МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять только одну задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$ $\quad a, b, c \in \mathbb{N}$ $\quad \min abc - ?$

$bc : 2^{17} \cdot 7^{17}$

$ac : 2^{20} \cdot 7^{37}$

Если $ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$, то его можно представить как $ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot k$; $k \in \mathbb{N}$

Также пусть $bc = 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot m$; $m \in \mathbb{N}$

пусть $ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot n$, $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot k \\ bc = 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot m \\ ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot n \end{cases}$$

Перемножим все 3 уравнения системы

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{51} \cdot 7^{64} mnk$$

$$abc = \sqrt{2^{51} \cdot 7^{64} \cdot mnk} = 2^{25} \cdot 7^{32} \sqrt{2mnk}$$

Минимальное значение mnk, такое, что $2^{25} \cdot 7^{32} \sqrt{2mnk} \in \mathbb{N}$ это 2. Тогда $\min abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{32}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Получаем~~ Из этого равенства следует, что $8ab : m$. Но ни a, ни b по доказанному выше на m не делятся, значит $8 : m$, а отсюда максимальное значение, принимаемое m это 8. Оно достигается например при $a=3$ $b=5$.

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{a}{b}$ - несократимая

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$

$\max m$, такое, что $a+b \vdots m$ и $a^2-6ab+b^2 \vdots m$ - ?

Пусть есть такое m. Тогда верно следующее

$$\begin{cases} a+b \underset{m}{\equiv} 0 \\ a^2-6ab+b^2 \underset{m}{\equiv} 0 \end{cases}$$

$a \underset{m}{\equiv} -b$. Это значит, что ни a, ни b на m делиться не должны, ведь если a делится, то $a \underset{m}{\equiv} 0 \underset{m}{\equiv} -b$, а это противоречит несократимости $\frac{a}{b}$.

Представим $a+b = km$, $k \in \mathbb{N}$

$a^2-6ab+b^2 = hm$, $h \in \mathbb{N}$

Тогда имеем $\begin{cases} a+b=km \\ a^2-6ab+b^2=hm \end{cases}$

$$\begin{cases} a^2+2ab+b^2=k^2m^2 \\ a^2-6ab+b^2=hm \end{cases} \Big) -$$

$8ab = k^2m^2 - hm = m(k^2m-h)$

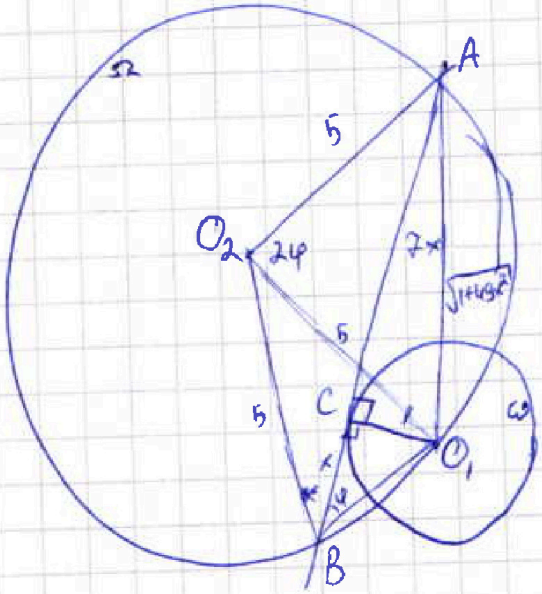
Продолжение на обороте

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$R_\Omega = 5$

$R_\omega = 1$

$AC:CB = 7$ AB кас. ω

AB - ?

Решение:

1) Пусть $AB = 8x$, тогда $AC = 7x$ $BC = x$

~~Пусть $\varphi = \angle$~~ Пусть O_1 - центр ω; O_2 - центр Ω

Пусть $\varphi = \angle O_1BC$

2) т.к. AB - касательная к ω $\angle O_1CA = 90°$; $\angle O_1CB = 90°$

3) по теореме Пифагора в $\triangle AO_1C$; в $\triangle CO_1B$

$AO_1^2 = CO_1^2 + AC^2$ $O_1B^2 = BC^2 + O_1C^2$

$AO_1 = \sqrt{1+49x^2}$ $O_1B = \sqrt{1+x^2}$

4) т.к. $\angle O_1O_2A$ - центральный для дуги $\smile AO_1$, на которую опирается вписанный $\angle O_1BA = \varphi$, то $\angle O_1O_2A = 2\varphi$

Продолжение на обороте

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

5) ~~cos φ~~ $\sin\varphi = \frac{O_1C}{O_1B} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ в $\triangle O_1CB$

$\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

6) $O_1O_2 = O_2A = 5$ как радиусы Ω $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle O_1O_2A$ – равнобедренный $\Rightarrow \angle O_2O_1A = \angle O_2AO_1 =$

$= 90^\circ - \varphi$

7) по теореме косинусов в $\triangle O_1O_2A$

$O_2A^2 = O_1O_2^2 + AO_1^2 - 2O_1O_2 \cdot AO_1 \cdot \cos(90^\circ - \varphi)$

$25 = 25 + 1 + 49x^2 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{1+49x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\frac{10\sqrt{1+49x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + 49x^2$

