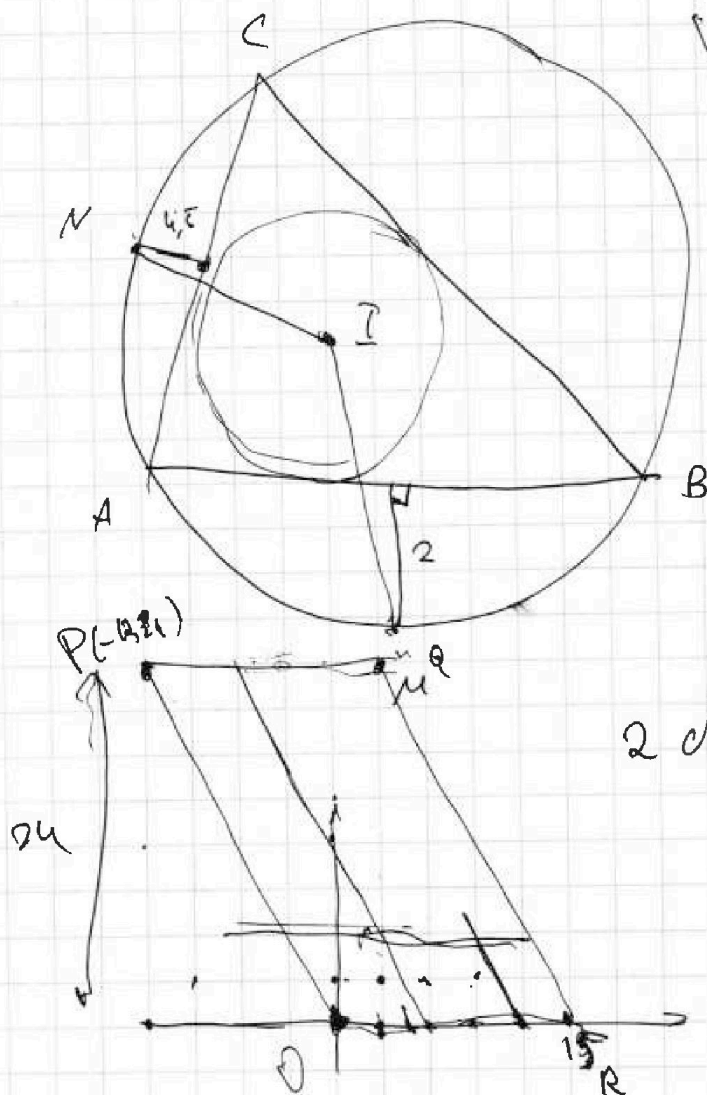
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

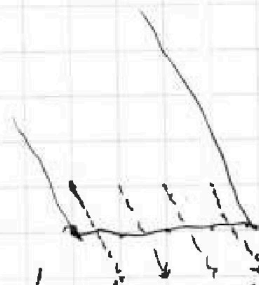
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Пирча QR-кода недопустима!



$$7 - 2 = 5$$



$$2 dx + dy = 12$$

$$x_2 \quad y_2 - y_1 = 0$$

$$x_2 - x_1 = 6$$

$$16 - (6 - k) = 10 + k$$

$\lambda_2 \geq 6$

6, 2, ..., 15

10.24 (~~0.6~~ 6.0)

$$u_g = 2$$

$$x_2 - x_1 = 5$$

$$d_y = 4 \quad d_x = 4$$

$$d_y = 6 \quad d_x = 3$$

$y_2 = 2, x_2 = 25$

2  
23

$$x_2, y_2, z_2$$

12 22

$$y_2^2 \begin{matrix} 6 \\ 21 \end{matrix}, x_2^2 \begin{matrix} 23 \\ 13 \end{matrix}$$

$$y_2^2 \begin{matrix} 6 \\ 21 \end{matrix}, x_2^2 \begin{matrix} 23 \\ 13 \end{matrix}$$