



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~1

Заметим, что степени входящих 2 в abc никак не влияют на степень входящих $\Rightarrow$ в abc . Поэтому снова найдем макс. степень вход. 2-ки.

$$ab: 2^{14}; bc: 2^{13}; ac: 2^{20} \quad \text{Перемножим}$$

$$(abc)^2: 2^{51} \quad \text{Заметим, что степень вход.}$$

в квадрат любого прохода нечетна $\Rightarrow$

$$(abc)^2: 2^{52} \quad \text{Пример} = a = 2^{14} \quad b = 2^{13} \quad c = 2^{20}$$

макс. степень входящих 2 в a это ~~24~~ 9

b в это 6 ~~входящих~~ c это ~~11~~

Теперь разделим c . Пусть x_i - степени входящих $\Rightarrow$ в число i .

Тогда:

$$x_a + x_b = 10 + k_1$$

$$k_1, k_2, k_3 \geq 0$$

$$x_b + x_c = 17 + k_2$$

их сумма

$$x_c + x_a = 37 + k_3$$

$$x_a + x_b + x_c = \frac{32 + k_1 + k_2 + k_3}{2}$$

$$x_b \cdot x_a + x_b + x_c - x_c - x_a = -10 + k_1 + k_2 + k_3$$

$$x_b = -5 + \frac{k_1 + k_2 - k_3}{2} \quad \text{Заметим, что } x_b \geq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{k_1 + k_2 - k_3}{2} \geq 5 \Rightarrow \frac{k_1 + k_2 + k_3}{2} \geq 5 \quad (1 - k_3 \geq 0) \Rightarrow$$

$$x_a + x_b + x_c \geq 37. \quad \text{Пример } x_a = 15; x_b = 0; x_c = 22$$

Итого: Пример ситуации про

$$a = 2^{15}$$

$$b = 2^6$$

$$c = 2^{22}$$

$$\text{Ответ: } 2^{26} \cdot 7^{37}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

u2

$$\text{Пусть } \begin{cases} a+b = mk_1 \\ a^2 - 6ab + b^2 = mk_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = mk_1 \\ (a+b)^2 - 8ab = mk_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow 8ab : m$. Заметим, что если $a : m$,

то т.к. $a+b : m$ ~~то~~ $b : m$, то a и b взаимно
просты, аналогично $b : m$. Таким образом

$8 : m$. Пример на $m=8$

$$a=1; b=7$$

$$\frac{1+7}{49-42+1} = \frac{8}{8} = 1$$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



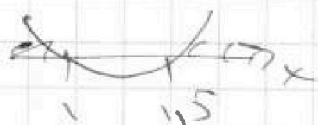
24

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

Ог 3:

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \begin{cases} 1 \\ 1.5 \end{cases}$$



$$x \in (-\infty; 1] \cup [1.5; \infty)$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{4} \text{ — корней нет} \Rightarrow \text{всегда больше 0.}$$

Возведем в квадрат.

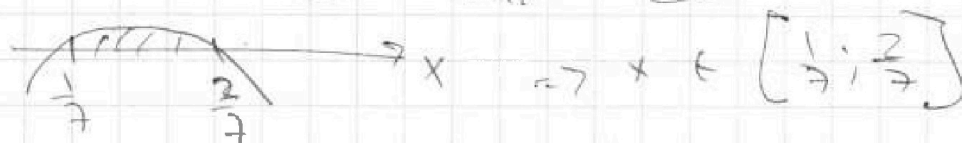
$$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = (2 - 7x)^2$$

$$2 - 7x - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = (2 - 7x)^2$$

$$2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = (7x - 1)(2 - 7x)$$

$$(7x - 1)(2 - 7x) \geq 0$$

$$28x^2 - 26x + 2 \geq 0 \quad x_{4,5} = \frac{26 \pm \sqrt{24}}{56}$$



$$\Rightarrow x \in \left[\frac{1}{7}; \frac{2}{7}\right]$$

$$\text{или } 4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) = (7x - 1)^2(2 - 7x)^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