$\frac{10}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+49x^2}$

$\frac{100}{1+x^2} = 1 + 49x^2$

$100 = 1 + 49x^2 + x^2 + 49x^4$

$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$

$x^2 = 1$ $\qquad$ $x^2 = -\frac{99}{49}$ нет корней

$x = 1$

8) Т. к. $AB = 8x$ $\qquad AB = 8$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Обратная замена

$$\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3}=1-\sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$\begin{cases} 1-\sqrt{2x^2+2x+1}\geq 0 \\ 2x^2-5x+3=1+2x^2+2x+1-2\sqrt{2x^2+2x+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2+2x+1}\leq 1 \\ -7x+1=-2\sqrt{2x^2+2x+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2+2x\leq 0 \\ 49x^2-14x+1=8x^2+8x+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x+1)\leq 0 \\ 41x^2-22x-3=0 \end{cases}$$

$+$ на $(-\infty;-1]$, $-$ на $[-1;0]$, $+$ на $[0;+\infty)$

$x\in[-1;0]$

$D=484+12\cdot 41=976$

$$x_{1,2}=\frac{22\pm\sqrt{976}}{82}=\frac{22\pm 2\sqrt{244}}{82}=\frac{11\pm\sqrt{244}}{41}$$

$$x=\frac{11+\sqrt{244}}{41}$$

$$x=\frac{11-\sqrt{244}}{41}$$

не подходит под $x\in[-1;0]$

Ответ: $\frac{11-\sqrt{244}}{41}$; $\frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4) $\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

ОДЗ: $2x^2-5x+3 \geq 0$ $(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right) \geq 0$ $x \in (-\infty; 1] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$

$2x^2+2x+1 \geq 0$ $D = 4-8 < 0$ всегда верно

~~Т. к. $2x^2-5x+3-(2x^2+2x+1) = 2-7x$ можем заменить $\sqrt{2x}$~~

Замена $\sqrt{2x^2-5x+3} = a$

$\sqrt{2x^2+2x+1} = b$

$2-7x = 2x^2-5x+3-2x^2-2x-1 = a^2-b^2$

$a-b = a^2-b^2$

$a-b = (a-b)(a+b)$

1) $a-b=0$

$a=b$

Обр. замена $\sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2x^2+2x+1}$

$2x^2-5x+3 = 2x^2+2x+1$

$7x = 2$ $x = \frac{2}{7}$

2) $a+b=1$

Продолжение на обратной стороне

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a_1 = \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{\sqrt{55}}$

$a_2 = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\frac{3}{\sqrt{55}}$

Ответ: $\pm\frac{3}{\sqrt{55}}$; $\pm\frac{1}{3\sqrt{7}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Продолжение случая 2

$\angle O_1BB_1 = \angle O_2BC_1$

$\angle BC_1O_2 = \angle BB_1O = 90^\circ$ по свойству касательной

Тогда $\triangle BO_1B_1 \sim \triangle BO_2C_1$ с коэф. $\frac{O_2C_1}{O_1B_1} = 2$

Пусть $BB_1 = x$, тогда по подобию $BC_1 = 2x$

По теореме Пифагора в $\triangle BO_2C_1$; в $\triangle BOB_1$

$BO_2^2 = O_2C_1^2 + BC_1^2$ $\quad$ $BO_1^2 = B_1O_1^2 + BB_1^2$

$BO_2 = 2\sqrt{x^2+1}$ $\quad$ $BO_1 = \sqrt{1+x^2}$

Так как расстояние между центрами окружностей равно 8

$BO_2 + BO_1 = 8$

$3\sqrt{x^2+1} = 8$

$x^2 + 1 = \frac{64}{9}$

$x^2 = \frac{55}{9}$

$x = \frac{\sqrt{55}}{3}$

~~Так как Ано~~ Так как а и в уравн. ~~ее~~ прямой $y = ax + ов$ это тангенс её наклона $tg\alpha$ есть искомый а и $tg(180^\circ - \alpha)$ это а для второй прямой

Продолжение на обороте

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

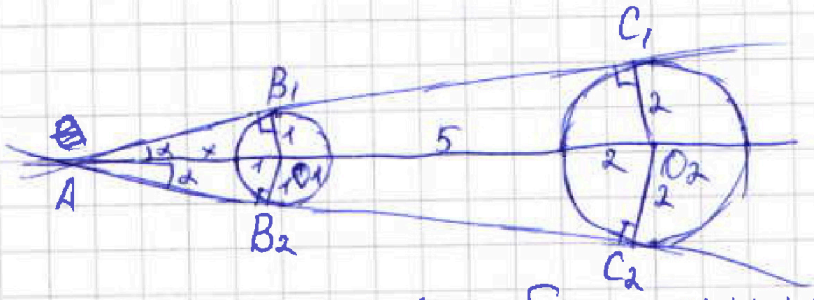
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Касания прямой и двух окружностей могут происходить только так, как показано на чертеже.

