



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^{14} 7^{10}$$

$$bc : 2^{17} 7^{12}$$

$$ac : 2^{20} 7^{37}$$

$$abc : ab, abc : bc, abc : ac \Rightarrow abc : \text{НОК}(ab, bc, ac)$$

$$abc : 2^{20} 7^{37} \Rightarrow abc \geq 2^{20} 7^{37}$$

$$\text{Предположим, что } abc = 2^{20} 7^{37}$$

$$\text{Пусть } a = 2^x \dots, b = 2^y \dots, c = 2^z \dots$$

$$\begin{cases} x+y \geq 14 \\ y+z \geq 12 \\ x+z \geq 20 \\ x+y+z = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x+y+z) \geq 41 \\ x+y+z = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z \geq 20,5 \\ x+y+z = 20 \end{cases}$$

- противоречие

$$\text{Проверим следующее число } : 2^{20} 7^{37} - \text{это число } 2^{21} 7^{37}$$

Достаточно привести пример a, b и c меньше, чем

$$\begin{cases} ab : 2^{14} 7^{10} \\ bc : 2^{17} 7^{12} \\ ac : 2^{20} 7^{37} \\ abc : 2^{21} 7^{37} \end{cases}$$

$$\text{Пример: } \begin{cases} a = 2^8 7^{10} \\ b = 2^6 7^0 \\ c = 2^{12} 7^{27} \end{cases}$$

$$\text{Сумма: } 2^{21} 7^{37}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{a}{b}$ - несократима, $a, b \in \mathbb{N}$

$$\text{НОД}(a+b, a^2 - 6ab + b^2)_{\max} = ?$$

$$a^2 - 6ab + b^2 = (a+b)^2 - 8ab \quad ; m \mid \Rightarrow 8ab \quad ; m$$

$$a+b \quad ; m$$

$$\begin{cases} 8ab \quad ; m \\ a+b \quad ; m \end{cases}$$

(если первое множитель делится на m , то и второе делится на m , но и второе множитель делится на m)

$$\frac{a}{b} \text{ - несократима } \Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$$

$$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a+b, b) = \text{НОД}(a+b, ab) = 1$$

$\exists ab$ и $a+b$ нет ни одного общего множителя $\Rightarrow$ больше ед.

$$\Rightarrow \begin{cases} ab \quad ; m \\ a+b \quad ; m \end{cases}$$

$$8 \quad ; m \Rightarrow m_{\max} = 8$$

Пример: $a = 3, b = 5$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{8}{9 - 6 \cdot 3 \cdot 5 + 25} = - \frac{8}{507} \quad m=8$$

Ответ: 8.

Onken: 8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, \frac{3}{2}] \cup [3, \infty)$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1})(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$2 - 7x = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$x = 2$$

$$2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 3 - 7x$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$8x^2 - 20x + 12 = 49x^2 - 42x + 9$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D_1 = 121 + 123 = 244 = 4 \cdot 61$$

$$x = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$$

$$x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \text{ — не ур. ОДЗ}$$

$$x = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}, \frac{2}{7} \right\}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$O(0;0), P(-12;24), Q(3;24), R(15,0)$$

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$$

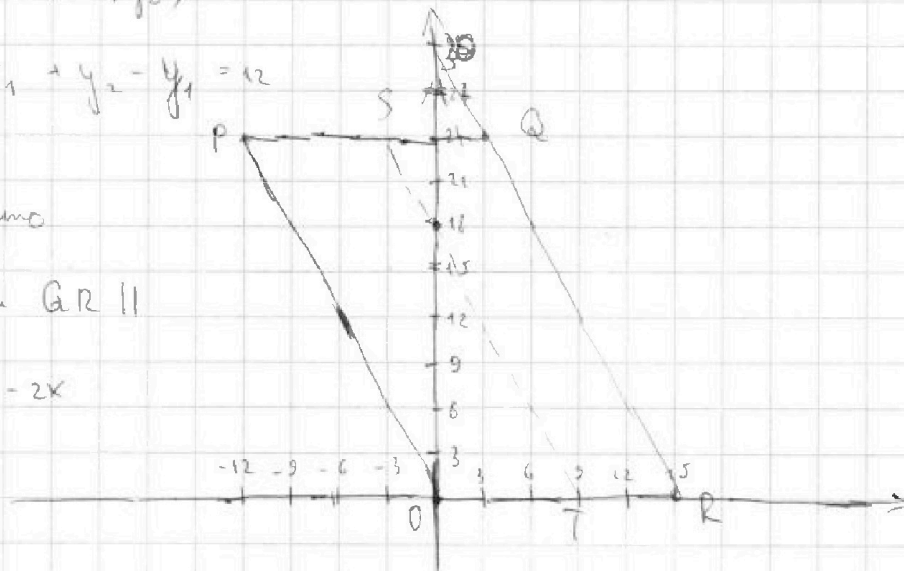
$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

