



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1
Т.к. нам надо найти минимальное abc , то скажем, что
числа a, b и c ~~раздаются~~ имеют вид $2^x \cdot 7^y$ без дробн.
множителей. a_2, b_2, c_2 — степени 2 при a, b, c соотв.
 a_7, b_7, c_7 — аналогично степени при 7.

$$\begin{aligned}a_2 + b_2 &\geq 14 \\ b_2 + c_2 &\geq 17 \\ a_2 + c_2 &\geq 20\end{aligned}$$

$$2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 51$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 26$$

$$\Rightarrow a \cdot b \cdot c (\min) = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

$$\text{Ответ: } 2^{26} \cdot 7^{37}$$

$$\begin{aligned}a_7 + b_7 &\geq 10 \\ b_7 + c_7 &\geq 17\end{aligned} \Rightarrow a_7 + b_7 + c_7 \geq 27$$

$$\text{но } a_7 + c_7 \geq 37$$

$$\Rightarrow a_7 + b_7 + c_7 \geq 37$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

если бы ab делилось на $(a+b)$, то всю дробь можно было бы сократить на $a+b$, но $\rightarrow$

$\Rightarrow \frac{ab}{a+b}$ — несократима дробь, т.к. $a+b$ не имеют общих делителей $\Rightarrow a+b$ не имеет делителей ни a , ни b

но член $8ab$ можно сократить еще и на b

то есть если $a+b$ будет делиться на 8 , то и всю дробь можно будет разделить на 8 .

если мы берем $a=3$ и $b=5$, то это работает ($\frac{a}{b}$ — несокр., $a+b$ кратно 8 .)

$\Rightarrow m=8$

Ответ: $m=8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

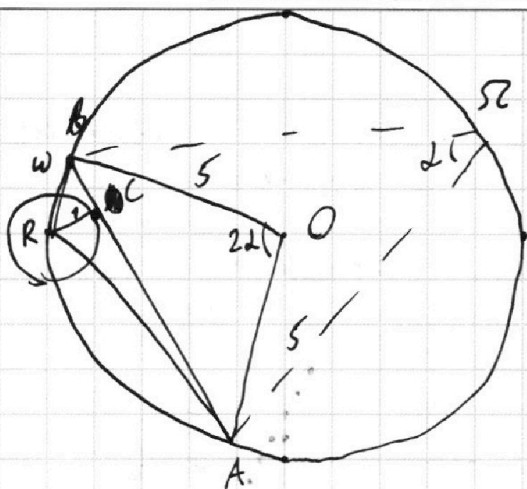
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Пусть $\angle AOB = 2\alpha$
Тогда $\angle BAO = \angle ABO = 90 - \alpha$
р/б треугольнике.

Пусть $BC=y$. Тогда $AC=by$

По т-ме синусов для $\triangle AOB$:

$$\frac{5}{\sin(90^\circ - 2)} = \frac{8y}{\sin 2} \Rightarrow 8y = 5 \cdot 2 \cdot \sin 2$$
$$\Rightarrow y = \frac{5}{4} \cdot \sin 2$$

$\angle BRA$ - вписанный и опирается на дугу, вписавшуюся на дугу
 $2L \Rightarrow \angle BRA = 180 - L$

$$\sin \angle DRA = \sin(\angle BRC + \angle CRA) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+9y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{7y}{\sqrt{1+9y^2}} =$$

$$= \frac{8y}{\sqrt{(1+y^2) \cdot (1+49y^2)}}$$

$$\sin \angle BRA = \sin(180 - L) = \sin L$$
$$\sin L = \frac{4 \cdot 4}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{8y}{\sqrt{(1+50y^2+49y^4)}} = \frac{4}{5} \Rightarrow (10)^2 = 1+50y^2+49y^4$$

$$49y^4 + 50y^2 - 99 = 0$$

$$49y^4 + 50y^2 - 99 = 0$$

$$y = \frac{-50 + \sqrt{50^2 + 4 \cdot 99 \cdot 49}}{2 \cdot 99} =$$

$$= \frac{\sqrt{-50 + \sqrt{21904}}}{98} = \sqrt{\frac{98}{98}} = 1 \Rightarrow AB = 2y = 8$$

Ответ: $AB = 8$

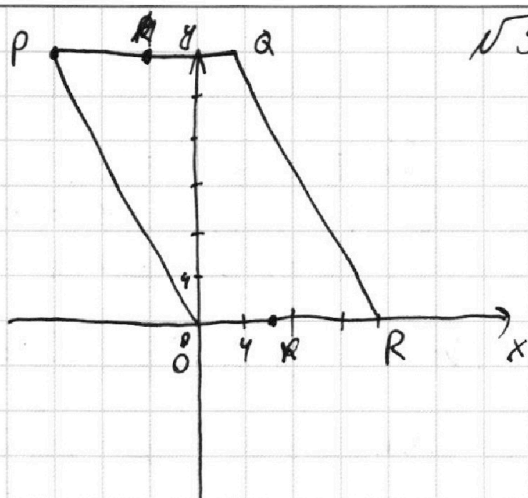
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