У нас 4 различных подходящих нам прямых

1) Рассмотрим ~~окружности~~ прямые, пересекающиеся в A. A будет лежать на оси Ox, ~~так как~~ ~~дважды~~ выполнено свойство касательных ~~для~~



так как центры обеих окружностей должны быть равноудалены от каждой из этих прямых. Тогда Ox есть биссектриса угла $\angle A$, т. к. центры окружностей, лежащие на ней равноудалены от сторон угла.

Пусть $\angle A = 2\alpha$

B_1, C_1 – точки касания одной прямой с окружностями

B_2, C_2 – точки касания второй прямой с окружностями

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

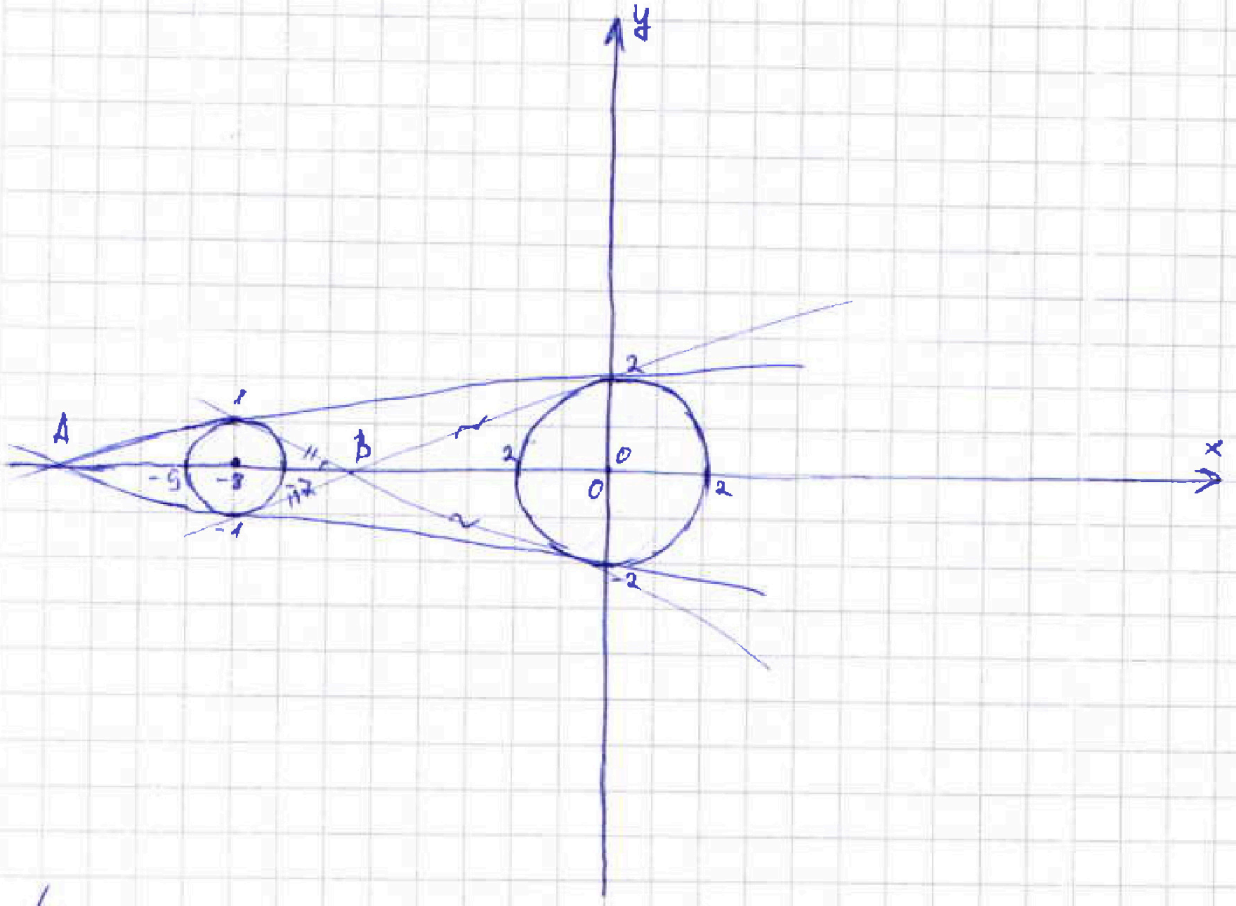
6) $\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \le 0 \end{cases}$

$y = ax + 10b$ (1)

(2)

$(x+8)^2 + y^2 = 1$ – окружность с ц. в $(-8;0)$ $R = 1$

$x^2 + y^2 = 4$ – окружность с ц. в $(0;0)$ $R = 2$



Система имеет 2 решения, когда прямая $y = ax + 10b$ касается двух окружностей.