Заметим, что

прямые PO и QR ||

$$\text{прямая } y = -2x$$

Пусть точка A
фиксированна



Тогда все возможные точки B лежат на прямой

$$y = 12 + 2x_1 + y_1 - 2x \parallel y = -2x \parallel PO \parallel QR$$

Чтобы точка B лежала внутри $PQRO$, требуется

$$0 \leq 12 + 2x_1 + y_1 \leq 30 \quad (\text{на каждой прямой будет находиться } \frac{24}{2} - 1 = 13 \text{ точек } B, \text{ учитывая границы})$$

$$-12 - 2x_1 \leq y_1 \leq 18 - 2x_1$$

Положим $x_1 = 0$, тогда B на PO

$$\text{Таким образом } \left(\frac{24}{2} + 1\right) \cdot 10 + 12 \cdot 8 = 130 + 96 = 226$$

$$\text{Значит, всего пар } 226 \cdot 13 = 2938$$

$$\text{Ответ: } 2938$$

$$\begin{array}{r} 226 \\ \times 13 \\ \hline 678 \\ + 2260 \\ \hline 2938 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

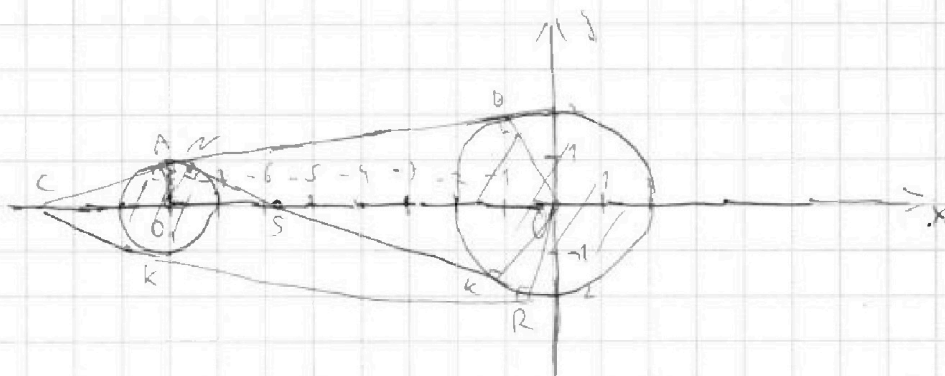
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases} \quad 2 \text{ решения}$$



Система имеет 2 решения $\Rightarrow$ пр. $y = ax - 10b$ кас. окружностей

Тангенс угла α_1 касательной AB, пр. $AB \cap OK = C$

$$AO_1 - \text{сп. 1. } \triangle CBO \Rightarrow CO_1 = O_1O = 8$$

$$AC = \sqrt{8^2 - 1} = 3\sqrt{7}$$

$$\alpha_1 = \angle ACO_1 = \frac{1}{3\sqrt{7}}$$

$$\alpha_2 = -\alpha_1 = -\frac{1}{3\sqrt{7}} \quad (\text{следует из равенства } \triangle CBO, \triangle CRO)$$