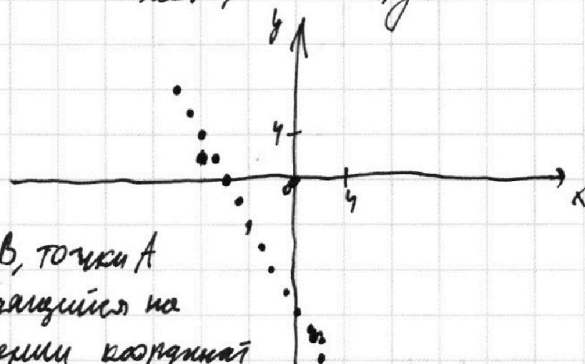
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Поймем, как выглядит $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 - 12 = 0$

Красен, что $x_2, y_2 = 0$



Относительно точки B, точки A (возможные) образуют ряд, находящийся на прямой $y = -12 - 2x$ (при записи координат x, y точки B). Наклон прямой -2 , как и у парал-ла.

⇒ точки B (возможные) будут найдены в параллелограмме

$$\text{R} \text{ MQR}, \quad x_R = x_0 + 6, \quad x_M = x_R + 6 \\ y_R = y_0, \quad y_M = y_R$$

Для каждой из точек B будет доступна ^{или 12} 13^я точка A (или $(y_R - y_0) + 1 = 13$, $\frac{y_R - y_0}{2} = 12$)

⇒ Всего пар/количество точек B для которых есть 13 точек A парал-ла: $(x_A - x_M + 1) \cdot (y_A - y_M + 1) = 10 \cdot 13$

⇒ Пар образовано: $10 \cdot 13 \cdot 13 = 1690$

Количество точек B, для которых 12 пар: $10 \cdot 12 \Rightarrow$
пар всего: $10 \cdot 12 \cdot 12 + 10 \cdot 13 \cdot 13 = 10 \cdot (144 + 169) = 3130$

Ответ: 3130 пар

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

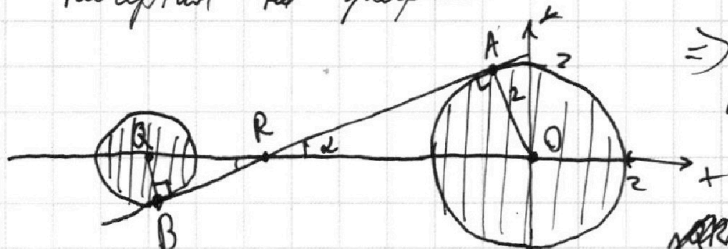
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



окружн. $((x+8)^2 + y^2 - 1)$ $\sqrt{6}$ $(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$

Начертим на графике



$y = 10b + ax$ - прямая

$\Rightarrow$ 2 решения только когда
прямая касается 2х окружностей

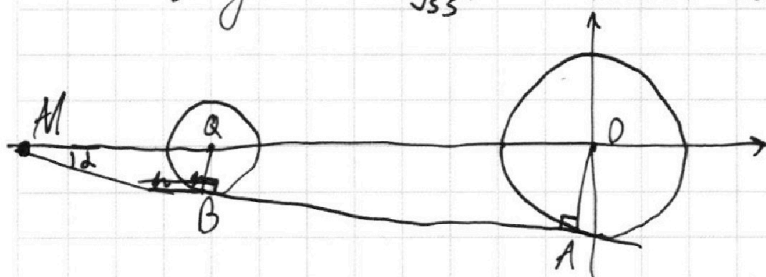
$\triangle QRB \sim \triangle ORA$ по 2м углам

$\Rightarrow \frac{QR}{RO} = \frac{QB}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow QR = \frac{8}{3}$

$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{8} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{64}} = \frac{\sqrt{55}}{8}$

$\Rightarrow \tan \alpha = a = \frac{3}{\sqrt{55}}$

аналогично получим $a = -\frac{3}{\sqrt{55}}$



$\triangle MQB \sim \triangle MOA$ по 2м углам

$\Rightarrow \frac{MQ}{MO} = \frac{QB}{OA} \Rightarrow MQ = QO = 8$

$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{8} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{63}}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$

$\Rightarrow \tan \alpha = -a = \frac{1}{3\sqrt{7}}$

аналогично $a = -\frac{1}{3\sqrt{7}}$

$\Rightarrow a = \left\{ -\frac{3}{\sqrt{55}}, -\frac{1}{3\sqrt{7}}, \frac{1}{3\sqrt{7}}, \frac{3}{\sqrt{55}} \right\}$