Решением нер-ва (2) будут области внутри окружностей, включая их границы

Продолжение на обороте листа

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

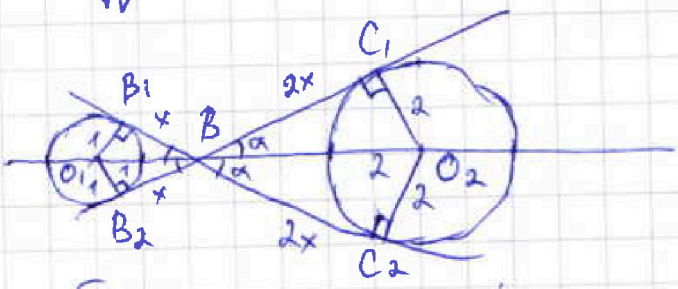
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

искомый а в этом случае это $tg\alpha = \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{1}{3\sqrt{7}}$

Для прямой касающейся окружностей в точках B_2 и C_2 искомый а это $tg(180°-\alpha) = -\frac{1}{3\sqrt{7}}$

2) Рассмотрим ~~[illegible]~~, две прямые, пересекающиеся в B. B будет лежать на оси Ox, так как центры обеих окружностей должны быть равноудалены от каждой из этих прямых



~~Ox есть биссектриса угла~~

Пусть B_1, C_2 – точки касания одной прямой с окружностями

B_2, C_1 – точки касания второй прямой с окружностями

$\angle C_1BC_2 = 2\alpha = \angle B_1BB_2$ как вертикальные

Так как BC_1 и BC_2 касательные $\Rightarrow$ Ox – биссектриса $\angle C_1BC_2$ и $\angle B_1BB_2$

Продолжение на след. листе

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение случая 1

~~sinα~~ Пусть расстояние от A до окружности $(x+8)^2+y^2=1$ это x

$\sin\alpha = \frac{1}{x+1}$ для ~~прямоугольного~~ ~~окружность~~ и ~~треугольника~~ прямоугольного по свойству касательной треугольника AB_1O_1

$\sin\alpha = \frac{2}{9+x}$ для прямоугольного по тому же свойству $\triangle AC_1O_2$

Можем приравнять и получим

$$\frac{1}{x+1} = \frac{2}{9+x}$$

$$9+x = 2x+2$$

$$x = 7$$

По теореме Пифагора в $\triangle AB_1O_1$

$$AB_1^2 = B_1O_1^2 + AO_1^2$$

$$AB_1 = \sqrt{63}$$

Так как коэффициент a в уравнении прямой ~~это~~ $y=ax+b$ это тангенс угла наклона

Продолжение на обороте листа

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Аналогично относительно M, середины $\smile AB$ и перпендикуляра MM' по этой же теореме $AM' = BM'$

3) т. к. M - середина $\smile AB$ CM - биссектриса $\angle ACB$, и поэтому проходит через I, центр вписанной окр. $\triangle ABC$

Аналогично BN - биссектриса $\angle CBA$

4) $\angle CBN = \angle ABN = \angle CAN$ как ~~лежащие на одной~~ вписанные, опирающиеся на равные дуги

$\angle BCM = \angle ACM = \angle BAM$ как вписанные, опирающиеся на равные дуги

5) Пусть $AC = 2a$, тогда $AN' = CN' = a$

$AB = 2b$, тогда $AM' = BM' = b$

6) ~~по т. синусов в $\triangle ABC$~~

~~$\frac{AC}{\sin B} = \frac{MM'}{AM'} = \frac{4,5}{}$~~

6) по теореме Пифагора в $\triangle AMM'$, в $\triangle NAN'$

$AM^2 = MM'^2 + AM'^2$ $\quad$ $NA^2 = N'A^2 + NN'^2$

$AM = \sqrt{4,5^2 + b^2}$ $\quad$ $NA = \sqrt{a^2 + 4}$

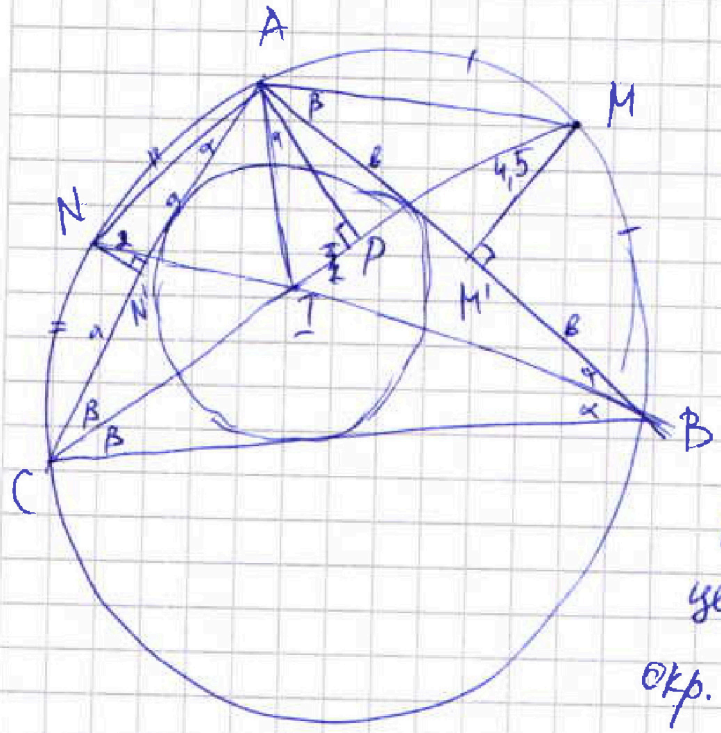
Продолжение на следующем листе

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



M - середина $\smile AB$

N - середина $\smile AC$

расстояние от M до AB = 4,5

от N до AC = 2

расстояние от A до центра вписанной окр. $\triangle ABC$ - ?