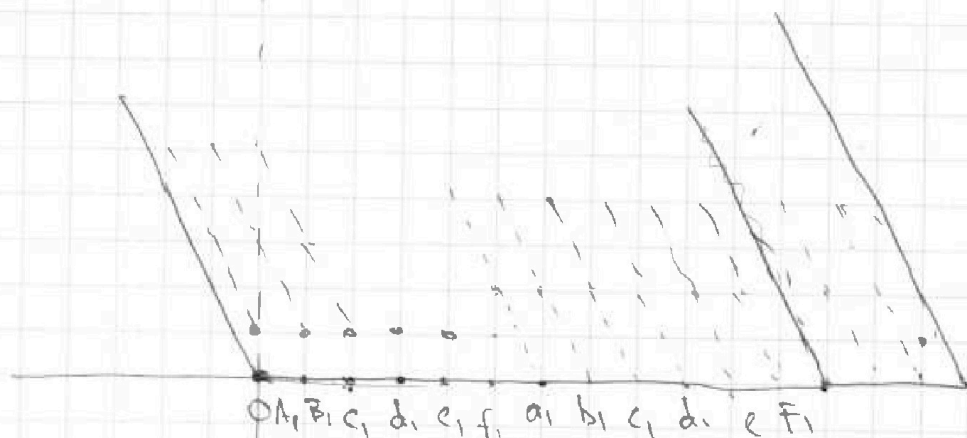
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недоступна!

5



Закфиксируем x_1 и y_1 . Тогда мы знаем как
 $(x_2; y_2)$ это прямая $y_2 = 12 + x_1 + y_1 - x_2$.
 Возьмем точку на прямой как $x_2 = y_2 = 0$.
 Для каждой точки найдем в паре ей
 прямая с мин. решеткой (через 6 кл. вправо
 от нее). И на каждой этой прямой будет
 на уровне $y=0$ 13 точек решетки.
 А на $y=1$ будет 10 точек. Итого
 10+13. Возьмем теперь точку на $y=1$. Тут
 аналогично будет для левой точки в паре ей
 прямая с 13 точками решетки. Однако теперь
 будет на одну меньше - 12, т.к. изменилась
 решетка. И на этом уровне будет 9+13 точек.
 На уровне $y=2$ ситуация будет аналогичная для
 макс. уровня $y=29$. $\Rightarrow$ для каждого уровня будет
 одна пара точек решетки. На паре уровней
 решеткой будет 13 (9+4). Уровней 1 пар уровней
 будет 12. А на концевом еще 10+13 точек.
 Итого сумма $130 + 12 \cdot 13 = 3184$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

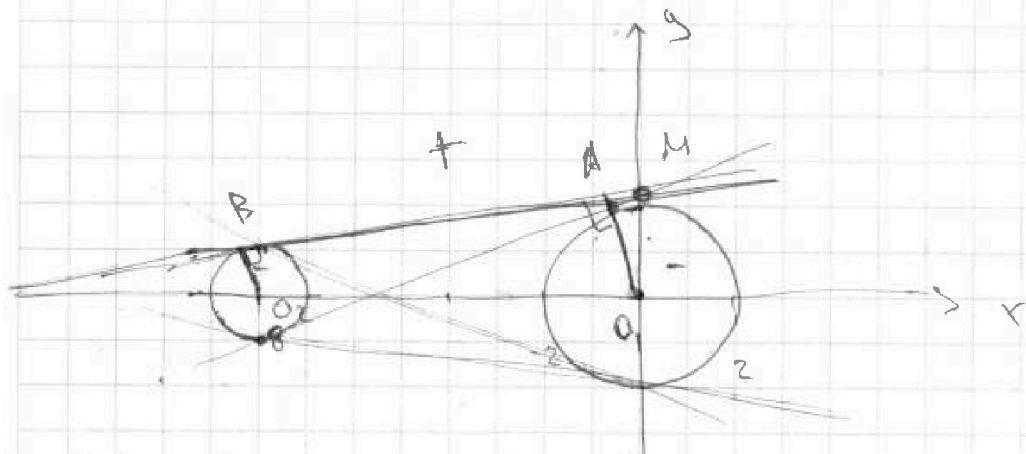
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

16

Решим уравнения

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Это 2 окружности.



