



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x + 1 &= a \\ 2x^2 - 5x + 3 &= a + (2 - 7x) \\ \sqrt{a + (2 - 7x)} - \sqrt{a} &= 2 - 7x \\ a + b &= b^2 + a + 2bx \\ b^2 + 2bx - b &= 0 \\ b(b + 2x - 1) &= 0 \\ b &= 0 \text{ или } b = 1 - 2x \end{aligned}$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .



$2x_2$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

## Задача 1

В условии представлены ~~натуральные~~ делимости  
только на степени ~~целых~~ чисел 2 и 7, которые  
являются простыми, поэтому, чтобы произв.  $abc$   
было наименьшим, оно должно принимать вид  
 $2^x \cdot 7^y$ , где  $x, y$  — <sup>произвольные</sup> натуральные, а значения  
 $a, b, c$  по отдельности тоже должны  
принимать такой вид.

Пусть  $a = 2^{n_1} \cdot 7^{m_1}$ ,  $b = 2^{n_2} \cdot 7^{m_2}$ ,  $c = 2^{n_3} \cdot 7^{m_3}$ ,  
где  $n_1, m_1, n_2, m_2, n_3, m_3$  — какие-то натуральные числа. Тогда:

$$ab : 2^{14} 7^{10} \Rightarrow n_1 + n_2 \geq 14, m_1 + m_2 \geq 10$$

$$bc : 2^{17} 7^{17} \Rightarrow n_2 + n_3 \geq 17, m_2 + m_3 \geq 17$$

$$ac : 2^{20} 7^{37} \Rightarrow n_1 + n_3 \geq 20, m_1 + m_3 \geq 37$$

$$abc = \sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ac} = 2^{\frac{n_1+n_2+n_2+n_3+n_3+n_1}{2}} \cdot 7^{\frac{m_1+m_2+m_2+m_3+m_3+m_1}{2}} = 2^{\frac{14+17+20}{2}} \cdot 7^{\frac{10+17+37}{2}}$$

$$= 2^{\frac{51}{2}} \cdot 7^{\frac{64}{2}} = 2^{25.5} \cdot 7^{32}, \text{ т.е. } abc \geq 2^{25.5} \cdot 7^{32},$$

но  $abc \in \mathbb{N} \Rightarrow$  степени чисел 2 и 7 должны быть натуральными  
 $\Rightarrow$  наим. зн.  $abc : 2^{26} \cdot 7^{32}$ .

Ответ:  $2^{26} \cdot 7^{32}$ .

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

## Задача 2

Нужно найти  $\text{НОД}(a+b, a^2-6ab+b^2)$ , который записывается также как  $(a+b, a^2-6ab+b^2)$  и равен  $m$ , причем  $(a, b) = 1$ .

При помощи алгоритма Евклида получаем:

$$(a+b, a^2-6ab+b^2) = (a+b, a^2-6ab+b^2 - (a+b)^2) = (a+b, -8ab)$$

~~8ab~~ Запишем равенства с  $m$ :

$a+b = k_1 m$ ,  $-8ab = k_2 m$ , где  $k_1, k_2$  - какие-то целые числа.

$$m = \frac{a+b}{k_1} = \frac{-8ab}{k_2} \Rightarrow ak_2 + bk_2 = -8abk_1$$

$$ak_2 : a, -8abk_1 : a \Rightarrow bk_2 : a, \text{ но } (b, a) = 1 \Rightarrow k_2 : a$$

$$bk_2 : b, -8abk_1 : b \Rightarrow ak_2 : b, \text{ но } (a, b) = 1 \Rightarrow k_2 : b$$

$$(a, b) = 1 \Rightarrow k_2 : ab \text{ или } k_2 = ab \cdot d, \text{ где } d - \text{какое-то целое число.}$$

Тогда  $-8ab = abd m \Rightarrow -8 = dm$ . Отсюда наибольшее

$m$  равно 8 при  $d = -1$

Если  $a=3, b=5$ , то  $a+b=8, a^2-6ab+b^2=9-6 \cdot 3 \cdot 5+25=$

$= 34 - 90 = -56$  : оба числа делятся на 8  $\Rightarrow m$  может быть равно 8.