Решение

1) пусть I - центр вписанной окружности $\triangle ABC$

$\angle NAC = \alpha$ MM' - расстояние от M до AB

$\angle BAM = \beta$ NN' - расстояние от N до AC

2) NN' перпендикуляр к хорде AC, описанной окружности $\triangle ABC$, проходящий через середину $\smile AC$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по теореме о радиусе, перпендикулярном хорде $AN' = CN'$ и прямая NN' содержит центр описанной около $\triangle ABC$ окружности

В Продолжение на обороте листа

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

7) $\sin\beta = \frac{MM'}{AM} = \frac{4,5}{\sqrt{4,5^2+B^2}}$ в $\triangle AMM'$

$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{4,5^2+B^2}} = \frac{AM'}{AM}$

$\sin 2\beta = \frac{9B}{4,5^2+B^2}$

8) $\sin\alpha = \frac{NN'}{AN} = \frac{2}{\sqrt{a^2+4}}$ в $\triangle ANN'$

$\cos\alpha = \frac{AN'}{AN} = \frac{a}{\sqrt{a^2+4}}$

$\sin 2\alpha = \frac{4a}{a^2+4}$

9) по т. синусов для $\triangle ABC$

$$\frac{AB}{\sin\angle ACB} = \frac{AC}{\sin\angle ABC}$$

$$\frac{AB}{\sin 2\beta} = \frac{AC}{\sin 2\alpha}$$

$$\frac{2B(4,5^2+B^2)}{9B} = \frac{2a(a^2+4)}{4a}$$

$$4,5^2 \cdot 4 + 4B^2 = 9a^2 + 36$$

$$B^2 = \frac{9}{4}a^2 + 9 - 4,5^2$$

10) дополнительное построение $AP \perp CM$

11) т. к. AI проходит через I - центр вписанной окружности $\triangle ABC$, то AI - биссектриса $\angle BCA$

12) $\angle BCA = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$

$\angle CAI = \frac{1}{2}\angle BCA = 90^\circ - \alpha - \beta$

Продолж. на обороте

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

13) $\angle CAP = 90^\circ - \angle ACP = 90^\circ - \beta$

$\angle IAP = \angle CAP - \angle CAI = 90^\circ - \beta - 90^\circ + \beta + \alpha = \alpha$

14) $\sin\beta = \frac{AP}{ABC}$ в $\triangle APC$

$\frac{AP}{ABC} = \frac{4,5}{\sqrt{4,5^2 + b^2}}$

Подставим b^2 из пункта 9 решения

$\frac{AP}{ABC} = \frac{4,5}{\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 9}} = \frac{4,5}{3\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 1}} \Rightarrow AP = \frac{4,5 \cdot 2a}{3\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 1}}$

15) $\cos\alpha = \frac{AP}{AI}$ в $\triangle API$

$\frac{AP}{AI} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4}} = \frac{a}{2\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 1}}$

Подставим AP из пункта 14 решения

$\frac{3a}{AI\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 1}} = \frac{a}{2\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 1}}$

$\frac{3}{AI} = \frac{1}{2}$

$AI = 6$

Ответ: 6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\begin{cases} y = ax + 10b \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

a

$\sqrt{1+x^2} - 1 + 2\sqrt{1+x^2} - 2 = 8$

$3\sqrt{1+x^2} = 11$

$\alpha = \frac{3}{\sqrt{112}}$

$9 + 9x^2 = 121$

$9x^2 = 112$

$x^2 = \frac{112}{9}$

$\frac{1}{x+1} = \frac{2}{9+x}$

$9 + x = 2x + 2$ $\quad x = 7$

$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\alpha =$

$5 + 3x^2 = 8$

$x^2 = 1 \quad x = 1$

$3\sqrt{7}$

$\begin{cases} x^2 + 20ab\,x + 100b^2 - 4 = 0 \\ x^2 + 16x + 64 \end{cases}$

$a = \frac{1}{3\sqrt{7}}$

$\begin{cases} (a+1)x^2 + 20abx + 100b^2 - 4 = 0 \\ (a+1)x^2 + (16 + 20ab)x + 100b^2 + 63 = 0 \end{cases}$

$100b^2 - 4 = k^2$

$100b^2 + 63 = t^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}$ $\frac{a}{b}$ -- несокр

НОД$(a+b;\ a^2-ab+b^2)$

$\frac{a^2-ab+b^2}{a+b} = a-2b+\frac{3b^2}{a+b}$ $a-2b$ $3b^2$ сок

$\frac{5}{3} = 1+\frac{2}{3}$ $\frac{(a+b)^2-3ab}{a+b}$ $a+b-\frac{3ab}{a+b}$

$\frac{a+b}{3b^2} - \frac{\frac{a}{b}+1}{3b}$ $(a;b)=1$ $\frac{\frac{(a+b)^2}{b}-3a}{\frac{a}{b}+1}$

$\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}$ $\begin{cases}a=3\\b=5\end{cases}$ $a \underset{b}{\equiv} x$ $a^2 \underset{b}{\equiv} x^2$ $x^2 \underset{b}{\equiv} 0$