Тогда когда (x, y) находится на ней, отсюда имеем выражение $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4)$ принимает 0, а когда "проходит" между окруж. имеет знак. Поэтому внутри окр. отриц. значение произведени, а вне полож. Так мы увидим когда прямая имеет ровно 2 точки пересечения, то это будет общ. касат. Все можно провести и касат. Но достаточно найти а у 2-х вершин, минимизи будут симметричны и будут находиться только так. Рассмотрим более подробно касат. Пусть она касается в точках А и В. Тогда $O_1O_2 = 8 \Rightarrow$ Пусть прямая касат. пересекает ось x в точке С. $\Rightarrow$ из подобия $O_2C = O_1O_2 = 8 \Rightarrow CO_1 = 16$. Пусть эта же касат. пересекала ось y в точке М. Тогда:

$$\frac{O_1C}{O_1A} = \frac{O_2C}{O_2B} \Rightarrow \frac{16}{O_1A} = \frac{8}{O_2B} \Rightarrow O_1A = 2O_2B$$

$$a_1 = \frac{O_1M}{O_1C} = \frac{O_1A}{AC} = \frac{2}{\sqrt{16^2 - 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{252}} = \frac{1}{\sqrt{63}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

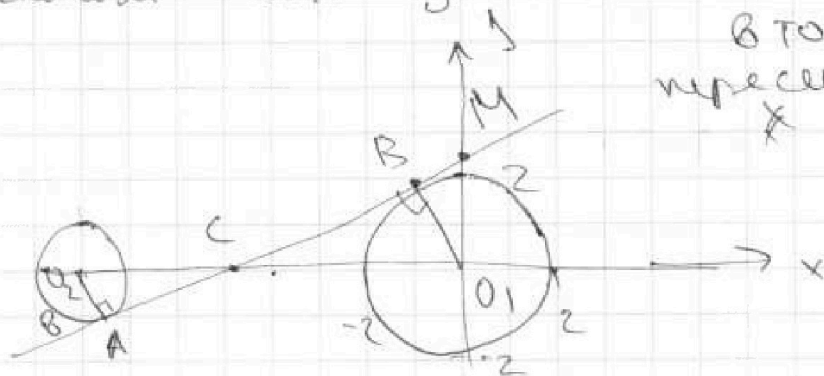
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Рассмотрим вторую касательную к кривой в точке A . Пусть она касается ось Y в точке B . Тогда AB перпендикулярна оси Y в B .



$$\Delta O_2 \approx \Delta O_1 \Rightarrow O_2 C = \frac{8}{3} \Rightarrow CO_1 = \frac{16}{3} =$$

$$CB = \sqrt{\frac{256}{9} - 4} = \frac{\sqrt{220}}{3} \quad ; \quad a_2 = \frac{0,4}{c_1} = \frac{0,8}{CB} = \frac{2 \cdot 9}{\sqrt{220}}$$

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{63}}; a_2 = \frac{6}{\sqrt{55}} \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{\sqrt{63}}; a_4 = -\frac{6}{\sqrt{55}}$$

Order: $\frac{1}{\sqrt{62}}; -\frac{1}{\sqrt{63}}; \frac{6}{\sqrt{55}}; -\frac{6}{\sqrt{55}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