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

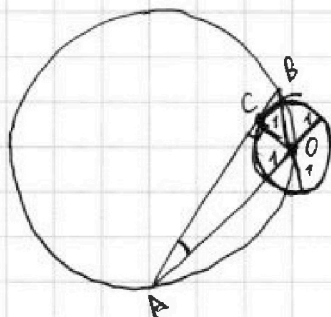
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Задача 3.

Обозначим центр окружности  $\omega$ ,  
как  $O$ .



1) Степень точки:

$$AC^2 = (AO - 1)(AO + 1)$$

$$BC^2 = (BO - 1)(BO + 1)$$

(+1, -1 - это  
прибавление или  
вычитание длины  
радиуса  $\omega$ )

2) По теореме синусов:

$$\frac{OB}{\sin \angle OAB} = 2 \cdot 5 \quad (5 - \text{длина радиуса } \omega), \text{ где}$$

$$\sin \angle OAB = \frac{1}{AO} \quad (\text{прямоуг. тр.}) \Rightarrow$$

$$AO \cdot BO = 10.$$

$$3) \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AO^2 - 1}{BO^2 - 1} = 7^2 = 49; \quad AO = \frac{10}{BO} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{10^2}{BO^2} - 1}{BO^2 - 1} = 49 \Rightarrow \frac{100 - BO^2}{BO^2} = 49BO^2 - 49 \Rightarrow 49BO^4 - 49BO^2 = 100 - BO^2$$

$$\Rightarrow 49BO^4 - 48BO^2 - 100 = 0. \quad D = 48^2 + 4 \cdot 49 \cdot 100 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BO^2 = \frac{48 \pm \sqrt{48^2 + 4 \cdot 49 \cdot 100}}{98}, \quad \text{но } BO^2 > 0 \Rightarrow BO^2 = \frac{48 + \sqrt{48^2 + 4 \cdot 49 \cdot 100}}{98}$$

$$= \frac{48 + 148}{98} = \frac{196}{98} = 2 \Rightarrow BO = \sqrt{2} \quad (BO > 0)$$

$$4) BC^2 = BO^2 - 1 = 1 \Rightarrow BC = 1$$

$$5) AB = BC \cdot 8 = 8$$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2x + 1 + x^2 = (x+1)^2 + x^2 \geq 0 \text{ при}$$

любых  $x$ , значит проверять на неотриц. нужно

$$\text{только } 2x^2 - 5x + 3.$$

Проверка:  ~~$2x^2 - 5x + 3$  Если  $x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$ , то~~

~~$$2x^2 - 5x + 3 = 2 \cdot \left(\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}\right)^2 - 5 \cdot \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} + 3 =$$~~

~~$$= 2 \cdot \frac{121 + 44\sqrt{61} + 44\sqrt{61}}{41^2} - \frac{55 + 10\sqrt{61}}{41} + 3 = \frac{242 + 488 + 44\sqrt{61} - 55 \cdot 41 - 410\sqrt{61} + 3 \cdot 41^2}{41^2} = \frac{730 + 44\sqrt{61} - 410\sqrt{61} + 41(3 \cdot 41 - 55)}{41^2}$$~~

$$2x^2 - 5x + 3 = 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}\right) = 2\left(x^2 - 2x \cdot \frac{5}{4} + \frac{25}{16} + \frac{3}{2} - \frac{25}{16}\right) =$$

$$= 2\left(\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right) \geq 0 \Rightarrow \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 \geq \frac{1}{16}, \text{ т.е. } \left|x - \frac{5}{4}\right| \geq \frac{1}{4},$$

$$\text{если } x \geq \frac{5}{4}, \text{ то } x \geq \frac{3}{2} \geq \frac{5}{4}; \text{ если } x < \frac{5}{4}, \text{ то } x \leq 1 < \frac{5}{4},$$

$$\text{т.е. } x \in (-\infty; 1] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

$$\text{Если } x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}, \text{ то } x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} < \frac{11 + 2 \cdot 8}{41} = \frac{27}{41} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \text{ является решением.}$$

$$\text{Если } x = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}, \text{ то } x = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} - \frac{4\sqrt{61}}{41} < \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} < 1$$

$$(\text{как было доказано ранее}) \Rightarrow x = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} \text{ является решением.}$$

$$\text{Ответ: } \frac{2}{7}; \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}; \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}.$$