$9-6\cdot3\cdot5+25$ 90 81 25 56

$a \underset{m}{\equiv} -b$ $y=ax+10b$ $y=\frac{3}{8}x+2$ $\begin{cases}a+b \underset{m}{\equiv} 0\\ a^2-ab+b^2 \underset{m}{\equiv} 0\end{cases}$

$ab \underset{m}{\equiv} -b^2$

$\begin{cases}a+b=km\\ a^2-ab+b^2=hm\end{cases}$ $\begin{cases}2=10b\\ -1=-8a+10b\end{cases}$ $9-6\cdot3\cdot5+25 = 34-30=3b$

$\begin{cases}a^2+2ab+b^2=k^2m^2\\ a^2-ab+b^2=hm\end{cases}$ $-1=-8a+2$ $8a=3$ $a=\frac{3}{8}$ $b=\frac{2}{10}$

$\begin{cases}y=\frac{3}{8}x+2\\ x^2+y^2=4\end{cases}$ 1к

$3ab=m(k^2m-h)$ в $\frac{64}{9}$ $\frac{9}{3}$

$3ab \vdots m$

$\vdots m \vdots m$

$3\frac{a}{m}b=1$

$x^2+\frac{9}{64}x^2+\frac{3}{2}x+4=4$

(8) $x\left(\frac{73}{64}x+\frac{3}{2}\right)=0$ $x=-\frac{3}{2}\cdot\frac{64}{73}=-\frac{96}{73}$ 32

$3ab \underset{m}{\equiv} 0$

$\vdots 3b^2 \underset{m}{\equiv} 0$

$3 \underset{m}{\equiv} 0$

$m=3$

$\begin{cases}y=ax+10b\\ x^2+y^2=4\end{cases}$ 1к

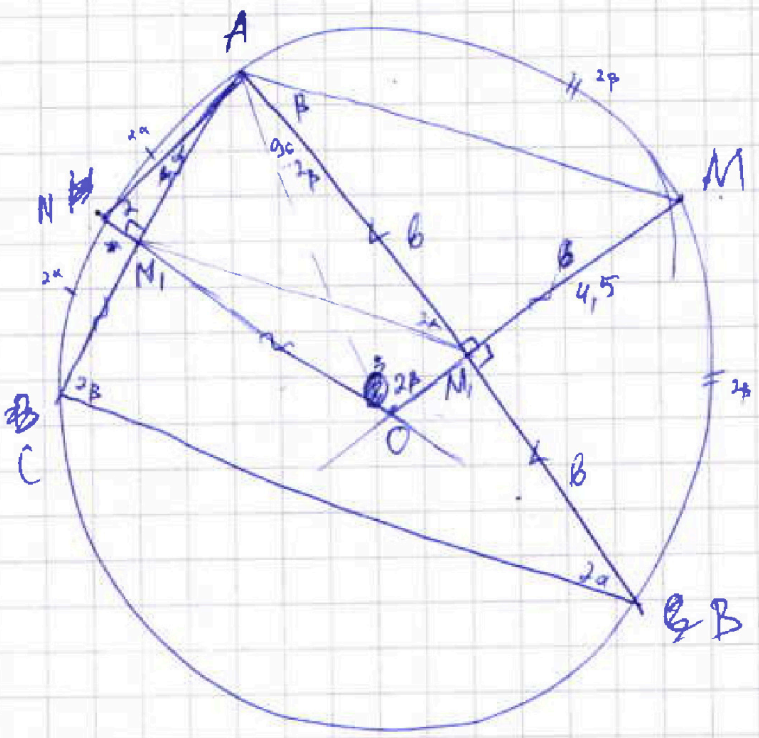
$\begin{cases}y=ax+10b\\ (x+3)^2+y^2=1\end{cases}$ 1к