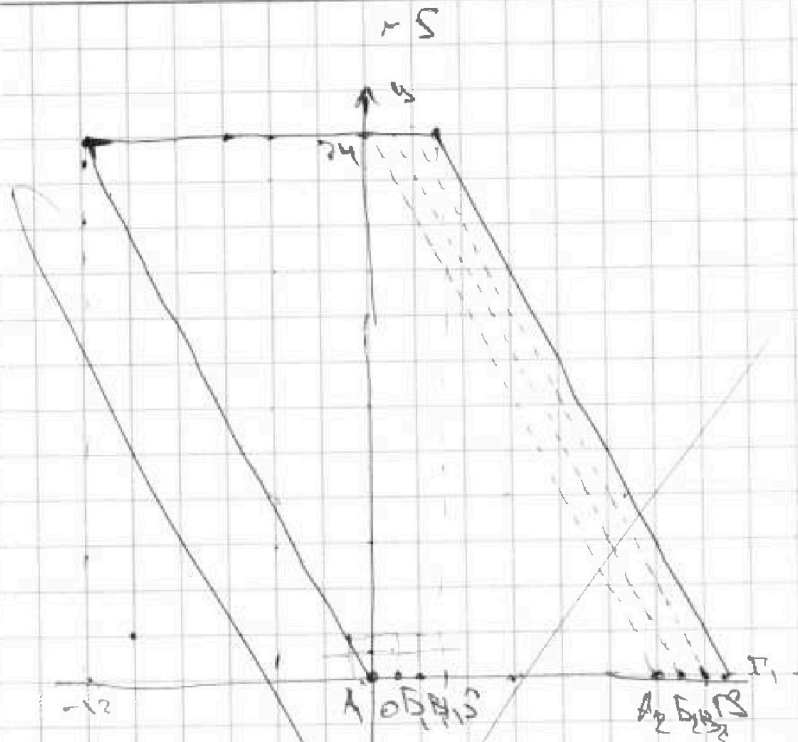
Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Закрепим точки (x_1, y_1) где y_1 и найдем
мн. точек (x_2, y_2) удовлетв. условию задачи

Пусть $x_1 = 0; y_1 = 0$

$\rightarrow 2x_2 + y_2 = 12 \rightarrow y_2 = 12 - 2x_2$. То есть

для фиксированной точки x_1, y_1 в с

то есть пары (x_2, y_2) на прямой $y_2 = 12 - 2x_2 + y_1 + 2x_1$

Тогда выберем минимальную границу. На ней
можно найти и точки A, B, C, D, P ~~каждой~~

$(0, 0); (1, 0); (2, 0); (3, 0)$ каждой из

которых соответствует и ~~мн.~~ мн. точек-пар.

(с прилики) на каждой прямой находим

13 ~~целых~~ точек $\rightarrow$ для каждой границы

будет $24 \cdot 4$ пар. Возникнет на следующей

паре двух чисел (по $x=1$). Там аналогично

и прилики на каждой из которых ~~решены~~

При этом пары не повторяются. Итого всего пар

$4 \cdot 24 \cdot 13$.