Ответ: $a = \left\{ -\frac{3}{\sqrt{55}}, -\frac{1}{3\sqrt{7}}, \frac{1}{3\sqrt{7}}, \frac{3}{\sqrt{55}} \right\}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2:

$$a_2 + b_2 = 14$$

$$b_2 + c_2 = 17$$

$$a_2 + c_2 = 20$$

$$2(a+b+c) = 51$$

$$\Rightarrow \min(a+b+c) = 26$$

$$(x \in (1; 1.5))$$

$$\sqrt{(x-1)(2x-3)} - \sqrt{2x^2+2x+1} = (2-7x)$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4 \cdot 2}}{4}$$

$$(x-1)(2x-3) + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1)} = 4 + 49x^2 - 28x$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 = 4x^2 - 3x + 4$$

$$\Rightarrow -45x^2 + 25x = 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1)}$$

$$5x(5-9x) = 2\sqrt{(x-1)(2x-3) \dots}$$

$$25x^2(25+81x^2-90x) = 4\sqrt{(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1)}$$

$$625x^2 + 2025x^4 - 2250x^3 = (16x^4 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 12) = 0$$

$$2009x^4 - 2226x^3 + 633x^2 - 4x - 12 = 0$$

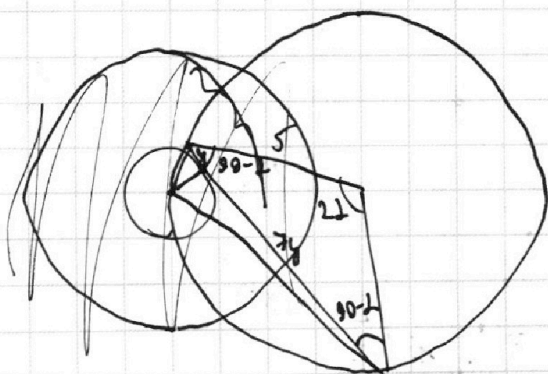
$$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2-6ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

8y

$$180 - (360 - 2\alpha) =$$

$$= 2\alpha - 180$$

$$\Rightarrow \varphi = 180 - \alpha$$



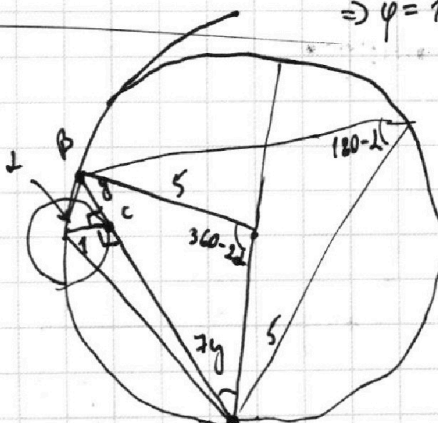
$$\frac{5}{\cos \alpha} = \frac{8y}{\sin 2\alpha} \Rightarrow$$

$$8y = 5 \cdot 2 \cdot \sin \alpha$$

$$= 10 \cdot \sin \alpha$$

$$\Rightarrow y = 1.25 \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{y}{x+y} = \frac{1.25 \sin \alpha}{1.25 \sin \alpha + 1.25 \sin \alpha}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☐	☒	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~QX~~ ~~10b~~ $y = ax + 10b$

$$\Rightarrow ((x+8)^2 + (ax+10b)^2 - 1)(x^2 + (ax+10b)^2 - 4) \leq 0$$

Упрощения $\Rightarrow$ нули правой и левой части равен.

$$(x+8)^2 + a^2x^2 + 100b^2 + 20axb = 1$$

$$x^2 + 16x + 64 + a^2x^2 + 100b^2 + 20x \cdot (ab) = 1 = 0$$

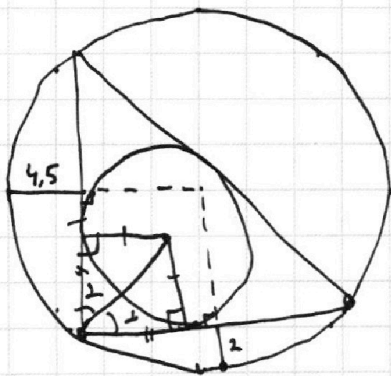
$$x^2 \cdot (1+a^2) + x(16+20ab) + (100b^2+63) = 0$$

$$x^2(1+a^2) + x(20ab) + (100b^2-4) = 0$$

$$x = \frac{-(16+20ab) \pm \sqrt{(16+20ab)^2 - 4(1+a^2)(100b^2+63)}}{2(1+a^2)}$$

$$x_1 = \frac{-20ab \pm \sqrt{400a^2b^2 - 4(\dots)}}{2(1+a^2)}$$

$$x_+ = x_{1+} \Rightarrow \frac{-(16+20ab) + \sqrt{\dots}}{-16 + \sqrt{(16+20ab)^2 \dots}} = \frac{-20ab + \sqrt{\dots}}{\dots}$$