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a = 4,5 \quad b = 2$

$R - ?$

$360 - 2\alpha - 2\beta$

$360 - 2\alpha - 2\beta$

$\sin\beta = \frac{4,5}{\sqrt{4,5^2 + b^2}}$

$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{4,5^2 + b^2}}$

$\sin 2\beta = \frac{9b}{4,5^2 + b^2}$

$\frac{AB}{2\sin 2\beta} = 2R$

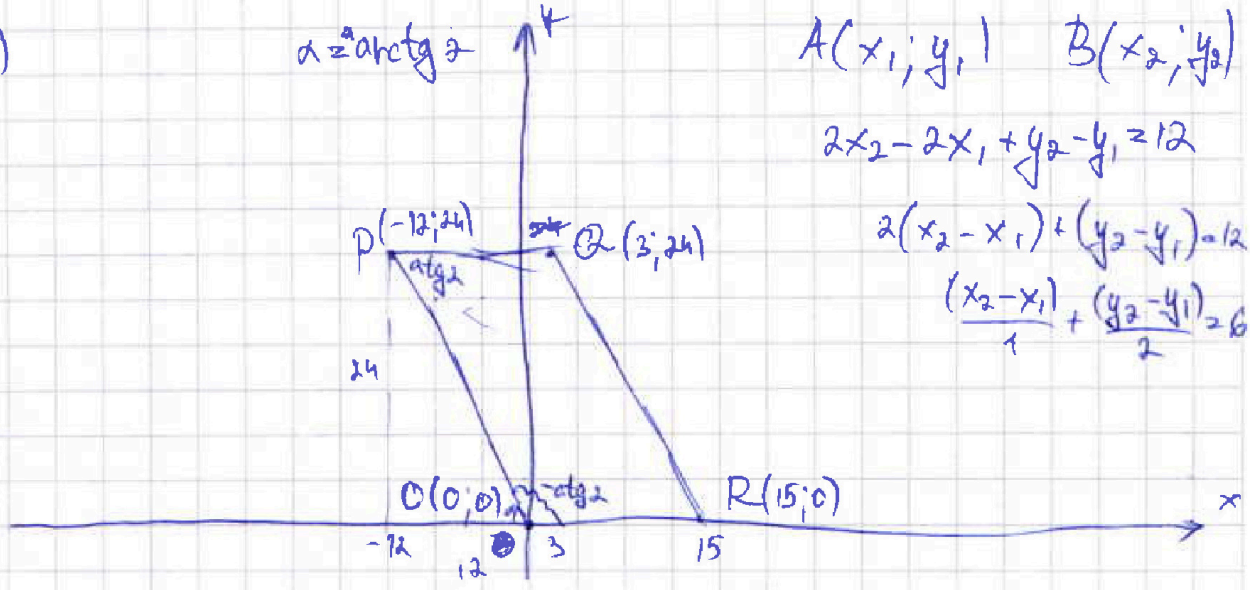
$R = \frac{4,5^2 + b^2}{9}$

$\frac{2^2 + a^2}{4} = \frac{b(4,5^2 + b^2)}{9b} = R$

$\frac{9b}{4,5^2 + b^2} =$

$36 + 9a^2 = 4 \cdot 4,5^2 + 4b^2 \quad b^2 = 9 + \frac{9}{4}a^2 - 4,5^2$

5) $\alpha = \operatorname{arctg} 2$



$A(x_1; y_1) \quad B(x_2; y_2)$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$

$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$

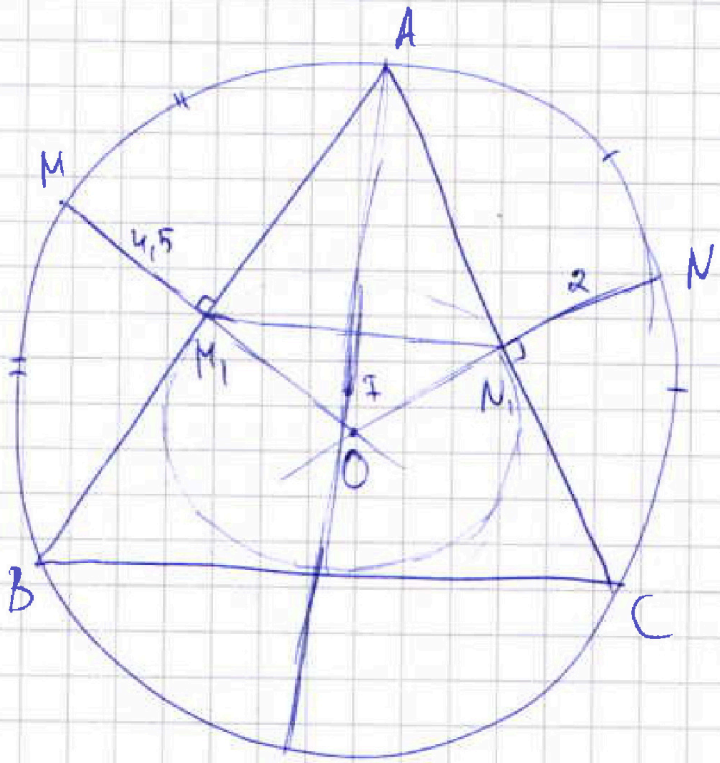
$\frac{(x_2 - x_1)}{1} + \frac{(y_2 - y_1)}{2} = 6$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) ~~cos~~ sin, т. sin