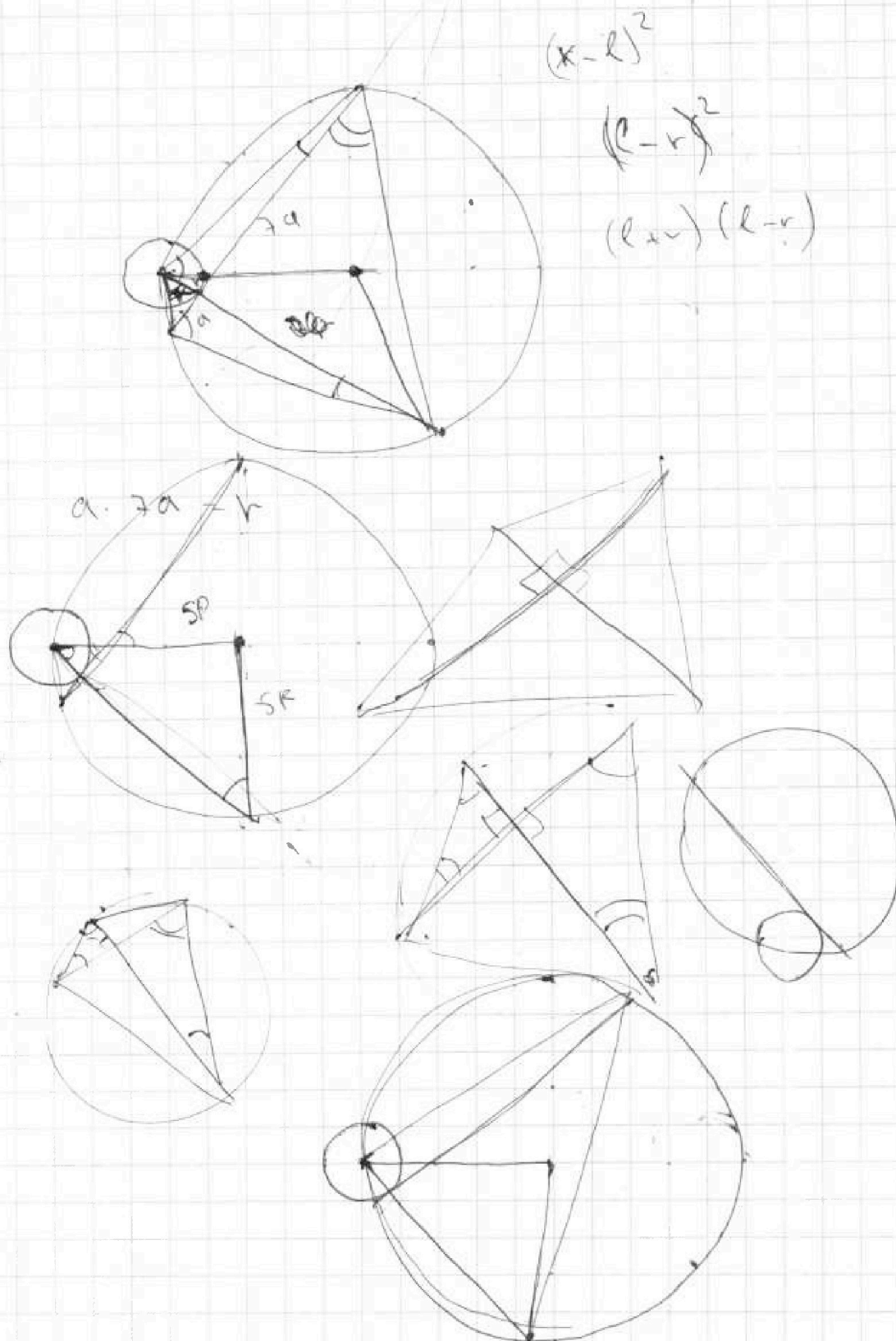
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} a &= 2^4 \\ c &= 2^{10} \end{aligned}$$

$$b = 2^6$$

$$a = 2^9 \quad c = 2^{10} \quad b = 2^6$$



$$64 - 1$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

$$\frac{a+b}{(a-b)^2-4ab}$$

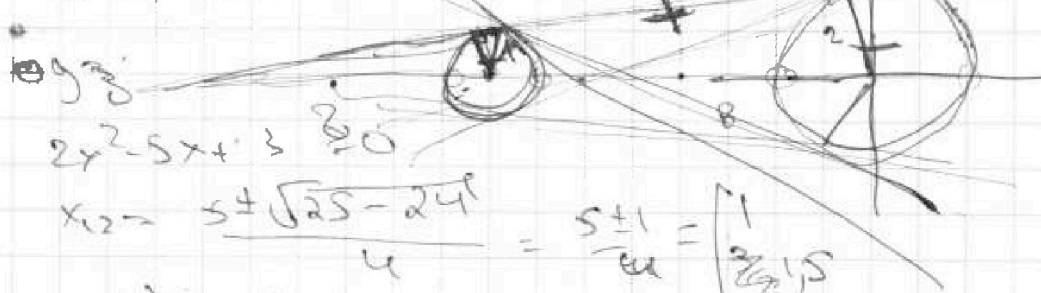
$$\frac{a+b}{x+1}$$

$$a+b \quad a-b^2-4ab$$

$$(x-1)(2x-3)$$

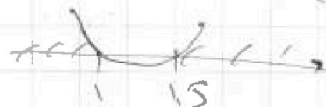
$$a+b: a^2+b^2-6ab$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$