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

## Задача 4

Пусть  $a = 2x^2 + 2x + 1$  и  $b = 2 - 7x$ , тогда

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = \sqrt{a+b} - \sqrt{a}, \text{ т.е.}$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b, \text{ при этом } 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \text{ и}$$

$$\sqrt{a+b} \geq 0, \text{ т.е. } a \geq 0 \text{ и } a+b \geq 0$$

$$\sqrt{a+b} = b + \sqrt{a}. \text{ Возведем обе части в квадрат:}$$

$$a+b = b^2 + a + 2b\sqrt{a} \Rightarrow b^2 + 2b\sqrt{a} - b = 0 \Rightarrow b(b+2\sqrt{a}-1) = 0$$

$$\text{Значит либо } b = 0, \text{ либо } b+2\sqrt{a}-1 = 0, \text{ т.е.}$$

$$(b-1)^2 = (-2\sqrt{a})^2 \Rightarrow (b-1)^2 = 4a.$$

$$\text{Если } b = 0, \text{ то } 2 - 7x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7}; \text{ проверка:}$$

$$1) \quad 2x^2 + 2x + 1 = 2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{7} + 1 > 0$$

$$2) \quad 2x^2 - 5x + 3 = 2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2 - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3 = 2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \frac{11}{7} > 0, \text{ т.е.}$$

$$x = \frac{2}{7} \text{ является решением.}$$

$$\text{Если } (b-1)^2 = 4a, \text{ то } (2-7x-1)^2 = 4 \cdot (2x^2 + 2x + 1),$$

$$\text{т.е. } 49x^2 - 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 41x^2 - 22x - 3 = 0 \quad D = 22^2 + 4 \cdot 41 \cdot 3 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{22 \pm \sqrt{22^2 + 4 \cdot 41 \cdot 3}}{82} = \frac{22 \pm \sqrt{976}}{82} = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{82} =$$

$$= \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$$

(продолжение на след. стр.)



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Угол наклона синус угла наклона касательной  
1 (см. график):  $\frac{3}{8}$ . А значит для кас. 4  
это  $-\frac{3}{8}$ .

Синус угла наклона кас. 2:  $\frac{2-1}{8} = \frac{1}{8}$ . А значит  
для кас. 3 это  $-\frac{1}{8}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