в через a

2) ~~[illegible]~~ перпенд к BP

3) ∠ BIA = 90 + B/2

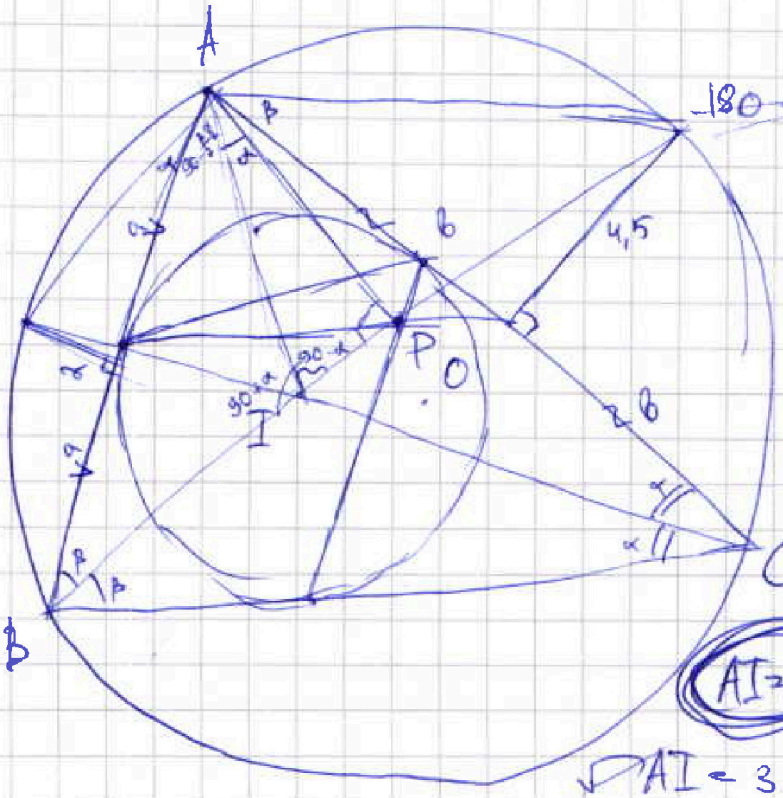
4) sin △BAP, △IAP

180 − β − α



$180-\frac{\alpha}{2}-90+\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{2}$

~~sin~~ $\cos x = \frac{a}{\sqrt{a^2+4}}$



$180-90+\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{2}-\beta = 90+\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}$

$\frac{AP}{AB} = \frac{4,5}{\sqrt{4,5^2+6^2}}$

$\frac{AP}{2a} = \frac{4,5}{\sqrt{9+\frac{9}{4}a^2}}$

$AP = \frac{9a}{\sqrt{9+\frac{9}{4}a^2}}$

$\frac{9a}{AI\sqrt{9+\frac{9}{4}a^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+4}}$

AI = 6

$\frac{9^3}{3AI\sqrt{9+\frac{9}{4}a^2}} = \frac{9}{\sqrt{a^2+4}}$

$AI = 3\sqrt{4\left(\frac{1}{4}a^2+1\right)} = 6\sqrt{1+\frac{1}{4}a^2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $ab : 2^{14}7^{10}$
$bc : 2^{17}7^{17}$
$ac : 2^{20}7^{37}$

$ab = 2^{14}\cdot 7^{10}k$
$bc = 2^{17}\cdot 7^{17}m$
$ac = 2^{20}\cdot 7^{37}n$

$\min abc - ?$

$a^2b^2c^2 = 2\cdot 7\, mnk$

$abc = 2^{\frac{25}{2}}\cdot 7^{\frac{37}{2}}\cdot\sqrt{2mnk}$

$abc = 2^{13}\cdot 7^{18}$

$m=2 \quad n=1 \quad k=1$

2) $\frac{a}{b}$ несокр

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$

$x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}$

$\frac{p}{\sqrt{1+x^2}} \quad p-\frac{2}{1+x^2}$

$R_\omega = 1 \quad R_\Omega = 5$

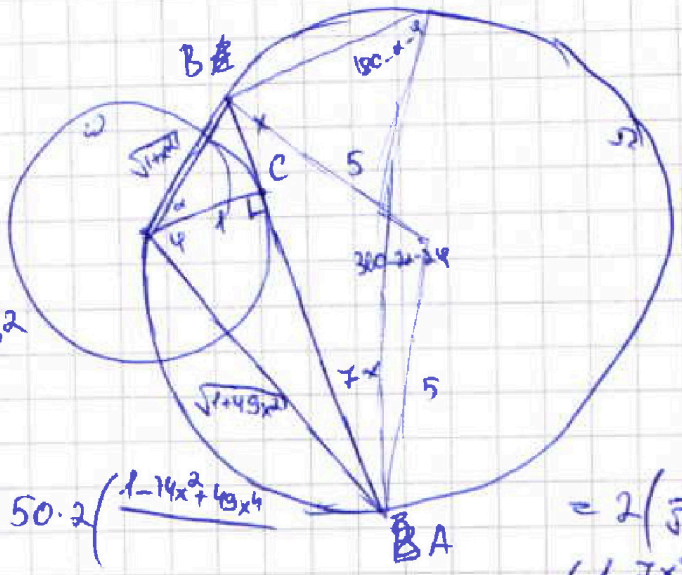
$\gcd(a+b, a^2-6ab+b^2) - ?$

$a^2-6ab+b^2 \mid a+b$
$a^2+ab \quad\quad a-7b$
$-7ab+b^2$
$-7ab-7b^2$
$8b^2$

$\frac{AC}{CB} = \frac{7x}{x}$

$8x - ?$

3)



$a-b = a^2-b^2$

$64x^2 = 50 - 50\cdot 2\left(\frac{1-14x^2+49x^4}{\dots}\right)$

$2x^2-5x+3-2x^2-2x-1 =$

$= -7x+2$

$\cos(2\pi-2\alpha-2\varphi) =$

$= \cos(2(\alpha+\varphi)) =$

$= 2\cos^2(\alpha+\varphi)-1 =$

$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+49x^2}}-\frac{7x\cdot x}{\sqrt{\dots}}\right)^2-1$

$= 2\left(\frac{1-7x^2}{\sqrt{\dots}}\right)^2-1$