Тангенс угла α_3 внешнего касательной NK

$$NK \cap OK = S$$

$$\triangle C_1NS \sim \triangle OKS \quad (\text{по 2 } \angle) \Rightarrow SO = \frac{2}{3} O_1O = \frac{16}{3}$$

$$SK = \sqrt{\frac{256}{9} - 2} = \frac{\sqrt{238}}{3}$$

$$\alpha_3 = \angle OSK = \frac{6}{\sqrt{238}}$$

$$\alpha_4 = -\alpha_3 = -\frac{6}{\sqrt{238}}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{1}{3\sqrt{7}}, \frac{1}{3\sqrt{7}}, \frac{6}{\sqrt{238}}, -\frac{6}{\sqrt{238}} \right\}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a_1 = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{4-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$a_2 = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

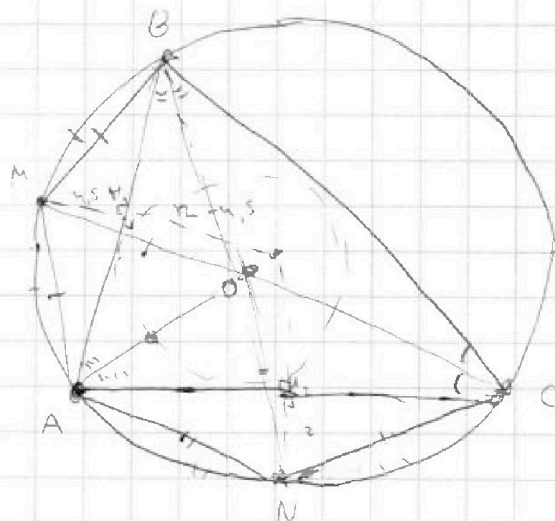
$$a_3 = -\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2 - 2}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{250}{9} - 2}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{238}{9}}} =$$

$$= -\frac{6}{\sqrt{238}} \neq$$

$$a_4 = \frac{6}{\sqrt{238}}$$

! перепроверить.

№7.



AC - ?

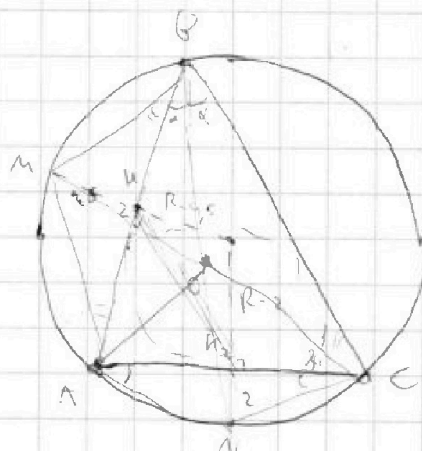
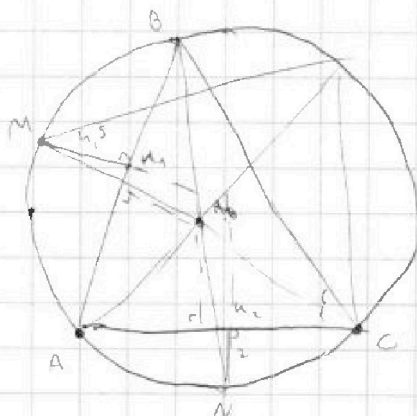
$$AM^2 = (2R - 4,5) \cdot 4,5$$