$$2x^2-5x+3 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ 1.5 \end{cases}$$



$$\sqrt{(x+1)(2x-3)} = \sqrt{2x^2+2x+1} + 2-7x$$

$$2x^2+2x+1 \geq 0$$

$$x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{4}$$

$$2-7x - 2\sqrt{2x^2+2x+1} = (2-7x)^2$$

$$(2-7x)(1-7x)$$

$$(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1) = ((2-7x)(1-7x))^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c

$ab: 2^{14} 7^{10}$

$2^4 + 14$
 $\frac{17}{31}$

$\frac{17}{31}$
 $\frac{37}{64}$

$$ab = 2^{14} 7^{10} k_1$$

$$(abc)^2 = 2^{61} 7^{64} k_1 k_2 k_3$$

$$2^{32} 7^{64}$$

$$12$$

$$bc = 2^{17} 7^{17} k_2$$

$$ac = 2^{30} 7^{37} k_3$$

$$31$$

$$b: 2^{17} 7^{10}$$

$$a: 2^{10} 7^{10}$$

$$a = 2^{10} 7^5$$

$$b = 2^4 7^5$$

$$x_a + x_b = 14$$

$$x_b + x_c = 17$$

$$x_c + x_a = 30$$

$$\frac{x}{2}$$

$$k_1 + k_2 - k_3 \geq 10$$

$$\begin{cases} x_a + x_b = 10 \\ x_b + x_c = 17 \\ x_c + x_a = 37 \end{cases}$$

$$y_c = 22$$

$$a^2 = 2^{27} \cdot 2^{30}$$

$$\Rightarrow$$

$$a = 2^2$$

$$a = 7^{15}$$

$$a = 2^{14}$$

$$c = 2^{17}$$

$$x_a + x_b \geq 10 + k_1$$

$$x_b + x_c \geq 17 + k_2$$

$$x_c + x_a \geq 37 + k_3$$

$$2x_c = 64 - k_2 - k_3 - k_1$$

$$2x_a = 30 - k_1$$

$$2x_b = -10 + k_1 + k_2 - k_3$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 7^2}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 7^2}$$



$$y = ax + b$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

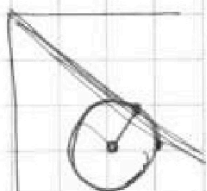
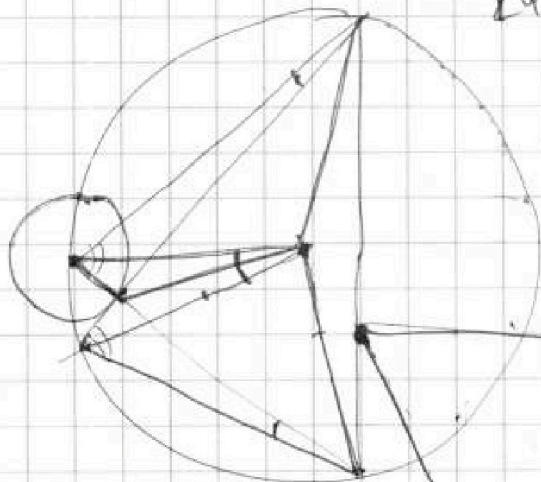
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$24x - 49x^2 - 2 + 2x$$

$$x_1 = -21 \pm$$



$$\sqrt{2x^2 - 8x + 4x^2}$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$\sqrt{(y-y_0)^2 + (x-x_0)^2} = r$$