## Задача 6

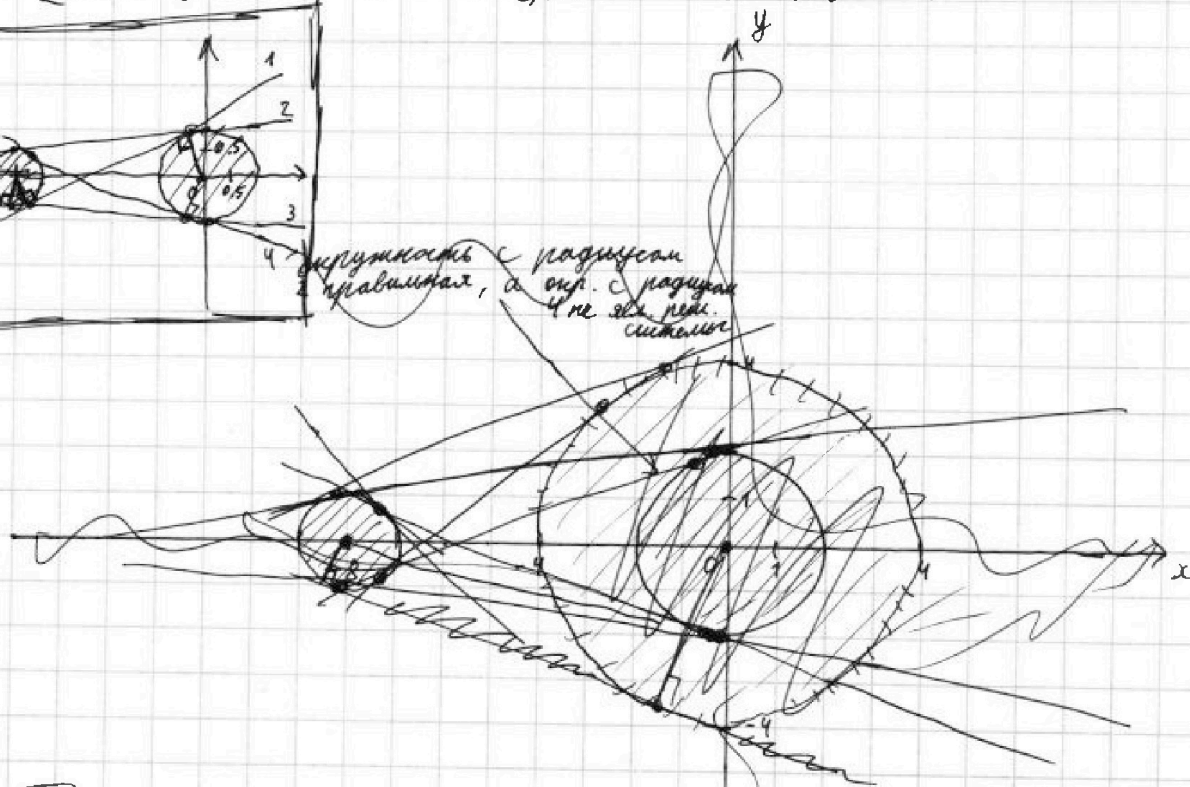
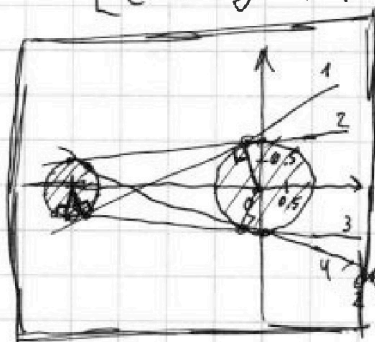
$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0,$$

Чтобы неравенство выполнялось, должна выполняться система:

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \\ (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$$

Нарисуем график:

Все окружности имеют центры в начале координат (0;0),  
то они должны лежать в окр. с центром (-8;0).  
2) аналогично для другой окр.



Теперь нужно найти все  
прямые  $y = ax + b$ , которые  
будут иметь общие точки с  
хотя бы одним из кругов, полученных графиком

$y = ax + b$  — это прямая проходящая через (0; b).

Подходят только 4 общих касательных к окружностям.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