$$AN^2 = (R - 2) \cdot 2$$

$$R^2 - R = 4 - \frac{1}{2}R = 1$$

$$AB = 2AM = \sqrt{(2R - 4,5) \cdot 4,5}$$

$$AC = \sqrt{(2R - 2) \cdot 2} = 2\sqrt{R - 1}$$



СМ. АН



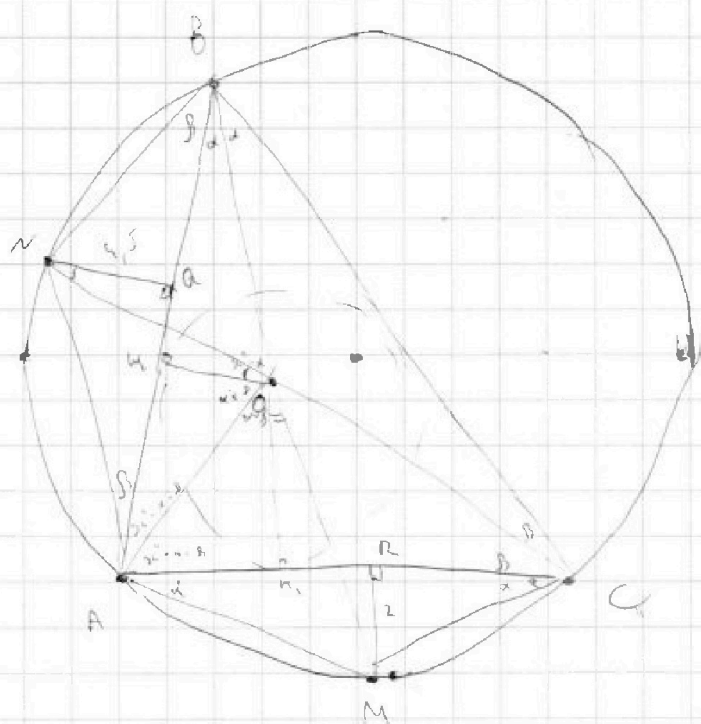
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

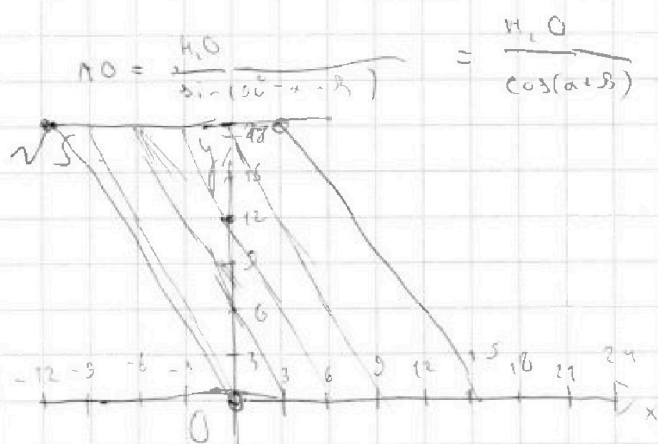
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



10-2



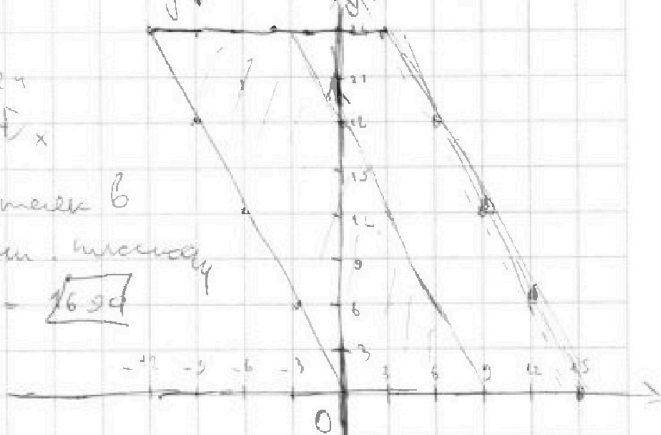
$$\begin{aligned} (y_1 - 2x_1)_{\min} &= 0 \\ (y_1 + 2x_1)_{\max} &= 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 + 2x_1 &= -12 \\ (y_1 + 2x_1)_{\max} &= 18 \\ -12 &\leq y + 2x \leq 18 \\ -12 - 2x &\leq y \leq 18 - 2x \end{aligned}$$

13 · 10 - макс 6
затрачив. макс
13 · 10 · 13 = 1694

$$2x_2 - 2y_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$y_1 = 12 + y_2 + 2x_1 - 2x_2$$



Какой номер у этой задачи
соответствует ~~правильно~~ правильно
1 правильно - 13 чисел точек

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1.