$$\sqrt{(y-y_0)^2 + (x-x_0)^2} = r$$

$$\sqrt{(y-y_0)^2 + (x-x_0)^2} = r$$

$$a = \frac{y_0 - x_0}{\sqrt{2}}$$



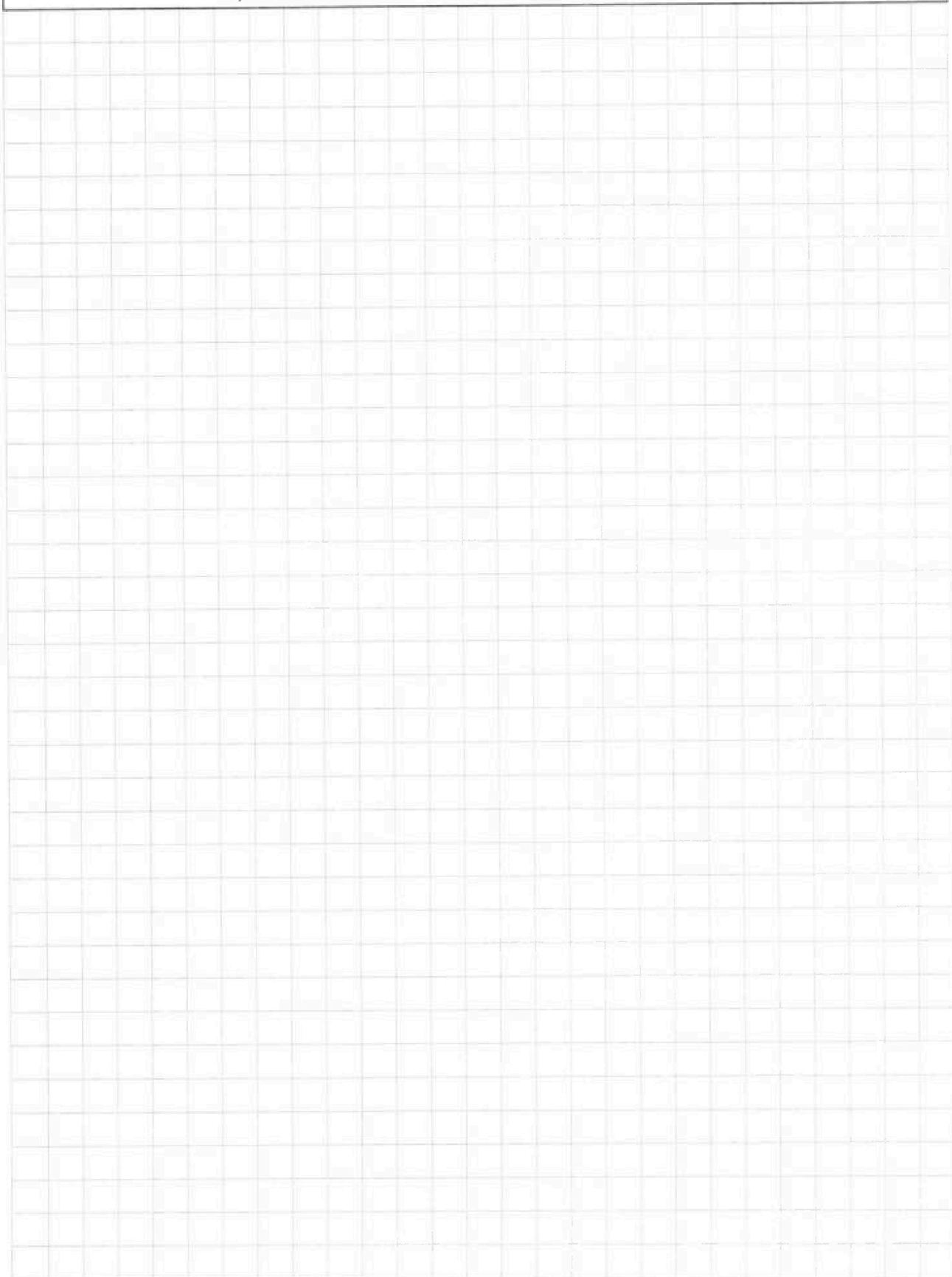
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