☐

2

☐

3

☐

4

☐

5

☐

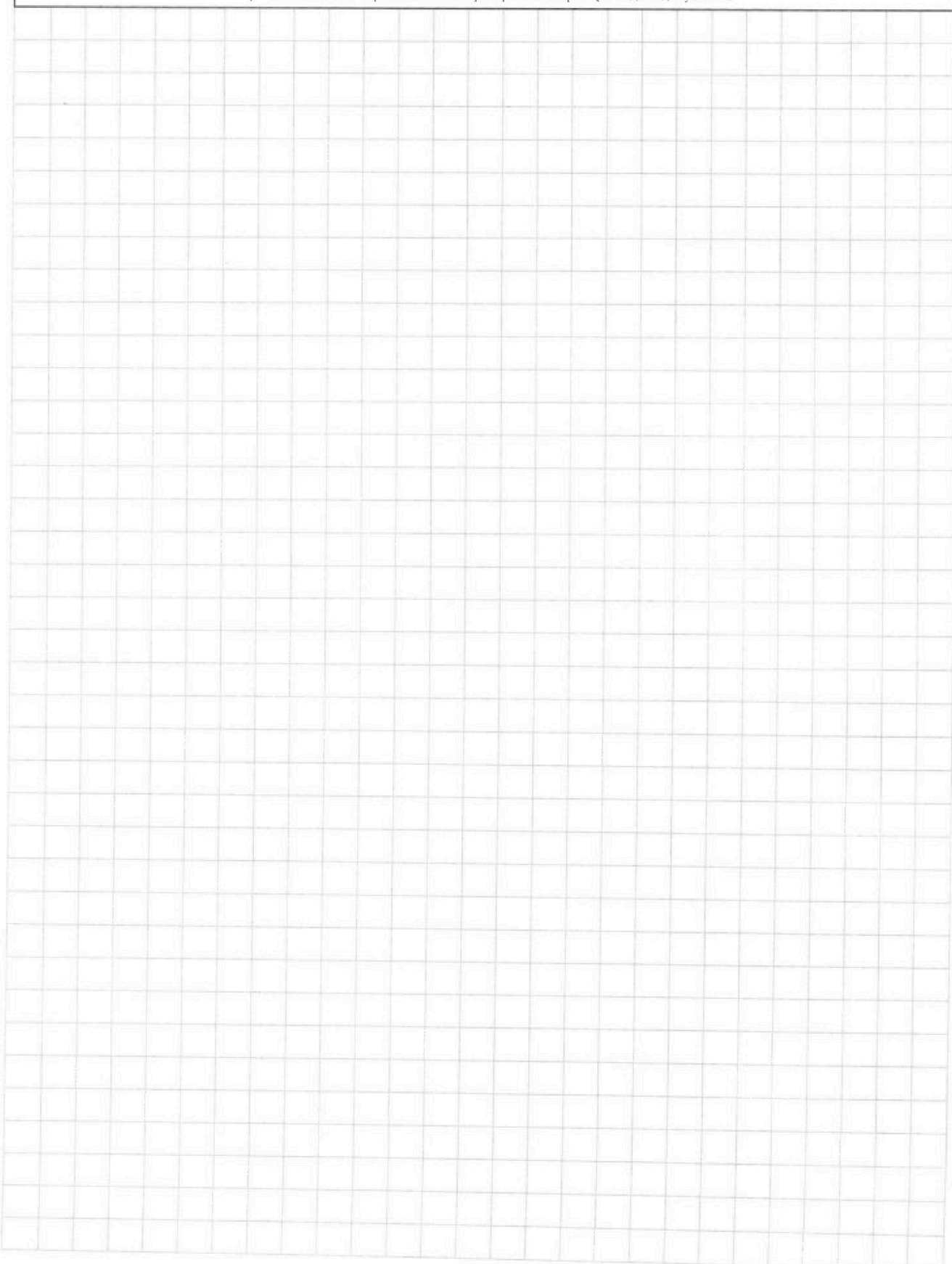
6

☐

7

☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐

МФТИ

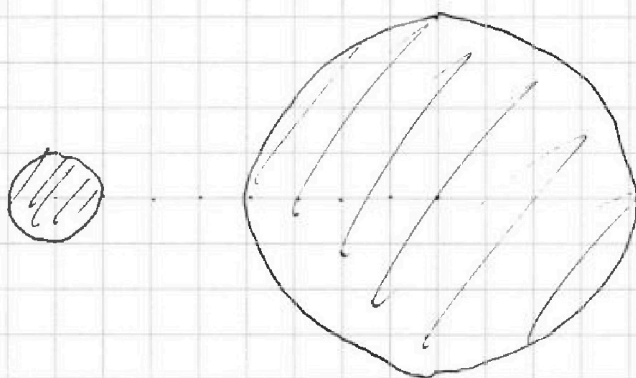
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.

~~Задача 6.~~

1  $x^2 + y^2 \leq 4$

$x^2 + 6y$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