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{11}$$

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$= 2^{20} \cdot 7^{37}$$

Пример

$a =$

$$\text{значит } abc = 2^{21} \cdot 7^{32}$$

$$x + y + z = 52$$

$$x + y + z = 26$$

$$\begin{cases} x = 12 \\ y = 8 \\ z = 6 \end{cases} \text{ - для } 2$$

$$x + y + z = 32$$

$$y = 22$$

$$z = -5 \text{ - не ур.}$$

$$\Rightarrow abc_{\min} = 2^{21} \cdot 7^{37}$$

Оценка

$$\Rightarrow abc: \text{НОК}(ab, bc, ac)$$

$$(abc)_{\min} = \text{НОК}(ab, bc, ac) =$$

$$2(x + y + z) = 51 \text{ - неверно}$$

поменял про 2 максим
отменил а оставил
m. упростила

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ y + z = 12 \\ z + x = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ y + z = 17 \\ z + x = 37 \end{cases}$$

- для 7

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ y + z = 27 \\ z + x = 37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 37 \\ y = 27 \\ z = 0 \\ x = 10 \end{cases}$$

№2.

$$\frac{a}{b}$$

- несократимая, $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, \text{НОД}(a, b) = 1$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

$$(a+b) : m$$

$$a^2 - 6ab + b^2 : m$$

$$(a+b) : m$$

$$(a+b)^2 - 8ab : m$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b : m \\ 28ab : m \end{cases}$$

$$\text{пусть } a = p^x, b = p^y, \dots$$

$$m = 8$$

Пример

$$a = 5, b = 3$$

$$5+3=8$$

$$25 - 6 \cdot 5 \cdot 3 + 9 = 34 - 90 = -56$$

$$: 8$$

$$: 8$$

$$\text{НОД}(ab, a+b) = 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

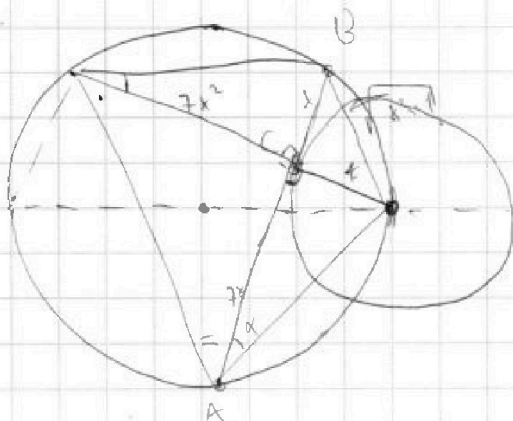
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~3.



$$r = 1$$

$$R = 5$$

$$AB - \dots$$

$$100 = (t+1)(49t+1)$$

$$49t^2 + 50t - 99 = 0$$

$$t = 1, t_2 < 0$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}}$$

$$\sqrt{x^2+1} \sqrt{49x^2+1}$$

$$2R = 10 =$$

$$100 = (x^2+1)(49x^2+1)$$

$$AB = 8$$

$$NH: \sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x \Rightarrow 2x^2-5x+3-2x^2-2x-1$$

$$(\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1})(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} - 1) = 0$$

$$1) \sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$\begin{cases} 2x^2-5x+3=0 \\ 2x^2+2x+1=0 \end{cases}$$

$$2x^2-5x+3=2x^2+2x+1$$

$$7x=2$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1$$

$$2-7x = \sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$2\sqrt{2x^2-5x+3} = 3-7x$$

$$\begin{cases} 2x^2-5x+3 \geq 0 \\ 4(2x^2-5x+3) = 49x^2-42x+9 \end{cases}$$

$$4(2x^2-5x+3) = 49x^2-42x+9$$

$$D_1 = 121 + 123 = 244 = 4 \cdot 61$$

$$x_1 = \frac{11-2\sqrt{61}}{41}$$

$$3 > x_2 = \frac{11+2\sqrt{61}}{41} > \frac{1}{2} \Rightarrow \text{не ур. } 0 \leq 3$$

$$x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (3, \infty)$$

$$(2x-1)(x-3) \geq 0$$

$$2x^2-5x+3 \geq 0$$

$$41x^2-22x-3 \leq 0$$

$$N8. \begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x-8)^2 + y^2 - 1)((x^2 + y^2 - 4)) \leq 0 \end{cases}$$

Чтобы система имела
два решения график
прямой и окружности
касались в одной точке,
имели общую хорду