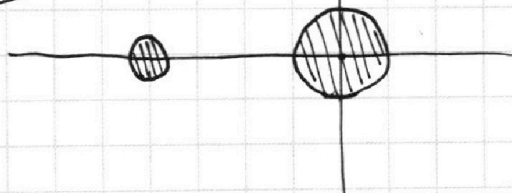


$$\frac{a}{b}$$

$$\frac{ab}{a+b}$$

$$\frac{5 \cdot 8}{5+8}$$

$$y = 10b + ax$$





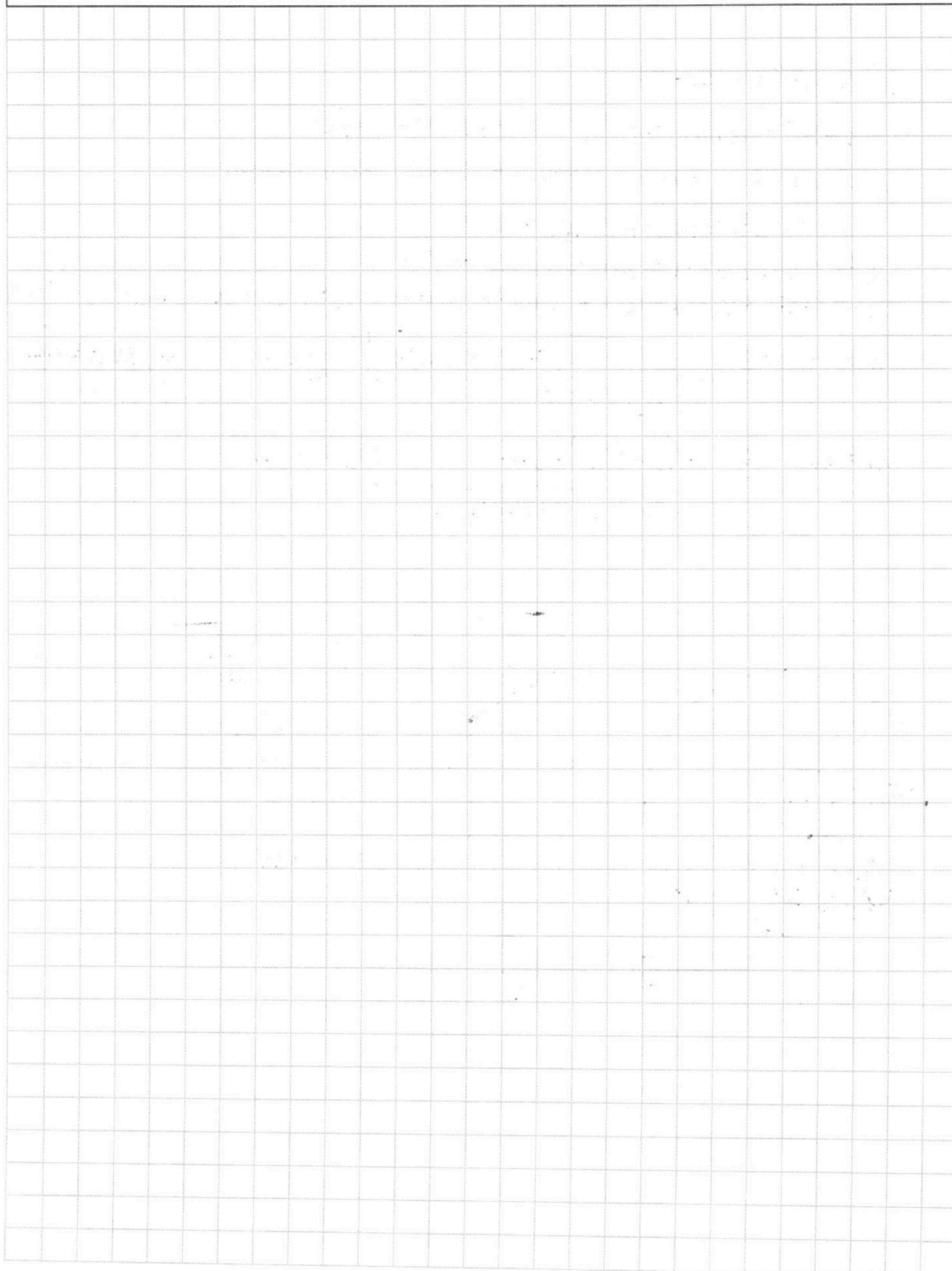
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